

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 036

数値的半豊富性と一般化極小モデル

総括・論文間のつながりと4篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-13

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

総括に続き、公式カタログ順で全4篇の解説を収録しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00・カタログ036 総括	3
01・Numerical semiampleness of nef adjoint classes on compact Kähler manifolds	8
02・Numerical Semiamplessness of Nef Adjoint Divisors	23
03・Minimal models and Mori fibre spaces for generalized log canonical $\mathbb{Q}$ -pairs	37
04・Minimal models in numerical dimension one	49

原論文の参照版: 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a

カタログ036・総括

Web版を読む ↗

CATALOGUE 036

数値的半豊富性と一般化極小モデル

Numerical semiampleness and generalized minimal models

nef adjointの数値的半豊富性と、固定nef b-dataを持つgeneralized lc対のモデル存在を扱う4篇である。数値同値なsemiample因子の存在、実Bott–Chern類の一致、元のadjointのsemiampnessは区別する。数値次元1の論文は、曲面の交点論による別の極小モデル構成を与える。

1. 公式順の記事一覧

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

カタログ 036 · 2026-10-13 確認の固定参照版

#

01

論文・概説

Numerical semiampness of nef adjoint classes on compact Kähler manifolds →

図中の略称: Numerical semiampness of nef adjoint classes on compact Kähler manifolds

October 6, 2026 · 52 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

smooth compact Kähler上の有理SNC klt対で、 $K+B$ がpseudo-effective、 M と $K+B+M$ がnefなら、同じ実Bott–Chern類を持つsemiample有理lineが存在する。

Theorems 1.1–1.2 · pp. 2–3 ↗

議論の役割・概説

代数次元0での消滅、nef lineの降下、射影底上のpositive partを合流させる。

証明概説を読む →

#

02

論文・概説

Numerical Semiampleness of Nef Adjoint Divisors →

図中の略称: Numerical Semiampleness of Nef Adjoint Divisors

October 3, 2026 · 37 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

標数0の射影klt有理対、 $K+B$ pseudo-effective、 X 上の M nef、 $K+B+M$ nefから、同じ X 上の semiample有理因子との数値同値を得る。

[Theorem 1.1; Corollary 1.2 · pp. 1–2](#) ↗

議論の役割・概説

full nef dimensionからbig性への帰着と、nef reductionによるpositive partの帰納法。

[証明概説を読む](#) →

#

03

論文・概説

Minimal models and Mori fibre spaces for generalized log canonical Q-pairs →

図中の略称: Minimal models and Mori fibre spaces for generalized log canonical Q-pairs

September 24, 2026 · 79 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

固定nef有理b-divisorを持つ射影generalized lc対で、adjointがpseudo-effectiveなら極小モデル、それ以外はMori fibre spaceが存在する。

[Theorem 1.1; Corollary 1.2 · p. 2](#) ↗

議論の役割・概説

局所位相とsmooth relative weak Zariski decompositionから、NQC generalized MMPへ移す。

[証明概説を読む](#) →

#

04

論文・概説

Minimal models in numerical dimension one →

図中の略称: Minimal models in numerical dimension one

September 24, 2026 · 14 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

複素射影smooth X 、 $\dim X \geq 3$ 、 KX pseudo-effective、切断増大による数値次元1ならQ-factorial terminal極小モデル。別入力で同じ終点がgoodとなる。

[Theorem 1.1; Corollary 1.2 · p. 2](#) ↗

議論の役割・概説

余次元2で固定したモデルと二つの曲面でnef性を示す独立の経路。

[証明概説を読む](#) →

2. モデル存在から数値的半豊富性へ

図は主要3篇の連続した帰着を示す。下向きの辺は実際に使われる結果への直接依存であり、元論文の全結論の包含や全証明の検証を表すものではない。箱の番号は公式順、配置は証明の依存順に従う。

図の引用案内

- [OpenAI26a](#) OpenAI — Numerical semiampleness of nef adjoint classes on compact Kähler manifolds. October 6, 2026.
- [OpenAI26b](#) OpenAI — Numerical Semiamplessness of Nef Adjoint Divisors. October 3, 2026.
- [OpenAI26c](#) OpenAI — Minimal models and Mori fibre spaces for generalized log canonical Q-pairs. September 24, 2026.
- [OpenAI26d](#) OpenAI — Minimal models in numerical dimension one. September 24, 2026.
- [OpenAI26LA](#) OpenAI — Log abundance in characteristic zero. September 24, 2026.

OpenAI26cはモデル存在、OpenAI26bは射影的positive part、OpenAI26aはKählerでの実Chern類の結論を担う。OpenAI26LAはordinary adjointに対する追加の入力である。OpenAI26dは下記の独立した曲面論法の下稿を指す。

Minimal models and Mori fibre spaces for generalized log canonical Q-pairs**03 Generalized lc : 固定 nef b-data のモデル**

$K_X + B + M_X$ が pseudo-effective なら nef 終点。
元のモデル上の M_X が nef とは限らない。

有限 MMP に ordinary abundance と新しい big 性を合流

[OpenAI26c, Theorem 1.1; Section 3.3, pp. 2, 14–16]

[OpenAI26b, Theorem 2.3, p. 4] [OpenAI26LA, Theorem 1.1, p. 2]

Numerical Semiampleness of Nef Adjoint Divisors**02 射影 klt 対の positive part**

$P_\sigma(w^*(K_X + B + M)) \equiv L$, L semiample.

$K_X + B$ は pseudo-effective、 M は X 上で nef。

代数還元後の射影底へ降下し、positive part を適用

[OpenAI26b, Proposition 8.1, p. 30]

[OpenAI26a, Proposition 2.5; Section 7.3, pp. 7–8, 48–49]

Numerical semiampleness of nef adjoint classes on compact Kähler manifolds**01 Kähler : 実 Chern 類の semiample 代表**

$c_1(K_X + B + M) = c_1(L)$ in $H_{\text{BC}}^{1,1}(X, \mathbb{R})$.

smooth • SNC klt、 $K_X + B$ pseudo-effective、 M と $D = K_X + B + M$ は nef。

モデル存在・ordinary abundance・射影positive partからKähler数値的半豊富性へ至る主要経路

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

射影版は、generalized kltのQ-factorialな場合の有限MMPを使って二つのadjointを制御し、ordinary log abundanceと新たなbig性の議論を合わせてpositive partを構成する。Kähler版はそのpositive-part定理を、代数還元後の射影底上のordinary klt対へ適用する。Kähler空間で任意のgeneralized MMPをそのまま動かす矢印ではない。

[OpenAI26c, Theorem 1.1; Section 3.3, pp. 2, 14–16] [OpenAI26b, Theorem 2.3, p. 4]

[OpenAI26b, Proposition 8.1, p. 30] [OpenAI26a, Proposition 2.5; Section 7.3, pp. 7–8, 48–49]

適用仮定と証明の説明は射影版の記事とKähler版の記事へ進む。Kähler版にはさらにordinary Kähler log abundance (034の2026-10-06版) とOrbifold Iitaka (033) の入力があり、版と用途を同記事の文献案内に分けて記す。

数値次元1の記事は、有限正摂動を余次元2で固定し、固定捻りの増大と負の曲線を通る曲面を使って nef性を示す。そのTheorem 1.1は上のgeneralizedモデル存在定理を使う構成ではない。Corollary 1.2ではordinary log abundanceを別途加え、同じterminal終点をgood minimal modelにする。

[OpenAI26d, Theorem 1.1; Corollary 1.2, p. 2] [OpenAI26LA, Theorem 1.1, p. 2]

Generalized lcの記事のCorollary 1.2も $M=0$ のordinary対を扱い、その後にだけordinary abundanceを追加できる。非零nef b-dataを持つ場合へsemiamplenessを外挿しない。未掲載の引用関係は未調査であり、依存なしとは扱わない。

3. 原典と確認範囲

公式overviewとCONTENTSの固定commit 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6aを参照し、分野は公式順の第2分野「Algebraic and complex geometry」、036の概要はPDF p. 5で確認した。4篇の順序・正式名・版・頁数を照合し、記事の主張・主要な帰着・直接入力の記事と使用箇所を点検した。個別に残る教科書照合や外部証明の未確認は各記事末尾に示す。原稿群の主張を紹介する概説であり、全論証の専門家査読・形式検証を意味しない。

OpenAI Research Catalog · Catalog 036 · p. 5

Numerical semiampleness of nef adjoint classes on compact Kähler manifolds

代数還元ファイバー上でnef類を消し、射影底の通常随伴へ帰着する

原稿は、通常のklt随伴 $K_X + B$ に、元の空間上のnef有理直線束 M を加えた類を扱う。証明は数値的正部分の分解を次元帰納で作る、nefの場合に負部分を消す。得られるのは実Bott–Chern類を共有する半豊富な代表であり、元の直線束のflat部分は変わり得る。

原稿の著者: OpenAI · October 6, 2026 · 52 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 元の空間上の半豊富な代表

X を滑らかな連結コンパクトKähler多様体、 $B \geq 0$ を係数がすべて1未満の有理SNC因子、 $M \in \text{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とする。 $K_X + B$ がpseudo-effective、 M と $D = K_X + B + M$ がnefなら、半豊富な有理直線束 L が X 上に存在して

$$c_1(L) = c_1(D) \quad \text{in } H_{\text{BC}}^{1,1}(X, \mathbb{R})$$

となる。ここで M は X 自身の直線束であり、高いモデル上だけでnefな任意のb-divisorではない。

[Theorem 1.1 · p. 2](#)

Theorem 1.2 — 負部分を含む強化された分解

T を滑らかな連結コンパクトKähler多様体、 $B \geq 0$ を係数がすべて1未満の有理SNC因子、 M をnef有理直線束とする。 $J = K_T + B$ がpseudo-effectiveなら、滑らかなコンパクトKähler modification $\mu : U \rightarrow T$ 、半豊富な有理直線束 P 、有効有理因子 R が存在して

$$\mu^*(J + M) \equiv P + R, \quad R = N(c_1(\mu^*(J + M))).$$

さらに $a(T) = 0$ なら $c_1(M) = 0$ である。 $a(T)$ は代数次元、 N は解析的因子の負部分である。 $J + M$ の nef 性は仮定しない。以下、 $\equiv$ は実 Bott–Chern 類の一致、 $\sim_{\mathbb{Q}}$ は $\text{Pic} \otimes \mathbb{Q}$ における一致を表す。

Theorem 1.2 · p. 3

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 Numerical semiampleness of nef adjoint classes on compact Kähler manifolds を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [OpenAI26b](#) OpenAI — Numerical Semiampleness of Nef Adjoint Divisors : 射影 klt 対の正部分の数値的半豊富性と、固定 nef データの一般化 klt MMP。2026 年 10 月 3 日版。
- [OpenAI26K](#) OpenAI — Log abundance for compact Kähler spaces under logarithmic Iitaka subadditivity : 通常の随伴の線形同値による分解と、既知の負部分を収縮するプログラム。October 6, 2026。
- [OpenAI26O](#) OpenAI — Orbifold and logarithmic Iitaka subadditivity : 通常分解の対数飯高仮定、最高 Hodge line の正値性と period 商への降下。September 26, 2026。
- [MWWZ](#) Shin-ichi Matsumura; Juanyong Wang; Xiaojun Wu; Qimin Zhang — Beauville–Bogomolov–Yau decomposition for Kähler generalized pairs : nef b-part が 0 の Calabi–Yau 型 klt 対の有限準étale 積分解。arXiv:2506.23218v2 (September 9, 2026); title-page date September 10, 2026。
- [HX](#) Christopher Hacon; Lingyao Xie — On the Kähler MMP and the transcendental base-point-free theorem : 通常 klt 対の負の ray の長さの上界。arXiv:2607.24986v1 (July 27, 2026); title-page date July 29, 2026。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号と PDF 内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHub の閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.2 の証明 — 三つの幾何学的場合を同時帰納でつなぐ

証明対象 : Theorem 1.2 · p. 3 仮定と二つの結論を参照する。

証明の道筋。 分解と $a(T) = 0$ での消滅を同時に帰納する。射影の場合は外部の正部分定理を使う。代数次元 0 の場合は単純なシンプレクティックモデルへ帰着する。中間の場合はファイバー上の消滅から M を底へ降ろし、通常 klt 随伴の構成を経て射影の場合へ戻る。最後に nef な D へ特殊化して Theorem 1.1 を得る。

1 分解と消滅を同時に帰納

$J = K_T + B$ pseudo-effective, M nef, $n = \dim T$
射影の場合：射影正部分定理。 $a(T) = 0 : M \equiv 0$ と通常分解。

帰納的分解と代数還元が与える矛盾から数値降下へ
[Proposition 6.4 · pp. 44–45](#) [Corollary 6.5 · p. 45](#)

2 中間の場合は nef 項を降ろす

$0 < a(T) < n$, $h : T \rightarrow W$, $M \equiv h^* N_W$, N_W nef
可算個の全体上の flat 捻りを先に固定し、ファイバー上の類を消す。

$b > 2n$ でプログラムを W 上に保ち、period から境界を作る
[Proposition 7.2 · pp. 47–48](#) [Proposition 4.1 · p. 11](#)

3 通常随伴を射影底に置く

$Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{j} W$, $J_Y \sim_{\mathbb{Q}} f^* H$, $H \sim_{\mathbb{Q}} K_Z + \Delta_Z$
 H は pseudo-effective、 (Z, Δ_Z) は有効 klt。

射影的正部分、混合 Hodge–Riemann、例外誤差の除去
[\[OpenAI26b, Proposition 8.1, p. 30\]](#)
[Lemma 7.1 · p. 46](#) [Section 7.3 · pp. 48–49](#)

4 射影分解を引き戻し、負部分全体を同定

$\mu^*(J + M) \equiv P + R$, P semiample, $R = N(\mu^*(J + M))$
 $a(T) = 0$ での $c_1(M) = 0$ と合わせて帰納が閉じる。

代数次元による場合分けと射影正部分への合流

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 射影の場合と代数次元0の場合

$a(T) = \dim T$ なら Kähler–Moishezon 定理で T は射影的となる。射影入力 $K_T + B$ の pseudo-effectivity と、 T 上の M の nef 性から、有理で数値的に半豊富な正部分を与える。これとは別に固定 nef データの一般化 klt MMP を使い、共通解消上で

$$u^*(K_T + B + M) \sim_{\mathbb{Q}} v^* H_m + E$$

を得る。 H_m は nef、 $E \geq 0$ は v -例外的で、負部分の計算が $E = N(u^*(K_T + B + M))$ を与える。一般化モデル上の M の trace 自体が nef とは仮定しない。

[Proposition 2.5 · pp. 7–8](#)

[\[OpenAI26b, Proposition 8.1, p. 30\]](#)

[\[OpenAI26b, Theorem 2.3, p. 4\]](#)

$a(T) = 0$ ではProposition 5.1が $M \equiv 0$ を与える。通常随伴の分解は実際の線形同値 $\mu^*J \sim_{\mathbb{Q}} P + R$ であり、この場合 P は有理直線束として自明となる。したがって M を加えても負部分は変わらない。通常分解の対数飯高仮定は、被約SNC境界と $\text{Supp}(f^*D_Y) \subseteq \text{Supp}(D_X)$ を保った劣加法性によって供給される。

Theorem 2.3; Proposition 2.4 · pp. 6–7

[OpenAI26K, Definition 2.1; Theorem 2.13, pp. 6, 13]

[OpenAI26O, Corollary 6.2, pp. 40–41]

2. 中間代数次元でプログラムを射影底上に保つ

$0 < a(T) < n$ では代数還元を $h: T \rightarrow W$ に解消する。Proposition 6.4とCorollary 6.5で、さらに高いモデル上で $M \equiv h^*N_W$ 、 N_W nefを得る。 A_W をample Cartier、整数 $b > 2n$ とし、 $J + bh^*A_W$ を通常klt境界の随伴として分解する。既知の負部分を収縮する通常プログラムは半豊富な正部分の実際の直線束を保持する。

このプログラムが W 上で動くことは別に証明する。 $J_i + bC_i$ -負のrayは J_i -負であり、長さ $0 < -J_i \cdot \Gamma \leq 2n$ の有理曲線で生成される。 $C_i = h_i^*A_W$ はCartierなので、 $C_i \cdot \Gamma > 0$ なら

$$(J_i + bC_i) \cdot \Gamma \geq -2n + b > 0$$

となって矛盾する。従って $C_i \cdot \Gamma = 0$ で、連結ファイバーによる降下が写像 h_i 自体を保持する。終点 (Y, Δ) で $J_Y + bh_Y^*A_W$ は半豊富となる。

Proposition 7.2 · pp. 47–48

[OpenAI26K, Proposition 3.8, pp. 23–24]

[HX, Theorem 1.3, p. 2]

3. 射影底で解き、負部分全体を引き戻す

半豊富写像と h_Y を合わせたStein分解を $f: Y \rightarrow Z$ 、 $j: Z \rightarrow W$ とする。 Z は正規射影的で、 $a(T) = \dim W \leq \dim Z \leq a(Y) = a(T)$ より f は正の相対次元を持つ。底のample項を引くことで $J_Y \sim_{\mathbb{Q}} f^*H$ を得る。通常nonvanishingと例外比較で H はpseudo-effectiveであり、Proposition 4.1によって $H \sim_{\mathbb{Q}} K_Z + \Delta_Z$ 、 (Z, Δ_Z) klt、 $\Delta_Z \geq 0$ となる。従って射影入力を $H + j^*N_W$ に適用できる。

その射影分解を共通Kähler解消 V へ引くと、半豊富な類 $g^*P_{Z'}$ と有効因子 g^*E を得る。 g^*E の全成分は最終射影モデル Z_m の余次元2以上へ落ちるが、 $V \rightarrow Z_m$ は一般に双有理ではない。そこでLemma 7.1の混合Hodge–Riemann議論を用い、 $N(r^*H_m + g^*E) = g^*E$ を確定する。さらに通常プログラムの有効例外因子 F を加えると

$$q^*(J_1 + M_1) \equiv g^*P_{Z'} + g^*E + F, \quad N(q^*(J_1 + M_1)) = g^*E + F.$$

解消で加えた有効例外誤差をLemma 2.2で取り除く。これで半豊富な有理正部分、負部分の有理性、その全体の同定が揃う。

3. Proposition 5.1 の証明 — 代数次元0でnef類が消える理由

証明対象：Proposition 5.1 · p. 18

Proposition 5.1 — 代数次元0の帰納段階

$n \geq 1$ とし、Theorem 1.2の代数次元0での結論が n 未満の全次元で成立すると仮定する。 T を $a(T) = 0$ の滑らかな連結コンパクトKähler n 次元多様体、 $B \geq 0$ を係数が1未満の有理SNC因子とする。 $K_T + B$ がpseudo-effectiveなら、任意のnef有理直線束 M は $c_1(M) = 0$ を満たす。

Proposition 5.1 · p. 18

1 通常 Calabi–Yau 型から単純モデルへ

$$a(T) = 0, \quad K_{T_0} + B_0 \sim_{\mathbb{Q}} 0$$

トラス・積を低次元帰納で扱い、単純なシンプレクティックモデルを残す。

nef b-part を 0 として積分解し、単純モデルへ帰着
[MWWZ, Corollary 1.4, p. 6] Lemmas 5.2–5.3 · pp. 18–19

2 有限対応を排除し、傾きを評価

$$\mathcal{L} = K_X + N_0, \quad c_1(H) \leq k c_1(\mathcal{L}) \quad (H \rightarrow \Omega_X^{\otimes k})$$

点 blowup にも同じ傾きの評価を課す。

二つの対角線：行列式の消滅と点極の上界が衝突
Proposition 5.6 · pp. 21–22 Section 5.3.9 · pp. 37–38

3 有理型切断から符号付き因子表示へ

$$\mathcal{L}^{\otimes m} \text{ has a meromorphic section, } N_0 \sim_{\mathbb{Q}} E - G$$

$$E, G \geq 0, \quad K' + uE, \quad K' + uG \text{ ordinary klt adjoints}$$

代数次元 0 で通常分解の正部分は有理自明；負部分を比較
Theorem 2.3; Proposition 2.4 · pp. 6–7 Proposition 5.17 · p. 39

4 両符号の pseudo-effectivity から消滅

$$N(\alpha_E) \leq N(\alpha_G), \quad u\{N_0\} = \{N(\alpha_E) - N(\alpha_G)\}$$

$$\{N_0\} \text{ nef, } -\{N_0\} \text{ pseudo-effective} \implies c_1(M) = 0$$

積分解と有理型切断を通じたnef類の消滅

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 通常Calabi–Yau型の対から単純モデルへ

通常分解とその負部分の収縮により $K_{T_0} + B_0 \sim_{\mathbb{Q}} 0$ を得る。MWWZの積分分解には、この通常klt対を nef b-partが0の一般化対として入力する。有限準étale被覆の有理連結因子・高次元strict Calabi–Yau因子は $a = 0$ と両立せず、トーラスとシンプレクティック因子が残る。複素因子なら低次元ファイバー上の帰納仮定と混合交点数でnef類を消す。単一のシンプレクティック因子にはCampanaの最小ファイバー化を用い、一般点で非退化な正則2形式を持つ単純モデルへ帰着する。これら補助入力の全証明は本記事の確認範囲に含めない。

Lemmas 5.2–5.3 · pp. 18–19

[MWWZ, Corollary 1.4, p. 6]

2. 余接束の傾きから有理型切断を取り出す

不正則数が正の有限被覆があればAlbaneseとトーラス上の交点数で済む。残る場合、すべての滑らかな生成有限被覆で不正則数が0となる。動く有限対応が $X \times X$ を覆うなら、固定有限被覆上で2形式を動く方向と縮約して非零1形式を得て矛盾する。このため非常に一般の点を通る正次元真部分多様体は因子スライスに限られる。

N_0 を M の整数倍とし、 $\mathcal{L} = K_X + N_0$ を取る。シンプレクティック形式の最高外積により K_X は有効で、Lemma 5.5が $\Omega_X^{\otimes k}$ への直線束の写像に対する $c_1(H) \leq kc_1(\mathcal{L})$ と点blowup上の対応する評価を与える。Proposition 5.6は、二つの対角線、射影束の体積、余接テンソルの行列式を使い、 $\mathcal{L}$ のある正の冪の非零有理型切断を得る。最終段階では、対角線の消滅次数を点での極へ移し、有界な点極評価と発散する行列式次数を衝突させる。これは正則切断のnonvanishingと同一ではない。

Proposition 5.6 · pp. 21–22

Section 5.3.9 · pp. 37–38

3. 符号付き因子表示を二つの通常随伴へ分ける

有理型切断を標準切断で割り、解消後に $N_0 \sim_{\mathbb{Q}} E - G$ 、 $E, G \geq 0$ を得る。小さい有理数 $u > 0$ を選び、 $K' + uE$ と $K' + uG$ の両方を通常klt随伴とする。両者はpseudo-effectiveであり、代数次元0なので通常分解の半豊富部分は自明である。共通モデル上の類を α_E, α_G とすると、 $\alpha_E - \alpha_G = u\{N_0\}$ は nef だから

$$N(\alpha_E) \leq N(\alpha_G), \quad u\{N_0\} = \{N(\alpha_E) - N(\alpha_G)\}.$$

従って $-\{N_0\}$ も pseudo-effective となる。nefな $\{N_0\}$ とその反対の類をKähler冪と積分し、質量0から $\{N_0\} = 0$ を得る。生成有限写像・modificationの引戻しの単射性で T へ戻す。

Proposition 5.17 · p. 39

4. Proposition 6.4 の証明 — flat捻りを選ぶ順序

証明対象 : Proposition 6.4 · pp. 44–45

Proposition 6.4 — 代数還元ファイバー上の消滅

Theorem 1.2が n 未満の全次元で成立すると仮定する。 T を $0 < a(T) < n$ の滑らかな連結コンパクト Kähler n 次元多様体、 $h : T \rightarrow W$ を滑らかな射影底への連結ファイバーを持つ正則代数還元とする。 $B \geq 0$ は係数が1未満の有理SNC因子、 $J = K_T + B$ はpseudo-effective、 M はnef有理直線束とする。このとき一般の滑らかなファイバー F 上で $c_1(M|_F) = 0$ である。

Proposition 6.4 · pp. 44–45

1 ファイバーより先に全体上のデータを選ぶ

$h : T \rightarrow W$, $(f_i : X_i \rightarrow Z_i)_{i \in I}$, $M_i^* \equiv M$
 相対因子 cycle から可算個の写像と flat 捻りを固定する。

coherent base change と ample 捻り ; 可算性で同時選択
 Lemmas 6.1–6.3 · pp. 40–43

2 非常に一般のファイバーで同時に制約

$F = T_w$, $\kappa(F, (J + M_i^*)|_F) \leq 0$ (all i)
 切断の比を全体へ持ち上げると、代数還元により定数になる。

低次元分解と負部分の単調性を適用
 Proposition 6.4 · pp. 44–45 Lemma 3.3 · p. 11

3 非零 nef 類なら正次元の半豊富底

$M|_F \neq 0 \implies \hat{F} \xrightarrow{g} Q$, $\dim Q > 0$
 検出された i の flat 差を Q へ降ろすと、big な底の線は big のまま。

有効固定部分で切断を持ち上げる ; 正の current を底へ降ろす
 Corollary 6.5 · p. 45 Proposition 3.1; Corollary 3.2 · pp. 8–10

4 飯高次元の矛盾から数値降下へ

$\kappa(F, J_F + M_i^*|_F) > 0$ is impossible; $c_1(M|_F) = 0$
 $p^*M \equiv (h')^*N$, N a nef rational line on W'

可算個の全体上の捻りからfiberwise消滅と数値降下へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 全体上の可算個の捻りを先に固定する

通常nonvanishingで $J \sim_{\mathbb{Q}} E \geq 0$ を固定する。相対因子cycleの可算個の成分から、ファイバーの半豊富写像を検出する全体上の可算個の写像 $f_i : X_i \rightarrow Z_i$ を作る。 $p_i^* M$ が一般 f_i ファイバーで数値自明な添字に対し、数値降下と Pic^0 の双有理不変性で、全体 T 上の $M_i^* \equiv M$ を一つずつ固定する。その引戻しは底からの実際の有理直線束の引戻しとなる。

その後に w を選ぶ。Lemma 6.1 を可算個の $J + M_i^*$ に同時適用すると、 $F = T_w$ 上で $\kappa(F, (J + M_i^*)|_F) \leq 0$ が全 i について成り立つ。これはcoherent base changeと射影底でのample捻りによりファイバー切断を全体へ持ち上げ、その比が代数還元に反することから従う。

Lemmas 6.1–6.3 · pp. 40–43

Proposition 3.1; Corollary 3.2 · pp. 8–10

2. 正次元の半豊富底が与える矛盾

$M|_F \not\equiv 0$ と仮定する。帰納的分解と負部分の単調性により

$$\rho^*(J_F + M|_F) \equiv P_F + R_F, \quad P_F \equiv (\rho^* E_F - R_F) + \rho^*(M|_F).$$

右辺の有効類とnef類をKähler冪と積分すると、 P_F の写像 $g : \hat{F} \rightarrow Q$ は $\dim Q > 0$ を持つ。その一般ファイバーで M は数値自明となり、cycleによる検出で既に選んだ i に対応する。 M_i^* の有理自明性を用いると、残るflat差はLemma 3.3により Q の解消上へ降りる。底のbigな直線束はflat捻り後もbigなので

$$\kappa(F, J_F + M_i^*|_F) > 0$$

となり前段に矛盾する。局所系 $R^2 h_* \mathbb{R}$ の局所定数性で一般の滑らかなファイバー上の消滅を得る。

Proposition 6.4 · pp. 44–45

Lemma 3.3 · p. 11

3. 正のcurrentを降ろし、有理nef直線束を回復する

Corollary 6.5はこの消滅をProposition 3.1へ入力する。平坦化後、正のcurrentの垂直成分と混合成分が消え、滑らかな部分で底のcurrentになる。残る垂直因子はファイバー成分の交点行列と例外的負性で除く。引戻し $H^2(W', \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(T', \mathbb{Q})$ の単射性が降下類の有理性を与え、Lefschetz $(1, 1)$ と射影底の曲線判定でnef有理直線束 N を得る。この段階の結論は $p^* M \equiv (h')^* N$ であり、元の M の線形降下ではない。

Proposition 3.1; Corollary 3.2 · pp. 8–10

Corollary 6.5 · p. 45

5. Proposition 4.1 の証明 — periodの階数から通常klt随伴を作る

証明対象：Proposition 4.1 · p. 11

Proposition 4.1 — 射影底の随伴表示

(Y, D) を正規コンパクト Kähler 空間上の有効有理 klt 対、 $f: Y \rightarrow Z$ を正規射影多様体への連結ファイバーを持つ全射射とし、 $\dim Y > \dim Z$ と仮定する。 Z 上の有理 Cartier 直線束 H が $K_Y + D \sim_{\mathbb{Q}} f^*H$ を満たすなら、有効有理因子 D_Z が存在し、 (Z, D_Z) は klt で $H \sim_{\mathbb{Q}} K_Z + D_Z$ となる。

Proposition 4.1 · p. 11

1 実際の随伴引戻しと moduli line

$$K_Y + D \sim_{\mathbb{Q}} f^*H, \quad L_S = b^*H - K_S - \Delta_S$$

有効 klt 全空間の根被覆：最高 Hodge 固有直線束の parabolic 延長。

整格子を保つ period 商と、境界を含む有理直線束の降下
[\[OpenAI26O, Lemma 4.1; Lemma 4.3; Proposition 4.5, pp. 21–26\]](#)
[Lemmas 4.3–4.4 · pp. 13–15](#)

2 実偏極の period 入力

$$L_{S'} \sim_{\mathbb{Q}} p^*P, \quad P \text{ nef on projective } Q$$

$$\nu(L_{S'}) = \text{rank}(d\Phi_{\text{line}}), \quad \dim Q \leq \text{rank}(d\Phi)$$

有効境界の極評価により、line の核のベクトル場は正則に持ち上がる
[Lemma 4.5 · pp. 15–16](#)

3 line period と full period の階数を一致させる

$$r = \nu(P) \leq \dim Q \leq \text{rank}(d\Phi) = r$$

$$\dim Q > 0 \text{ なら } P \text{ は big ; 点の場合 } L_{S'} \sim_{\mathbb{Q}} 0。$$

Kodaira 分解と Bertini ; 元の有効境界が閾値 ≤ 1 を保証
[Section 4.4 · pp. 16–17](#)

4 moduli line を小係数の有効境界に置換

$$E_S \sim_{\mathbb{Q}} L_S, \quad (S, \Delta_S + E_S) \text{ sub-klt}$$

$$D_Z = b_*(\Delta_S + E_S) \geq 0, \quad H \sim_{\mathbb{Q}} K_Z + D_Z, \quad (Z, D_Z) \text{ klt}$$

Hodge lineの階数とperiod商による有効klt境界の構成

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. Discriminantと最高Hodge固有直線束

底の解消 $b: S \rightarrow Z$ 上で log canonical threshold から Δ_S を作り、 $L_S = b^*H - K_S - \Delta_S$ と置く。相対 pluriform の根被覆が最高Hodge固有直線束を与え、その parabolic 延長を L_S と同定する。 Y は射影的でなくてもよい。実偏極は有理とは限らないが、ambient cohomology の整格子を保持して period 入力 を適用する。crepant 解消上の境界には負係数があり得る一方、元の $D \geq 0$ は次段で必要になる。

Lemmas 4.3–4.4 · pp. 13–15

[OpenAI26O, Lemma 4.1; Lemma 4.3; Proposition 4.5, pp. 21–26]

2. 固有直線束のperiodが全periodを検出する

固有直線束の period 微分の核にある底のベクトル場を、最高形式との縮約で根被覆上の有理型ベクトル場へ持ち上げる。根群で平均し、元の有効境界に由来する厳密な極次数上界を使うと、降下した場合は正則で境界に接する。その flow を functorial 解消・根被覆へ持ち上げ、族全体の Kodaira–Spencer class も消えることを示す。従って line period と full period の核・階数が一致する。

period 商 $p: S' \rightarrow Q$ への実際の直線束降下 $L_{S'} \sim_{\mathbb{Q}} p^*P$ と合わせると

$$r = \nu(L_{S'}) = \nu(P) \leq \dim Q \leq \text{rank}(d\Phi) = r.$$

$\dim Q > 0$ なら P は nef and big、 Q が点なら $L_{S'}$ は有理自明となる。

Lemma 4.5 · pp. 15–16

Lemma 4.2 · p. 12

3. Bigなmoduli lineを有効境界へ置き換える

$P \sim_{\mathbb{Q}} A + E$ とし、小さい $\varepsilon > 0$ に対して $P \sim_{\mathbb{Q}} A_\varepsilon + \varepsilon E$ 、 A_ε ample とする。十分高い自由系の一般元を小係数で取れば、 $E_S \geq 0$ 、 $E_S \sim_{\mathbb{Q}} L_S$ 、 $(S, \Delta_S + E_S)$ sub-klt となる。点の場合は $E_S = 0$ とする。元の底の素因子に対する閾値は $D \geq 0$ により ≤ 1 なので、押し下げた $D_Z = b_*(\Delta_S + E_S)$ は有効である。

有理関数による主因子等式を押し下げ、 $H \sim_{\mathbb{Q}} K_Z + D_Z$ を得る。その引戻しを上等の式と比べると crepant 同一式となり、sub-klt 性から (Z, D_Z) の klt 性が従う。単なる数値的 canonical bundle formula では、ここで必要な線形同値は得られない。

Section 4.4 · pp. 16–17

6. Theorem 1.1 の証明 — flat部分を変えて元の空間へ戻す

証明対象：Theorem 1.1 · p. 2 主要結果を参照する。

1 強化定理を nef 随伴へ適用

$$D = K_X + B + M \text{ nef}, \quad \mu^*D \equiv P + R, \quad P \text{ semiample} \\ R = N(\mu^*D)$$

nef 類の負部分は 0 ; Chern 類 0 の有理直線束を同定
[Theorem 1.2 · p. 3](#) [Lemma 2.2 · p. 6](#)

2 負部分は 0、差は flat

$$R = 0, \quad P - \mu^*D \in \text{Pic}^0(U) \otimes \mathbb{Q}$$

smooth modification で Picard torus は不変
[Lemma 2.1 · p. 5](#)

3 元の空間上で flat 部分を変更

$$P - \mu^*D \sim_{\mathbb{Q}} \mu^*F, \quad F \in \text{Pic}^0(X) \otimes \mathbb{Q} \\ L = D + F, \quad \mu^*L \sim_{\mathbb{Q}} P$$

$\mu_*\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X$ と射影公式で生成性を降ろす
[Section 7.4 · p. 49](#)

4 半豊富な代表を降ろす

$$L \text{ semiample on } X, \quad c_1(L) = c_1(D) \\ F \text{ の torsion 性や元の } D \text{ の半豊富性は結論に含めない。}$$

負部分の消滅とPicard torusを用いた半豊富代表の降下

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. Nef性が負部分を消す

Theorem 1.2を D へ適用する。 μ^*D も nefなので $R = N(\mu^*D) = 0$ となり、半豊富な P と μ^*D の差は実 Chern類0の有理直線束である。

[Theorem 1.2 · p. 3](#)

[Lemma 2.2 · p. 6](#)

2. 変更するのはflat部分である

Lemma 2.1は、この差が $\text{Pic}^0(U) \otimes \mathbb{Q}$ に属し、smooth modificationで $\text{Pic}^0(X) \simeq \text{Pic}^0(U)$ となることを使う。従って $F \in \text{Pic}^0(X) \otimes \mathbb{Q}$ を選んで

$$P - \mu^*D \sim_{\mathbb{Q}} \mu^*F, \quad L = D + F, \quad \mu^*L \sim_{\mathbb{Q}} P$$

とできる。 $\mu_*\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X$ と射影公式により生成性が L へ降りる。 $c_1(L) = c_1(D)$ だが、 F がtorsionであるとは示していない。楕円曲線上の非torsion degree-zero直線束は、元の D の半豊富性を結論にできない理由を既に示している。

[Lemma 2.1 · p. 5](#)

[Section 7.4 · p. 49](#)

7. どの論文が、どの段階を担うか

供給元と結果

[\[OpenAI26b, Proposition 8.1, p. 30\]](#)

利用箇所

Proposition 2.5、帰納の完結

使用内容・必要な仮定

射影的な通常klt対、pseudo-effectiveな通常随伴、元のモデル上のnef項から数値的半豊富正部分

確認範囲

原典の記述と適用を照合

供給元と結果

[\[OpenAI26b, Theorem 2.3, p. 4\]](#)

利用箇所

Proposition 2.5

使用内容・必要な仮定

固定nef b-dataを持つ一般化kltプログラムのnef終点と例外比較

確認範囲

記述照合。任意のflip列の停止ではない

供給元と結果

[OpenAI26K, Definition 2.1; Theorem 2.13, pp. 6, 13], [OpenAI26K, Proposition 3.8, pp. 23–24]

利用箇所

Theorem 2.3、Proposition 2.4、通常プログラム

使用内容・必要な仮定

線形同値による分解、既知の負部分を消す通常プログラム

確認範囲

10月6日版の仮定・記述と使用箇所を照合。既存034記事の10月4日版とは区別

供給元と結果

[OpenAI26O, Corollary 6.2, pp. 40–41]

利用箇所

Theorem 2.3

使用内容・必要な仮定

Kähler abundanceのAssumption 1.1を満たす対数劣加法性

確認範囲

支持条件・境界・ファイバーの仮定を照合

供給元と結果

[OpenAI26O, Lemma 4.1; Lemma 4.3; Proposition 4.5, pp. 21–26]

利用箇所

Lemma 4.2、射影底

使用内容・必要な仮定

実偏極とambient整格子、parabolic最高直線束、実際の有理直線束降下

確認範囲

記述・使用箇所を照合。外部の全構成は未検証

供給元と結果

[MWWZ, Corollary 1.4, p. 6]

利用箇所

Lemma 5.3、代数次元0

使用内容・必要な仮定

通常klt Calabi–Yau型、nef b-part 0で積分解

確認範囲

入力の設定と特殊化を照合

供給元と結果

[HX, Theorem 1.3, p. 2]

利用箇所

Proposition 7.2

使用内容・必要な仮定

nef b-part 0、長さ $\leq 2n$ とCartier整数性

確認範囲

記述と次数不等式を照合

8. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.2 · p. 3 — 同時帰納の二つの結論と、数値同値の意味。
- Proposition 5.6 · pp. 21–22 — 余接束の傾き仮定から有理型切断を作る核心。
- Proposition 6.4 · pp. 44–45 — 全体上のflat捻りを先に固定する順序。
- Proposition 4.1 · p. 11 — 射影底の通常klt随伴を得るための仮定。
- Section 7.3 · pp. 48–49 — 射影入力の引戻しと負部分の同定。
- Section 7.4 · p. 49 — 元の空間への半豊富な代表の降下。

主要結果の全結論、通常分解・射影入力の仮定、数値降下、可算個のflat捻りを先に固定する手順、periodの階数比較、最終の負部分と半豊富代表の降下を読んだ。直接入力として上表の指定版の記述と適用箇所を照合した。これは著者の証明経路の読解であり、全証明の独立検証ではない。

Proposition 5.6の中間の直像評価・行列式計算 (pp. 23–36) は全体を点検していない。根被覆の延長、periodの有理因子構成と全モデル上の整合性、Campana・Ou・cycle space・混合Hodge–Riemann・currentの支持／負性に関する補助外部結果のすべての原記述も未照合である。未記録のカタログ間関係は未調査であり、依存なしとはしない。

Numerical Semiampleness of Nef Adjoint Divisors

最大nef次元のbig性を、正部分の帰納法と数値的下降へつなぐ

原稿は、通常のklt対にnef因子を加えた随伴について、同じ多様体上の半豊富な数値的代表の存在を主張する。核心は、最大nef次元を持つCalabi-Yau対上のnef因子のbig性である。moving jetsとFrobenius比較でこの入力を作り、nef reductionと正部分の帰納法を経由して結論を得る。

原稿の著者: OpenAI · October 3, 2026 · 37 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — nef随伴の数値的半豊富性

k を標数0の代数閉体、 (X, B) を射影klt $\mathbb{Q}$ 対とする。 $T = K_X + B$ がpseudo-effectiveで、 M が X 自身の上のnef $\mathbb{Q}$ -Cartier因子であると仮定する。 $D = T + M$ がnefなら、同じ X 上に半豊富な $\mathbb{Q}$ -Cartier因子 L が存在し、

$$D \equiv L$$

となる。ここで B は有効有理境界であり、 $K_X + B$ は $\mathbb{Q}$ -Cartierである。

[Theorem 1.1 · p. 1](#)

Corollary 1.2 — klt Calabi-Yau対上のnef因子

標数0の代数閉体上の射影klt $\mathbb{Q}$ 対 (X, B) について $K_X + B \equiv 0$ なら、 X 上の任意のnef $\mathbb{Q}$ -Cartier因子は数値的に半豊富である。

[Corollary 1.2 · p. 2](#)

結論は $D \sim_{\mathbb{Q}} L$ でも、 D 自身の半豊富性でもない。例えば楕円曲線上の非torsionな次数0の線束は数値的には零であり、正冪に切断を持たない。通常のと、後のMMPで使う generalized pairの仮定も分ける。MMP中のnef成分は最初の M が定める固定b-divisorであり、その各モデル上のtraceまでnefとは限らない。

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Numerical Semiampleness of Nef Adjoint Divisors](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [OpenAI26LA](#) OpenAI — Log abundance in characteristic zero : 通常lc対のlog abundance、moving kernel、有限データFrobenius比較。September 24, 2026; fixed commit 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a。
- [OpenAI26c](#) OpenAI — Minimal models and Mori fibre spaces for generalized log canonical $\mathbb{Q}$ -pairs : 固定したnef b-divisorを保つ停止するMMPの選択。September 24, 2026。
- [LP18](#) Vladimir Lazić; Thomas Peternell — On Generalised Abundance, I : 正部分の比較、nef因子の底への数値的下降、元の多様体への下降。arXiv:1808.00438v2, 6 September 2018。
- [BZ15](#) Caucher Birkar; De-Qi Zhang — Effectivity of Iitaka fibrations and pluricanonical systems of polarized pairs : Cartier指数1・被約境界の一致双有理性から曲線次数を抑える。arXiv:1410.0938v2, 24 December 2015。
- [Amb03](#) Florin Ambro — The moduli b-divisor of an lc-trivial fibration : 通常klt随伴の $\mathbb{Q}$ 線形引戻しを、底の有効klt境界へ置き換える。arXiv:math/0308143v1, 14 August 2003。
- [HX11](#) Christopher D. Hacon; Chenyang Xu — Existence of log canonical closures : 相対有限生成と非常に一般のファイバーのgood modelから相対good modelを得る。arXiv:1105.1169v3, stamp 28 June 2012; manuscript date July 24, 2020。
- [Fuj09b](#) Osamu Fujino — Birkar–Cascini–Hacon–McKernan : 有理klt対の相対log canonical ringの有限生成。Author notes, version 1.02, 28 November 2009。
- [CP15](#) Frédéric Campana; Mihai Păun — Orbifold generic semi-positivity: an application to families of canonically polarized manifolds : 滑らかな解消のpseudo-effective K から余接束のgeneric semipositivity。Ann. Inst. Fourier 65 (2015), 835–861; published PDF。
- [BDPP13](#) Sébastien Boucksom; Jean-Pierre Demailly; Mihai Păun; Thomas Peternell — The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension : 非pseudo-effective因子を一つのstrongly movable curveで分離する。arXiv:math/0405285v1。
- [BCHM10](#) Caucher Birkar; Paolo Cascini; Christopher D. Hacon; James McKernan — Existence of minimal models for varieties of log general type : canonicalな指数1被覆のcrepant $\mathbb{Q}$ -factorial terminalization。arXiv:math/0610203v2, 14 August 2008; PDF compilation date 26 November 2024。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 二つの帰納命題と元の多様体への下降

証明対象：Theorem 1.1 · p. 1 主張を参照する。

証明の道筋。複素数体上で二つの命題を同時に帰納する。 (P_n) は、ある $a \in \mathbb{Q}_{>0}$ について $T + aM$ が非常に一般の点を通るすべての整曲線と正に交わるとき、すべての $c \in \mathbb{Q}_{>0}$ について $T + cM$ がbigという命題である。 (Z_n) はこの正值条件を課さず、滑らかな双有理モデル上の $P_\sigma(w^*(T + M))$ が有理かつ数値的に半豊富となるという命題である。詳細はterminalの場合、境界を含む場合、正部分で説明する。元の D のnef性を最後に使って正部分と全体を一致させる。

通常 klt 対と二つの帰納命題

$T = K_X + B \in \overline{\text{Eff}}(X)$, M nef, $D = T + M$ nef.

(P_n) : 非常に一般の曲線上の正值性から big 性.

(Z_n) : 滑らかなモデル上で正部分を数値的に半豊富にする.

停止する MMP と普通の log abundance を入力し、nef reduction で次元を下げる

[OpenAI26c, Theorem 1.1; §3.3, pp. 2, 14–15]

[OpenAI26LA, Theorem 1.1, p. 2]; Proposition 8.1 · p. 30

帰納の二つの出力

$(P_n) \implies (Z_n)$: $P_\sigma(w^*D) \equiv A_W$, A_W semiample.

最大 nef 次元の核心は Theorem 5.1、境界を戻すのは Proposition 7.1。

D の nef 性と klt の rational singularities から Picard 捻りを下降

Lemma 8.4 · p. 35; [LP18, Lemma 2.14, p. 12]

元の多様体への数値的下降

$P_\sigma(w^*D) = w^*D \equiv A_W \implies D \equiv L_X$.

L_X は同じ X 上の半豊富な $\mathbb{Q}$ -Cartier 因子。

固定した倍数の大域生成性を Picard 族の constructible locus で下降

Lemma 8.5; §8.7 · pp. 35–36

任意の標数 0 の代数閉体

$\mathbb{C} \rightsquigarrow k_0 \rightsquigarrow k$, $D_k \equiv L_k$ semiample.

二つの帰納命題から元の多様体上の数値的半豊富性へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 普通の半豊富随伴を保ったまま一般化随伴をnefにする

まず通常の T -MMPの停止する選択を取り、その終点の通常随伴 U_0 をlog abundanceで半豊富にする。次に十分小さい $s_0 > 0$ に対する $U_0 + s_0 N_0$ -MMPを選ぶ。 dU_0 をfree Cartierとすると、負の極端半直線の長さの評価と $U_i \cdot C \geq 1/d$ の離散性により、この第二のMMPは U_i に関して自明になる。従って普通の半豊富性を壊さず、一般化随伴をnefにできる。

共通解消上の二つの有効例外差は、非常に一般の曲線上の正值性を終点へ運ぶ。 $\kappa(T) > 0$ なら普通の半豊富随伴のファイバーで低次元の (P_j) を使う。 $\kappa(T) = 0$ なら $U \sim_{\mathbb{Q}} 0$ となり、Calabi–Yau対上の最大 nef次元の場合へ帰着する。使うMMP入力は停止する選択の存在であり、任意のflip列の停止を要求していない。

Lemma 3.2 · pp. 6–7

Propositions 3.3–3.4 · p. 8

[OpenAI26c, Theorem 1.1; §3.3, pp. 2, 14–15]

[OpenAI26LA, Theorem 1.1, p. 2]

2. 正部分を数値的に半豊富にし、元の X へ戻す

(P_n) と低次元の (Z_j) からProposition 8.1を得る。主定理の D はnefなので、任意の滑らかな双有理モデルについて $P_\sigma(w^*D) = w^*D$ である。そこで半豊富な $A_W \equiv w^*D$ を取る。分母とnumerically trivialな線束の離散部分のtorsionを消すと、

$$\mathcal{O}_W(rA_W) \simeq w^*\mathcal{O}_X(rD) \otimes P_W, \quad P_W \in \text{Pic}^0(W).$$

klt特異点はrational singularitiesなので、 $\text{Pic}^0(X) \simeq \text{Pic}^0(W)$ により $P_W = w^*P_X$ となる。右辺は X 上の線束の引戻しであり、 $w_*\mathcal{O}_W = \mathcal{O}_X$ と射影公式で大域生成性を下降させる。得られる因子は rD を P_X で捻ったものなので、ここでも保証されるのは数値同値である。

Proposition 8.1 · p. 30

Lemma 8.4 · p. 35

[LP18, Lemma 2.14, p. 12]

3. 任意の標数0の代数閉体へ移す

多様体・境界・Cartierデータを有限生成体へ下降し、その代数閉包 k_0 を $\mathbb{C}$ へ埋め込む。複素数上の結論から、ある整数 $r > 0$ と $P \in \text{Pic}^0(X_{\mathbb{C}})$ について $\mathcal{O}(rD) \otimes P$ が大域生成となる。Picard多様体上のPoincaré族を用いると、固定した r に対する大域生成性のパラメータ集合はconstructibleである。その非空性は代数閉体拡大で反映されるため、 k_0 上の点を取り、元の k へ拡大できる。非常に一般の点を使う議論自体を任意の基礎体へ移す必要はない。

Lemma 8.5; §8.7 · pp. 35–36

3. Theorem 5.1 の証明 — 小さいscalar jetsと大きい二変数jets

証明対象：Theorem 5.1 · p. 13

Theorem 5.1 — terminalで標準束が自明な場合

$n \geq 2$ とし、 $j < n$ の (P_j) を仮定する。 X を次元 n の射影 $\mathbb{Q}$ -factorial terminal複素多様体とし、 $K_X \sim 0$ とする。 L がnef Cartier因子で $n(X, L) = n$ なら、 L はbigである。

Theorem 5.1 · p. 13

非 big と仮定して規格化

$$K_X \sim 0, \quad L \text{ nef Cartier}, \quad n(X, L) = n, \quad L^n = 0.$$

$$P = r(L + tA), \quad r \rightarrow \infty, \quad P^n \rightarrow \epsilon^n, \quad P \cdot C \geq r.$$

一様双有理性と moving kernels : 次数有界の曲線で基底成分を排除
[\[BZ15, Theorem 1.3, p. 3\]; Lemma 4.1 · pp. 9–10](#)
[Lemma 5.2 · p. 14; Proposition 5.3 · p. 15](#)

二つの jet 評価を作る

$$\text{ord}_x(s) \leq 4k(P^n)^{1/n} \quad (s \in H^0(X, kP), \quad s \neq 0).$$

$$R = P_1 + P_2 + q\xi \text{ on } Z = \mathbb{P}(\mathcal{O}(L)_1 \oplus \mathcal{O}(L)_2), \quad \varepsilon(R; z) > 2n + 2.$$

scalar 評価を可動曲線の上界に、Seshadri 評価を jet 切断に変換
[§6.7 · pp. 27–28; \[BDPP13, Theorem 2.2, p. 6\]](#)

複素数上で有限データを固定

$$D = w^*P, \quad S = w^*L, \quad H = w^*P + \eta A_W.$$

余接束の flag、有限個の大きい jets、一つの可動曲線 γ 。

$$\pi_x^*(D + K_W/2 + \lambda S) \cdot \gamma < 40\epsilon J \cdot \gamma \quad (0 \leq \lambda \leq q).$$

固定データを正標数へ移し、rank と消滅次数を比較
[Theorem 6.1 · pp. 20–21; \[OpenAI26LA, Theorem 9.1, p. 62\]](#)

比較定理の矛盾から big 性

同じ Frobenius 行列式の消滅次数に両立しない上下界。
 L is big.

最大nef次元の非big因子から矛盾する二つのjet条件を作る

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 正の整数次数を、一様に有界な曲線次数と衝突させる

L がbigでないと仮定し、ample Cartier因子 A を固定する。 $t \downarrow 0$ に対し

$$P = r(L + tA), \quad r \longrightarrow \infty, \quad P^n \longrightarrow \epsilon^n$$

と規格化する。非常に一般の点を通る曲線は $L \cdot C \geq 1$ を満たすので $P \cdot C \geq r$ となる。他方、Lemma 4.1は、nef testing classの体積と随伴交点比が有界な状況で、一様に有界な次数の曲線を作る。ここでBirkar–Zhangの入力に渡す境界は被約SNC、nef因子はCartier指数1、随伴はbigである。低次元で必要なbig性は (P_j) が供給する。

Lemma 4.1 · pp. 9–10

[BZ15, Theorem 1.3, p. 3]

2. moving kernelの基底成分を排除して二つの評価を得る

scalar側では、消滅次数が大きすぎる切断からmoving base componentを作り、その体積・標準交点評価をLemma 4.1へ渡す。これにより非常に一般の x で $0 \neq s \in H^0(X, kP)$ に対し $\text{ord}_x(s) \leq 4k(P^n)^{1/n}$ を得る。

二変数側では

$$Z = \mathbb{P}(\mathcal{O}_X(L)_1 \oplus \mathcal{O}_X(L)_2) \longrightarrow X \times X, \quad R = P_1 + P_2 + q\xi$$

を使う。 q を先に固定し、 t を小さくする。sliceの正次元ファイバー、低次元成分、動く分岐因子を順に排除し、最後に両因子へ支配的な有限対応を扱う。分岐因子が動かないことから、固定した t ごとに有限個のStein被覆へ帰着する。固定被覆間の支配的な双有理グラフ族をアーベル多様体の双有理モデルへ移して、最後もbounded-degree曲線と矛盾させる。こうして二つのaxisの外に $\varepsilon(R; z) > 2n + 2$ を満たす点ができる。有限被覆のリスト自体が t に一様とは主張していない。

Lemma 5.2 · p. 14

Proposition 5.3 · p. 15

§§5.4–5.6 · pp. 16–20

[OpenAI26LA, Lemmas 7.1–7.5, pp. 45–52]

3. 全データを複素数上で固定してからFrobenius比較を使う

解消 $w : W \rightarrow X$ 上で $D = w^*P$ 、 $S = w^*L$ と置き、 w^*P を小さく ample 摂動して H を作る。 K_W の pseudo-effectivity から余接束の generic semipositivity を得て、比較に必要な flag を取る。二変数側の Seshadri 評価は有限個の切断による $(2n + 2)k_0$ 次 jets へ変換する。一方 scalar 評価は点の blowup 上で $\pi_x^*(2D + E) - 40\epsilon J$ が pseudo-effective でないことを意味する。可動曲線との双対性により、固定した一つの strongly movable curve が比較定理の全 weight 不等式を与える。

Theorem 6.1 は、これらの固定データが共存できないことを、Frobenius evaluation の行列式の消滅次数の上下評価で示す。従って非bigの仮定が矛盾する。原稿は比較定理を再証明しているが、この概説の照合対象は定理の記述と §6.7 での適用である。§§6.2–6.6 の全slope・行列式計算、§5.6 で使う Hanamura/Blanc の外部原典、flag への制限定理は独立に検証していない。

§6.7 · pp. 27–28

[CP15, Theorem 2.1, 誌面 p. 844 / PDF p. 11]

[BDPP13, Theorem 2.2, p. 6]

[OpenAI26LA, Theorem 9.1, p. 62]

4. Proposition 7.1 の証明 — Calabi–Yau対に境界を戻す

証明対象：Proposition 7.1 · p. 28

Proposition 7.1 — 全nef次元の帰納命題

$n \geq 2$ とし、 $j < n$ の (P_j) およびTheorems 2.2–2.3のlog abundanceと停止するMMPの入力を仮定する。 (X, B) を次元 n の射影klt $\mathbb{Q}$ 対（基礎体 $\mathbb{C}$ ）、 M を X 上のnef $\mathbb{Q}$ -Cartier因子とする。 $T = K_X + B$ がpseudo-effectiveで、ある $a \in \mathbb{Q}_{>0}$ について、非常に一般の点を通るすべての整曲線 C が $(T + aM) \cdot C > 0$ を満たすなら、すべての $c \in \mathbb{Q}_{>0}$ について $T + cM$ はbigである。

Proposition 7.1 · p. 28

普通随伴の飯高次元で帰着

$$T = K_X + B, \quad (T + aM) \cdot C > 0.$$

$\kappa(T) > 0$: 低次元ファイバーで帰納; $\kappa(T) = 0$: $K_Y + B_Y \sim_{\mathbb{Q}} 0$.

二つの MMP で普通の半豊富随伴を保存し、残る場合を処理
Propositions 3.3–3.4 · p. 8; Theorem 5.1 · p. 13

[BCHM10, Corollary 1.4.3, p. 10]

境界零の Calabi–Yau 対

$$K_X \equiv 0 \implies K_X \sim_{\mathbb{Q}} 0 \implies K_{\tilde{X}} \sim 0.$$

指数 1 被覆と crepant terminalization で Theorem 5.1 を使う。

M big.

正の飯高次元、または終点で境界が消える場合に分けて有効 G を得る
§7 · pp. 29–30

境界を摂動して通常 klt 随伴を作る

$$T_* = K_X + (1 + \alpha)B \sim_{\mathbb{Q}} \alpha B, \quad T_* + M \text{ big.}$$

$$G \sim_{\mathbb{Q}} \alpha B + M, \quad \Delta_u = (1 - u\alpha)B + uG, \quad K_X + \Delta_u \sim_{\mathbb{Q}} uM.$$

nef な通常 klt 随伴に abundance を適用し、正の線形結合で戻す
[OpenAI26LA, Theorem 1.1, p. 2]; Proposition 7.1 · p. 28

半豊富性から full-nef 次元の帰納を閉じる

$$M \text{ semiample}, \quad n(X, M) = n \implies M \text{ big.}$$

$$T + cM \text{ big for every } c \in \mathbb{Q}_{>0}.$$

指数1被覆と境界摂動によってfull-nef次元の帰納を閉じる

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 境界零の場合をTheorem 5.1へ移す

主定理の全体の帰着により、 $K_X + B \equiv 0$ かつ M が最大nef次元を持つ場合に集中できる。 $B = 0$ なら log abundanceによって $K_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$ となる。指数1被覆はkltかつcanonicalであり、crepant terminalization後には $K \sim 0$ でterminalかつ $\mathbb{Q}$ -factorialとなる。引戻した M のCartier倍にTheorem 5.1を適用し、generically finiteな引戻しで検出できるbig性を下降させる。

[BCHM10, Corollary 1.4.3, p. 10]

2. 境界を少し増やし、M自身を通常の随伴にする

$B \neq 0$ では $T_* := K_X + (1 + \alpha)B \sim_{\mathbb{Q}} \alpha B$ を考える。 $\kappa(T_*) > 0$ ならProposition 3.3、零なら二段階MMPの終点で $B_Y = 0$ となることと直前の境界零の場合から、 $T_* + M$ がbigになる。ここでまだProposition 7.1自身を使っていない点が帰納の要所である。

有効な $G \sim_{\mathbb{Q}} \alpha B + M$ を取り、十分小さい有理数 $u > 0$ について

$$\Delta_u = (1 - u\alpha)B + uG \geq 0, \quad K_X + \Delta_u \sim_{\mathbb{Q}} uM$$

とする。 (X, Δ_u) は通常のklt対である。この随伴はnefなのでlog abundanceが適用でき、今度は M 自身が半豊富になる。最大nef次元からその射はgenerically finiteとなり、 M はbigである。最後に Proposition 3.4の正の線形結合の議論が、任意の $c > 0$ に対する $T + cM$ のbig性を返す。この途中の強い結論は、この帰着で構成した通常随伴の状況に限られる。

§7 · pp. 29–30

[OpenAI26LA, Theorem 1.1, p. 2]

5. Proposition 8.1 の証明 — nef reduction と正部分の下降

証明対象：Proposition 8.1 · p. 30

Proposition 8.1 — 正部分の有理性と数値的半豊富性

(X, B) を $\mathbb{C}$ 上の射影klt $\mathbb{Q}$ 対、 $K_X + B$ をpseudo-effective、 M を X 上のnef $\mathbb{Q}$ -Cartier因子とする。このとき滑らかな射影多様体からの双有理射 $w : W \rightarrow X$ が存在し、

$$P_\sigma(w^*(K_X + B + M))$$

は有理因子であり、 W 上の半豊富な $\mathbb{Q}$ 因子に数値同値である。ここでは $K_X + B + M$ 自身のnef性を仮定していない。

Proposition 8.1 · p. 30

nef 因子に自明な MMP

$L = m_0 M$ Cartier, $m > 2n$, $T + mL$ nef at the endpoint.
 L の整数次数と半直線の長さが、各 step を L -自明にする。

終点で nef reduction を取り、通常の abundance をファイバーへ適用
[Lemma 8.3 · pp. 31–32](#); [§§8.3–8.4 · pp. 32–33](#)

nef dimension による二つの場合

$n(X, T + mL) = n : (P_n) \Rightarrow T + M \text{ big} \Rightarrow \text{通常の good model.}$
 $n(X, T + mL) < n : T|_F \equiv M|_F \equiv 0, \quad K_F + B_F \sim_{\mathbb{Q}} 0.$

低次元の場合：nef 下降、相対 good model、標準束公式を合成
[\[LP18, Lemma 3.1, p. 13\]](#); [\[Fuj09b, Theorem 1.4, p. 2\]](#)
[\[HX11, Theorem 2.12, p. 12\]](#); [\[Amb03, Theorem 0.2, p. 2\]](#)

低次元の通常随伴と nef 因子

$p^*M \equiv f^*M_1, \quad K_{X_2} + B_2 \sim_{\mathbb{Q}} g^*(K_{Z_2} + B_{Z_2}).$
 $(Z_{\dim Z_2}), \quad \dim Z_2 < n, \quad (Z_2, B_{Z_2}) \text{ klt.}$

nef な正部分の引戻し、有効例外差の除去、数値類の不変性
[Lemma 8.2 · p. 31](#); [\[LP18, Lemmas 2.4–2.5, pp. 7–8\]](#)

有理かつ数値的に半豊富な正部分

$P_{\sigma}(w^*(T + M)) \equiv A_W, \quad A_W \text{ semiample over a point.}$
full-nef の場合も低次元の場合も共通解消で元のモデルへ戻る。

full-nef次元と低次元nef reductionの二つの場合から正部分を得る

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. nef因子に自明なMMPで場合分けを準備する

$L = m_0 M$ をCartierにし、 $m > 2n$ を取る。 $(T + mL)$ -負の半直線で $L \cdot C > 0$ なら、整数性と通常の半直線長の評価により $(T + mL) \cdot C \geq m - 2n > 0$ となって矛盾する。従って選んだ停止するMMPは L -自明で、 T -負でもある。終点で $T + mL$ はnef、 M の変換もnefである。

これが最大nef次元なら (P_n) から $T + M$ がbigとなる。 $T + M \sim_{\mathbb{Q}} A + G$ を用いて、正の有理倍 $(1 + v)(T + M)$ を通常のbig klt随伴として表す。そのgood minimal model上の半豊富随伴の引戻しが正部分となる。

[Lemma 8.3 · pp. 31–32](#)

[§§8.3–8.4 · pp. 32–33](#)

2. 低次元の底上の通常随伴と nef 因子へ帰着する

nef dimension が小さい場合、nef reduction の非常に一般のコンパクトファイバー F では $T|_F$ が pseudo-effective、 $M|_F$ が nef で、 $(T + mL)|_F \equiv 0$ である。この符号により両者は数値的に零となり、通常の log abundance から $K_F + B|_F \sim_{\mathbb{Q}} 0$ を得る。

nef 因子の双有理下降により、解消後の $f: X_1 \rightarrow Z_1$ に対し $p^*M \equiv f^*M_1$ 、 M_1 nef となる。ここは数値同値である。 $K_{X_1} + B_1 = p^*T + E$ ($E \geq 0$ は p -例外的) とすると一般ファイバーの Iitaka 次元は零。相対 log canonical ring の有限生成と、非常に一般のファイバーの good minimal model を入力して相対 good model を作る。その semiample fibration $g: X_2 \rightarrow Z_2$ では

$$K_{X_2} + B_2 \sim_{\mathbb{Q}} g^*A_2, \quad \dim Z_2 = \dim Z_1 < n.$$

Ambro の結果をこの通常 klt 随伴の Q 線形同値に適用し、有効 klt 境界 B_{Z_2} を持つ $K_{Z_2} + B_{Z_2}$ へ置き換える。元の普通随伴の pseudo-effectivity と good model による切断を下降すると、底の随伴も pseudo-effective になる。従って底の $(Z_{\dim Z_2})$ が使える。

[LP18, Lemma 3.1, p. 13]

[Fuj09b, Theorem 1.4, p. 2]

[HX11, Theorem 2.12, p. 12]

[HX11, Corollary 2.9, p. 9]

[Amb03, Theorem 0.2, p. 2]

§8.5 · pp. 33–34

3. 正部分の比較で元のモデルに戻る

低次元で得た正部分は数値的に半豊富なので nef である。nef な正部分の引戻し公式、有効例外因子を足しても正部分が変わらないこと、正部分の有理性・数値的半豊富性が元の因子の数値類だけで決まることを順に使う。これにより数値的な M の下降と、Q 線形な通常随伴の式を同じ比較に入れられる。

X_2 上から相対 MMP を戻し、最後に p -例外的な E を除いて $w^*(T + M)$ の正部分を得る。これが (P_n) と低次元の (Z_j) から (Z_n) への帰納段階である。

Lemma 8.2 · p. 31

[LP18, Lemmas 2.4–2.5, pp. 7–8]

6. Corollary 1.2 の証明 — 数値的に零な普通随伴

証明対象：Corollary 1.2 · p. 2 主張を参照する。

数値的に零な通常随伴

(X, B) projective klt, $K_X + B \equiv 0$, M nef $\mathbb{Q}$ -Cartier.

↓
零の数値類は pseudo-effective、数値同値は nef 性を保つ
[Corollary 1.2 · p. 2](#)

主定理の仮定を満たす

$K_X + B \in \overline{\text{Eff}}(X)$, $D = K_X + B + M \equiv M$ nef.

↓
同じ多様体上の半豊富代表を取り、数値同値を合成
[Theorem 1.1 · p. 1](#)

M の半豊富な数値的代表

$D \equiv L$, L semiample on $X \implies M \equiv L$.

Calabi–Yau対上の任意のnef因子へ主定理を適用する

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 主定理の入力を確認する

$K_X + B \equiv 0$ なら普通随伴はpseudo-effectiveであり、任意のnef M に対して $D = K_X + B + M \equiv M$ もnefである。Theorem 1.1が与える半豊富因子 $L \equiv D$ は M にも数値同値となる。数値類を置き換えた結論であり、非torsionなnumerically trivial線束の切断を新たに作る主張ではない。

[Corollary 1.2 · p. 2](#)

7. どの論文が、どの段階を担うか

供給元

Log abundance in characteristic zero

利用箇所

Lemma 3.2、§7、§8

使用内容・適用条件

通常lc/klt随伴のnef性から実際の半豊富性。generalized nef traceには直接適用しない

確認範囲

Thm 1.1と本稿の適用を照合。供給原稿全証明は対象外

供給元

Minimal models and Mori fibre spaces for generalized log canonical $\mathbb{Q}$ -pairs

利用箇所

Theorem 2.3、Lemmas 3.2・8.3

使用内容・適用条件

固定した有理nef b -divisorを保つ停止する選択。入力が $\mathbb{Q}$ -factorial generalized kltの場合の維持も§3.3と照合

確認範囲

カタログ036内の直接入力

供給元

Birkar–Zhang、Log abundanceのmoving-kernel群

利用箇所

Lemma 4.1、§5

使用内容・適用条件

指数1・被約境界の双有理性と動く基底成分の交点評価

確認範囲

供給結果の記述と使用箇所を照合

供給元

Campana–Păun、BDPP

利用箇所

§6.7

使用内容・適用条件

余接束のgeneric semipositivity、非pseudo-effective因子の可動曲線による分離

確認範囲

記述・用途を照合。flag制限定理は外部原典未照合

供給元

Lazić–Peternell、Fujino、Hacon–Xu、Ambro

利用箇所

§8

使用内容・適用条件

nef因子の数値的下降、相対good model、通常kltの標準束公式、正部分の比較

確認範囲

記述・仮定・適用箇所を照合。外部証明の再検証は対象外

カタログ034のLog abundanceと036の一般化極小モデル論文は直接入力である。カタログ036のKähler論文・数値次元1論文との追加の依存関係は、この原稿の引用確認だけでは認定していない。

8. 原典を読む入口と確認範囲

- Lemma 3.2 · pp. 6–7 — 普通の半豊富随伴を保ちながら一般化随伴をnefにする二段階MMP。
- Theorem 5.1 · p. 13 — 最大nef次元からbig性を得る核心の開始点。
- Theorem 6.1 · pp. 20–21 — 固定した複素データの条件と、何を正標数へ移すか。
- §7 · pp. 29–30 — 指数1被覆と境界摂動を経て P_n を閉じる。
- Proposition 8.1 · p. 30 — 正部分の帰納法の主張と二つの場合。
- §8.5 · pp. 33–34 — 相対good model、標準束公式、低次元の正部分。
- Lemma 8.4 · p. 35 — 数値的代表を元の X へ戻す Pic^0 の操作。
- Lemma 8.5; §8.7 · pp. 35–36 — 代数閉体の変更に必要な有限型パラメータ論法。

主要二結果と各結論への接続、§§3–5の帰着・幾何学的排除、Theorem 6.1の記述と§6.7の適用、§§7–8の証明を読んだ。普通の対とgeneralized pair、数値同値とQ線形同値、元の多様体上の代表と双有理モデル上の正部分を区別して照合した。

未確認なのは、§§6.2–6.6のFrobenius比較の全計算、Hanamura/Blancの双有理群定理およびMehta–Ramanathan制限定理の外部原典との照合である。引用元各論文の証明を再帰的に検証しておらず、原稿全体の独立した正しさの認定や専門家査読を意味しない。

Minimal models and Mori fibre spaces for generalized log canonical $\mathbb{Q}$ -pairs

固定したnef b-divisor、局所的な指標の合同式、相対的弱Zariski分解

主張は、generalized lc $\mathbb{Q}$ -pairの随伴因子の符号に応じた極小モデルまたはMori fibre spaceの存在である。証明は、局所valuationの指標を制御して滑らかな場合のMMPを停止させ、相対的な弱Zariski分解を経由して既存のgeneralized MMPへ渡す。以下は著者の論証の概説であり、全79頁の独立検証ではない。

原稿の著者: OpenAI · September 24, 2026 · 79 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 固定したgeneralized nef dataを保つモデル

k を標数0の代数閉体、 $(X, B + M)$ を射影generalized lc $\mathbb{Q}$ -pairとする。すなわち、 X は正規整射影多様体、 B は有効な有理境界、 M は上方の射影双有理モデル上のnefな有理Cartier因子のtraceで、 $D = K_X + B + M$ は $\mathbb{Q}$ -Cartierとする。このnef b-divisorを固定する。

正規整射影多様体 Y と、逆写像が因子を縮約しない双有理写像 $\phi : X \dashrightarrow Y$ が存在する。

$B_Y = \phi_* B$ とし、 M_Y を同じnef b-divisorのtraceとすると、 $(Y, B_Y + M_Y)$ はgeneralized lcであり、共通関数体上のすべての素因子 E について

$$A_{X, B+M}(E) \leq A_{Y, B_Y+M_Y}(E).$$

X 上にあり ϕ で縮約される素因子では不等式は狭義である。さらに、

1. D が擬有効なら $K_Y + B_Y + M_Y$ はnefである。
2. D が擬有効でなければ、正規射影多様体 T への連結ファイバーをもつ射影縮約 $h : Y \rightarrow T$ が存在し、 $\dim T < \dim Y$ 、 $\rho(Y/T) = 1$ 、 $-(K_Y + B_Y + M_Y)$ は T 上ampleである。

X, Y の $\mathbb{Q}$ -factorial性は仮定しない。ここで A はlog discrepancyであり、境界係数 b の成分に対する値は $1 - b$ である。nefという結論をsemiampleまたはgood minimal modelと読み替えない。任意に選んだMMPの停止を主張する定理でもない。

Theorem 1.1 · p. 2

Corollary 1.2 — 通常のlc対

標数0の代数閉体上の射影lc $\mathbb{Q}$ -pair (X, B) には、因子を抽出しない双有理写像 $\phi : X \dashrightarrow Y$ があり、 $B_Y = \phi_* B$ に対して (Y, B_Y) はlc、すべての素因子で $A_{X,B} \leq A_{Y,B_Y}$ 、 X 上の縮約される素因子では狭義不等式となる。 $K_X + B$ が擬有効なら $K_Y + B_Y$ はnefであり、そうでなければ Y は相対Picard数1、相対反豊富な随伴因子をもつMori fibre contractionをもつ。

Corollary 1.2 · p. 2

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Minimal models and Mori fibre spaces for generalized log canonical \$\mathbb{Q}\$ -pairs](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [TX24](#) Nikolaos Tsakanikas; Lingyao Xie — Remarks on the existence of minimal models of log canonical generalized pairs : NQCの相対的弱Zariski分解から極小モデルへ移送し、元の X から停止するMMPを選ぶ。相対ample境界付きgood modelはPicard数の確認に使用。Mathematische Zeitschrift 307 (2024), Article 20; published 26 April 2024。
- [DEL00](#) Jean-Pierre Demailly; Lawrence Ein; Robert Lazarsfeld — A subadditivity property of multiplier ideals : asymptotic multiplier idealのtwistの大域生成とsubadditivity。Prépublication de l'Institut Fourier no. 494 (2000), author PDF, 19 pages; pagination differs from Michigan Math. J. publication。
- [Fuj09a](#) Osamu Fujino — Effective base point free theorem for log canonical pairs—Kollár type theorem : klt対のnef Cartier因子について次元だけによる大域生成倍数を固定する。Tohoku Mathematical Journal 61 (2009), 475–481, published version。
- [BDPP13](#) Sébastien Boucksom; Jean-Pierre Demailly; Mihai Păun; Thomas Peternell — The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension : 滑らかな射影被覆の非uniruled性からcanonical擬有効性を得る。arXiv:math/0405285v1, 14 May 2004; statement numbering checked in this version。
- [BCHM10](#) Caucher Birkar; Paolo Cascini; Christopher D. Hacon; James McKernan — Existence of minimal models for varieties of log general type : klt境界polytopeのample model有限性。外部証明は対象外。arXiv:math/0610203v2, archive label 14 August 2008; downloaded PDF title-page date November 26, 2024 retained。

- [OpenAI26LA](#) OpenAI — Log abundance in characteristic zero : 通常の対に限る主定理後の半豊富性。逆向きの利用はCorollary 12.1(i)の有限生成証明に限定して区別。September 24, 2026; fixed catalog commit 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a。
- [KM98](#) János Kollár; Shigefumi Mori — Birational geometry of algebraic varieties : 遅いflipの高次直像消滅に用いるrelative Kawamata–Viehweg vanishing。本稿内の適用は読んだが、書籍の該当記述は未照合。Cambridge Tracts in Mathematics 134 (1998); source passage not directly checked。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 — 主定理の証明概略

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · p. 2

証明の道筋。 主結果の各結論を、局所指標から滑らかなMMPの停止、相対化、generalized pairへの移送、discrepancyと終点の確認、基礎体の降下の順に追う。まず全体を示し、局所指標と停止の接続を次の図で拡大する。

1 局所指標から滑らかな停止へ

$A_{\theta_i}(w'_i) \leq C$, $w'_i(h) \equiv \ell \text{ angle}(\chi_h(\gamma_i)) \pmod{\mathbb{Z}}$
 整数値の制限と全 semi-invariant への合同式

可算性で canonical index を固定し、負の曲線と大域生成を衝突
[Proposition 3.2 · pp. 8–13](#) [Proposition 3.3 · pp. 13–14](#)

2 相対的な弱 Zariski 分解

$p^*K_X \equiv_{\mathbb{Z}} P + N$, P nef/NQC, $N \geq 0$
 smooth 入力を二重被覆・平均・有限 norm で相対化

擬有効側は帰納法で存在を移送。非擬有効側は直接 scaling へ
[\[TX24, Theorems 5.2, 5.4, p. 24\]](#) [\[TX24, Theorem 4.2, p. 22\]](#)

3 元の X から停止する generalized MMP

$(X, B + M) \dashrightarrow (Y, B_Y + M_Y)$
 同じ nef b-divisor を保持。 $\mathbb{Q}$ -factorial 性は不要

有効 exceptional 差で strictness と符号を確認。相対 ample 境界で Picard 数を確認
[Section 3.3, \(3.17\)–\(3.18\) · pp. 15–16](#) [\[TX24, Theorem 5.26, p. 32\]](#)
[Proposition 3.4 · pp. 16–17](#)

4 符号に応じた二つの終点

$D \in \overline{\text{Eff}}(X) \implies D_Y$ nef
 $D \notin \overline{\text{Eff}}(X) \implies h: Y \rightarrow T$, $\dim T < \dim Y$,
 $\rho(Y/T) = 1$, $-D_Y$ ample/ T
 連結ファイバー、抽出なし、全 log discrepancy 非減少
 元の X 上の縮約素因子では狭義。任意の代数閉標数 0 体へ降下

固定nef dataのまま極小モデルまたはMori fibre spaceへ至る全体図

図を拡大 ↗ [TeXソース](#) ↓

1. 局所指標を大域の停止へ渡す

局所入力Theorem 3.1は、固定次元 $n \geq 2$ のGorenstein klt germ (V_i, o_i) 、 o_i を固定する巡回群 G_i 、semi-invariantなcanonical generator θ_i と任意の $\gamma_i \in G_i$ に対して、部分列上で中心 o_i のdivisorial valuation w'_i 、 $C > 0$ 、正整数 ℓ を与える。 C, ℓ は部分列上で一定で、 $A_{\theta_i}(w'_i) \leq C$ 、かつすべての非零な有理semi-invariant h に対し

$$w'_i(h) \equiv \ell \text{ angle}(\chi_h(\gamma_i)) \pmod{\mathbb{Z}}.$$

特に不変関数体への制限は整数値である。valuationはprimitiveである必要はない。この入力構成では、coneの独立な次数 $d_1, \dots, d_n$ に対する $\text{vol}(v)d_1 \cdots d_n \leq C$ から有限windowの長さを制御する。valuationの最適化と正標数のlogarithmic Cartier選択によりtupleを完成させ、各指標を丸める。原稿はgermと有限個の検査データを固定してから標数を大きく取り、最終の共通整数を選ぶ前に有限回の数値予算を決定している。

Theorem 3.1 · p. 8 Proposition 5.1; Lemma 6.1; Section 8 · pp. 22, 29–30, 39–44

完成tupleに対する合同式だけでは不十分である。§8.3では、任意の正則固有関数 h に対して $h^j f^\alpha$ を有限windowへ入れる。関数の個数がwindowの長さを超えるので、同一指標かつ同一の最低valuation値をもつ項が相殺する。Gauss性から異なる h の冪 $j \neq j'$ が必要となり、 $1 \leq |j - j'| \leq D_{\text{fin}}$ で合同式の誤差を消せる。 $\ell = \text{lcm}(1, \dots, D_{\text{fin}})$ を一度選べば全 h に通用する。有理関数は分母の群軌道の積で不変な正則分母を作って処理する。これが後でcanonical formの比に使える強さである。

Section 8.3, (8.16)–(8.20) · pp. 44–45

2. 相対化してgeneralized MMPへ渡す

Proposition 3.3は、滑らかな複素準射影 X が正規準射影 Z 上射影で K_X が相対擬有効なら、 $p^* K_X \equiv_Z P + N$ という有理Cartier部分をもつNQC弱Zariski分解を作る。ここで得るのは相対数値同値である。

そのために射をコンパクト化し、底の十分正の二重被覆を用いて、滑らかな射影被覆 $X^\sharp$ の $K_{X^\sharp}$ を擬有効にする。一般ファイバーの非uniruled性と、general typeにした底の非uniruled性を經由する箇所ではBDPPを使う。Proposition 3.2で得た分解を被覆のinvolutionで平均し、finite normによって $\mathbb{Q}$ -Cartier性を保って商へ降ろす。底からのtwistは Z 上数値的に0なので消える。

Proposition 3.3 · pp. 13–14 [BDPP13, Theorem 0.2; Corollary 0.3, p. 2]

相対smooth WZDと低次元からの帰納法にTX24 Theorem 5.2を適用してsmooth minimal modelsを得る。次にTheorem 5.4でNQC generalized lc pairsへ渡し、Theorem 2.7でBirkar–Shokurovの意味の存在へ翻訳する。本稿の有理nef Cartier b-dataはNQCなので仮定を満たす。擬有効でない場合には、この存在入力は不要である。どちらの場合も小さい一般係数をもつ十分正のample因子 A を選び、 $(X, B + A + M)$ のgeneralized lc性と $D + A$ のnef性を確保してTheorem 4.2へ入れると、元の X からの停止するMMPを得る。

Section 3.3 · p. 14 [TX24, Theorems 5.2, 5.4, p. 24] [TX24, Theorem 2.7, p. 9]
[TX24, Theorem 4.2, p. 22]

3. 抽出なし・discrepancy・Mori fibreの全条件

各双有理段階の共通解消で $F = p^* D - q^* D^+$ と置く。 F は q -exceptionalかつ q 上anti-nefなのでnegativityにより $F \geq 0$ 。その段階で縮約される素因子の係数が0なら、その一般点を通る縮約曲線で有効性による非負交点と D の負交点が衝突する。同じnef b-divisorを引き戻しているのでnef部分は比較式で相殺され、 F の係数はlog discrepancyの増分そのものとなる。合成で全素因子に非減少、元の縮約素因子に狭義増加を得る。各positive modelのsmallnessは逆写像による抽出を排除し、generalized lc性も保たれる。

fibre型終点では、連結性・次元低下・相対反豊富性はextremal contractionから得る。非 $\mathbb{Q}$ -factorialの場合の $\rho(Y/T) = 1$ は別途確認する。縮約ray上で次数0のCartier因子 L に対し、小さい一般係数の $A \sim_{\mathbb{Q}} L + h^* H - D_Y$ を加える。新adjointはnefなのでTX24 Theorem 5.26のMMPには負のstepがな

く、元の Y 上で相対semiampleである。数値的に自明なsemiample因子の射は各連結ファイバーを点に送るため、 L は数値的に底から来る。縮約rayのannihilatorがちょうど $h^*N^1(T)_{\mathbb{R}}$ となり、codimension 1を得る。この補助的なsemiamplenessは、元の D_Y のsemiamplenessを意味しない。

Section 3.3, (3.17)–(3.18) · pp. 15–16 [TX24, Theorem 5.26, p. 32]

有効exceptional pullback差は擬有効性を双方向に保存する。nef終点なら元の D は擬有効であり、擬有効の D からは一般正次元ファイバー上anti-ampleな終点へ行けない。これでTheorem 1.1の二つの場合分けが一致する。

4. 基礎体を降下する

Proposition 3.4では、対・nef data・それを担うlog resolutionを可算代数閉部分体 $F \subset k$ へ降ろし、 $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ の上で有限のMMPを取る。縮約を定めるline bundleと生成切断をspreadして F -点に特殊化し、縮約曲線が同じことからStein targetを同定する。positive modelは適切な b に対する

$\mathrm{Proj}_T \bigoplus_{m \geq 0} f_* \mathcal{O}_S(mbD)$ から復元する。divisorial sheaf、有限生成、relative Projが降下することを確認し、 k へ拡大する。nef性、相対Picard数、相対ample性と有効なpullback差が保持され、全主張を得る。

Proposition 3.4 · pp. 16–17

3. Proposition 3.2 — 滑らかなscaling MMPの停止

証明対象：Proposition 3.2 · pp. 8–13

Proposition 3.2 — 局所phase定理を仮定した停止

Theorem 3.1を仮定する。滑らかな射影複素多様体 X で K_X が擬有効とし、 (X, H) がklt、 $K_X + H$ がampleとなる有効ample有理因子 H を取る。Proposition 3.2はこのscaling MMPの停止と、滑らかな双有理モデル $p: U \rightarrow X$ 上の $p^*K_X = P + N$ (P はnef有理Cartier、 $N \geq 0$ は有理Cartier) を主張する。

Proposition 3.2 · pp. 8–13

1 無限の smooth scaling MMP を仮定

$\lambda_i \rightarrow 0, \mathcal{J}_s(t) = \mathcal{J}(X, s\|K_X + tH\|) \rightarrow \mathcal{J}_s$
 共通 twist の大域生成が ideal を安定化

subadditivity と base order で両側評価
[\[DEL00, Corollary 1.5; Theorem 1.8; Variants 2.4–2.5, pp. 7–8, 12\]](#)
[Section 3.1, \(3.4\)–\(3.8\) · pp. 9–10](#)

2 全 valuation で一様な誤差

$u(\mathcal{J}_s)/s \leq E_i(u) \leq \sigma_u \leq (u(\mathcal{J}_s) + A_X(u))/s$
 $\Delta_i(u) \leq A_X(u)/s$
 整数値・有界 discrepancy で有限極限は固定可算集合

全 semi-invariant の合同式を canonical form の比に適用
[Theorem 3.1 · p. 8](#) [Section 3.1, \(3.9\)–\(3.11\) · pp. 11–12](#)

3 一つの Cartier 指数

RK_{X_i} Cartier for every i
 index-one cover の任意の指標角 α は可算集合に入れない

遅い flip の消滅。次元依存の生成倍数を先に固定して regularity
[Section 3.1, \(3.12\)–\(3.14\) · pp. 12–13](#)
[\[Fuj09a, Theorem 1.1; Remark 1.2, 誌面 p. 475 / PDF p. 1\]](#)

4 大域生成と負の曲線の矛盾

$R^k f_{i*} \mathcal{O}_{X_i}(mK_{X_i}) = 0 \quad (k > 0, i \gg_m 0)$
 $RK_{X_i} + af_i^* J$ globally generated, $RK_{X_i} \cdot C < 0$
 停止し nef 終点へ。 $p^*K_X = P + N$, P nef, $N \geq 0$

multiplier idealの一樣評価から指数を有界化しMMPを停止させる図

図を拡大 ↗ [TeXソース](#) ↓

1. 一樣なideal評価

次元0,1では結論は直接従うので、次元2以上で無限のMMPを仮定する。divisorial contractionは有限回なので、最後はflipの列となる。正のscaling値が0へ近づかなければ、固定したklt境界の有理polytopeに対するample modelの有限性に反する。ここでBCHMの仮定である共通ample部分とklt性を、小さな有理摂動を一つのlog resolution上で選んで確保する。

[BCHM10, Corollary 1.1.5, p. 7]

$A_i(u) = A_{X_i}(u)$ 、 $E_i(u) = A_i(u) - A_X(u)$ 、 $\Delta_i(u) = A_{i+1}(u) - A_i(u)$ と置く。 $L_t = K_X + tH$ の asymptotic multiplier ideal $\mathcal{J}_s(t)$ を十分正に twistすると、 $t \downarrow 0$ で一様に大域生成となる。固定有限次元空間の部分空間が安定するのでidealも安定し、 $\mathcal{J}_s$ を得る。これはidealの降鎖条件による議論ではない。subadditivityと valuation評価から、 i が s に対して十分大きいとき、すべてのdivisorial u について

$$\frac{u(\mathcal{J}_s)}{s} \leq E_i(u) \leq \sigma_u \leq \frac{u(\mathcal{J}_s) + A_X(u)}{s}, \quad 0 \leq \Delta_i(u) \leq \frac{A_X(u)}{s}.$$

Section 3.1, (3.4)–(3.8) · pp. 9–10 [DEL00, Corollary 1.5; Theorem 1.8; Variants 2.4–2.5, pp. 7–8, 12]

2. 可算性と canonical index

整数値で $A_X(u)$ が有界なvaluation列について、 $E_i(u)$ の有限極限は固定の可算集合に入る。原稿は X と可算個のidealが定義される可算代数閉体へ降ろし、対角部分列の極限valuationを取る。中心の余次元が2以上であるたびにblow-upするとJacobian値が少なくとも1増え、有界discrepancyと矛盾するため、極限は自明またはdivisorialとなる。

canonical indexが非有界なら、各点の巡回index-one cover上でcanonical generatorの指標を任意の $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ へ近づけられる。Theorem 3.1の w'_i を下へ制限すると整数値かつ有界discrepancyであり、canonical formの比に対する合同式から $E_i(u_i)$ の極限の剰余は $\ell\alpha$ となる。しかし可算集合の正整数倍写像による逆像の可算和は可算であり、任意の α を収容できない。従って一つの $R > 0$ で全 RK_{X_i} がCartierとなる。

Section 3.1, (3.9)–(3.11) · pp. 11–12

3. Cartier指数を固定して負の曲線と矛盾させる

遅いflip $f_i : X_i \rightarrow Z_i$ に対し、上の Δ_i 評価とrelative Kawamata–Viehweg vanishingを組み合わせると、各固定 $m > 0$ について $R^k f_{i*} \mathcal{O}_{X_i}(mK_{X_i}) = 0$ ($k > 0$) となる。共通解消上で丸める係数は $A_i - 1 - (m - 1)\Delta_i > -1$ となり、必要なpushforwardを $\mathcal{O}(mK_{X_i})$ と同定できる。消滅の成立時点を m によらず一度に選ぶとは主張しない。

J を Z_i 上で十分ampleに取り $D_i = -RK_{X_i} + f_i^* J$ と $D_i - K_{X_i}$ をampleにする。Fujinoのeffective base point free theoremを $a = 1$ で適用すると、次元だけによる N で ND_i が大域生成になる。この N を先に固定し、有限個の $m = R + jNR$ ($1 \leq j \leq n$) すべてで上の消滅が使える段階を選ぶ。regularityから $RK_{X_i} + af_i^* J$ が大域生成となる一方、 f_i で縮約される曲線との交点は負である。矛盾により停止し、擬有効性がfibre型の終点を排除する。

Section 3.1, (3.12)–(3.14) · pp. 12–13 [Fuj09a, Theorem 1.1; Remark 1.2, 誌面 p. 475 / PDF p. 1]

4. Corollary 1.2 — 零のnef dataへの特殊化

証明対象：Corollary 1.2 · p. 2

1 通常の lc 対を零 nef data で見る

$(X, B), \quad \mathbf{M} = 0, \quad D = K_X + B$
 generalized discrepancy の式が通常の式に一致

nef data そのものを零とし、全結論を特殊化
[Theorem 1.1 · p. 2](#) [Corollary 1.2 · p. 2](#)

2 Corollary 1.2 の全結論

$\phi : X \dashrightarrow Y, \quad A_{X,B}(E) \leq A_{Y,B_Y}(E)$
 抽出なし、元の縮約素因子で strict. 擬有効なら nef、他方は Mori fibre

通常の lc ・ 有効有理境界 ・ nef adjoint を確認
[\[OpenAI26LA, Theorem 1.1, p. 2\]](#)

3 通常の擬有効の場合だけの追加帰結

$K_Y + B_Y \text{ nef} \implies K_Y + B_Y \text{ semiample}$
 同じ終点に別原稿を適用。非零 generalized nef data には拡張しない

nef b-divisorを零とし通常の lc 対の二つの終点を得る図

図を拡大 ↗ [TeXソース](#) ↓

1. 通常のdiscrepancyと終点へ戻す

通常の lc 対に固定された零のnef b-divisorを付けると、generalized discrepancyのcrepant式は通常のものになる。従ってTheorem 1.1の抽出なし、非減少と狭義性、擬有効ならnef、非擬有効ならMori fibreという全結論がそのまま残る。ここでは数値同値な別因子を選んだのではなく、nef dataそのものを0にしている。

[Corollary 1.2 · p. 2](#)

2. Log abundanceとの接続を分ける

通常の擬有効の場合に限り、得られた (Y, B_Y) へ別原稿Log abundanceのTheorem 1.1を適用すると、同じ終点の $K_Y + B_Y$ はsemiampleとなる。これは本稿主定理後の追加帰結である。非零のgeneralized nef dataに対するsemiamplenessは導かない。

逆向きには、Log abundanceのCorollary 12.1(i)の証明が本稿Corollary 1.2を使い、共通解消の有効 exceptional差から全rounded degreeの切断を同定し、 lc log canonical ringの有限生成へ進む。この接続はLog abundanceの主定理そのものの入力とは区別する。

[\[OpenAI26LA, Theorem 1.1, p. 2\]](#) [\[OpenAI26LA, Corollary 12.1\(i\), proof and \(67\), p. 76\]](#)

5. 直接入力と使用箇所

入力

[BCHM10, Corollary 1.1.5, p. 7]

使用箇所

停止の入口

内容と仮定

共通ample部分をもつklt境界polytopeのample model有限性からscaling値を0へ送る

確認範囲

記述と本稿p.9の摂動を照合。外部証明は対象外

入力

[DEL00, Corollary 1.5; Theorem 1.8; Variants 2.4–2.5, pp. 7–8, 12]

使用箇所

一様評価

内容と仮定

smooth、bigな $K_X + tH$ でtwistの一様大域生成とsubadditivity

確認範囲

著者稿pp.7–8,12と本稿pp.9–10を照合

入力

[Fuj09a, Theorem 1.1; Remark 1.2, 誌面 p. 475 / PDF p. 1]

使用箇所

停止の矛盾

内容と仮定

klt、nef Cartier D_i 、 $D_i - K_{X_i}$ ampleに対する次元依存の大域生成倍数

確認範囲

誌面p.475/PDF p.1と本稿p.12を照合

入力

[BDPP13, Theorem 0.2; Corollary 0.3, p. 2]

使用箇所

相対化

内容と仮定

smooth projectiveで非uniruled性とcanonical擬有効性を比較

確認範囲

arXiv v1 p.2と本稿pp.13–14を照合

入力

[TX24, Theorem 2.7, p. 9; Theorem 4.2, p. 22; Theorems 5.2, 5.4, p. 24]

使用箇所

generalized pairへの移送

内容と仮定

相対smooth入力、NQC、generalized lc、適切なscaling ample因子

確認範囲

publisher版pp.9,22,24と本稿p.14を照合

入力

[TX24, Theorem 5.26, p. 32]

使用箇所

相対Picard数

内容と仮定

有効な相対ample境界を加えたnef adjointの相対semiamplessness

確認範囲

publisher版p.32と本稿p.15を照合

入力

[OpenAI26LA, Theorem 1.1, p. 2]

使用箇所

通常の対の追加帰結

内容と仮定

通常のlc、有効有理境界、nefな $\mathbb{Q}$ -Cartier adjoint

確認範囲

主張p.2と本稿p.2を照合。証明は対象外

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1 · p. 2 — 仮定、全discrepancyと二つの終点。
- Theorem 3.1 · p. 8 — 局所指標の全semi-invariantに対する合同式。
- Proposition 3.2 · pp. 8–13 — ideal安定化、可算性、指数有界性と停止の矛盾。
- Proposition 3.3 · pp. 13–14 — 二重被覆・平均・normによる相対数値分解。
- Section 3.3, (3.17)–(3.18) · pp. 15–16 — 固定nef dataの差分、strictnessと非factorialな相対Picard数。
- Proposition 3.4 · pp. 16–17 — 有限MMPとrelative Projの基礎体降下。
- Section 8.3, (8.16)–(8.20) · pp. 44–45 — tupleの合同式を全有理固有関数へ拡張する箇所。
- Theorems 9.1, 10.1; Section 13.4 · pp. 45, 50, 77 — 未検証の深い一様評価を追うための入口。

本稿のTheorem 1.1、Corollary 1.2と§3 (pp.8–17) の主張・帰着・discrepancyとMori fibre終点・基礎体降下を読み、上表の直接入力の記事を原典と照合した。局所入力についてはTheorem 3.1、次数積とwindowの記事、§8.3の全semi-invariantへの延長を読んだ。§§4–8の全選択・連続化、および§§9–13のuniform lifting、mixing、trait比較、lc-incidenceの全証明は未検証である。特にTheorem 10.1→Theorem 9.1→Proposition 5.2→Proposition 5.1という後半の連鎖は、結果の役割と呼出しの確認までであり、その全接続を検証済みとは扱わない。

relative Kawamata–Viehweg vanishingの本稿内の適用条件は確認したが、Kollár–Moriの該当原典箇所は今回直接照合していない。局所部のnormalized volume、bounded complement、b-semiampleness等の外部入力も未照合として残す。外部定理の証明の再帰的検証、全原稿の正しさの認定、専門家査読・形式検証は行っていない。記事と図はAI生成の解説であり、重要な主張は原典で確認する。

Minimal models in numerical dimension one

摂動MMPの余次元2での安定化と、二つの曲面によるnef性判定

原稿は、固定ample捻り付きの切断増大で測った数値次元が1であるとき、有限の K -negativeな操作で極小モデルを構成する。摂動ごとの有限MMPを並べただけでは係数0での停止にならないため、まず一つのモデルを固定し、曲面上の交点数と切断の消滅次数から標準因子のnef性を得る。

原稿の著者: OpenAI · September 24, 2026 · 14 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 数値次元1の極小モデル

X を次元 $n \geq 3$ の滑らかな連結射影複素多様体とし、 K_X がpseudo-effectiveで $\kappa_\sigma(X, K_X) = 1$ と仮定する。ここで原典(1.1)の規約は、Cartier因子 D に対し

$$\kappa_\sigma(X, D) = \max \left\{ k \in \{0, \dots, n\} : \exists A \text{ ample Cartier, } \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{h^0(X, mD + A)}{m^k} > 0 \right\}.$$

集合が空なら $-\infty$ とし、 A は極限の前に固定する。この仮定を、nef性未確立の K_X に対する交点数の定義へ置き換えない。

このとき、正規射影 $\mathbb{Q}$ -factorial terminal多様体 Y と、有限列 $\varphi : X \dashrightarrow Y$ (K -negativeな因子的縮約とflipからなる)が存在し、 K_Y はnefである。逆写像は素因子を縮約しない。共通の滑らかな射影解消 $p : W \rightarrow X, q : W \rightarrow Y$ 上で、整合的に選んだ標準因子について

$$p^* K_X = q^* K_Y + E, \quad E \geq 0, \quad E \text{ は } q\text{-exceptionalな有理因子,}$$

かつ $\text{Supp } E$ は φ が縮約する X 上のすべての素因子の狭義変換を含む。

Theorem 1.1; equation (1.1) · pp. 1–2

Corollary 1.2 — 同じ終点のgood minimal model性

Theorem 1.1の仮定の下で、同じ $\mathbb{Q}$ -factorial terminal終点 Y の K_Y はsemiampleであり、 Y は X のgood minimal modelである。これはlog abundanceを追加して得る系である。Theorem 1.1の固定捻り付き増大の議論だけでは、 K_Y のsemiamplessnessや K_X の非消滅を主張していない。

Corollary 1.2 · p. 2

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Minimal models in numerical dimension one](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [BCHM10](#) Caucher Birkar; Paolo Cascini; Christopher D. Hacon; James McKernan — Existence of minimal models for varieties of log general type : big境界付きklt対の有限scaling MMP。arXiv:math/0610203v2 (2008-08-14); downloaded 81-page PDF bears 2024-11-26 compilation date。
- [Laz10](#) Robert Lazarsfeld — A short course on multiplier ideals : 固定捻り付き制限全射のためのNadel消滅。Author-hosted 37-page PDF, arXiv:0901.0651v1 (2009-01-06); cited publication 2010。
- [OpenAI26LA](#) OpenAI — Log abundance in characteristic zero : 系にのみ追加するordinary lc log abundance。September 24, 2026; commit 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a。
- [KM98](#) János Kollár; Shigefumi Mori — Birational Geometry of Algebraic Varieties : MMP、base point free、negativity。引用書原本の番号・頁照合は保留。Cambridge Tracts in Mathematics 134, 1998; book passages not independently located。
- [Har77](#) Robin Hartshorne — Algebraic Geometry : 曲面Riemann–RochとHodge index。本稿の使用を読解、原書照合は保留。Graduate Texts in Mathematics 52, 1977; book passages not independently located。
- [Ful98](#) William Fulton — Intersection Theory : cycle交叉とBorel–Moore局所化。本稿の使用を読解、原書照合は保留。Second edition, 1998; book passages not independently located。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 固定モデルと二つの曲面

証明対象 : [Theorem 1.1](#); [equation \(1.1\)](#) · pp. 1–2

証明の道筋。主張は[Theorem 1.1](#)を参照する。Proposition 2.1で $X \dashrightarrow Y$ を固定し、

$M_j = K_Y + t_j B_Y$, $t_j \rightarrow 0$ の十分な倍数が余次元3以上の集合の外で生成される状況を作る。第一の非常に一般の曲面は正の平方を固定捻り付き二次増大へ変換する。 $\kappa_\sigma = 1$ がその平方を0にする。第二の曲面は任意の負の曲線を検出し、平方0との矛盾からnef性を得る。

1 正摂動を余次元 2 で固定

$X \dashrightarrow Y$, $M_j = K_Y + t_j B_Y$, $t_j \rightarrow 0$.
 $|d_j M_j|$ は $Y \setminus Z_j$ で生成、 $\text{codim } Z_j \geq 3$ 。

Nadel 消滅と Koszul 複体で制限を全射にする
[Lemma 3.1 · pp. 8–10](#) [\[Laz10, Theorem 2.4, p. 11\]](#)

2 第一の曲面：固定捻りの二次増大

$L = K_Y$, $h^0(\hat{Y}, m\pi^*L + P) \geq \frac{m^2}{2}L^2H^{n-2} + O(m)$.
 $j = j(m)$ を選んでも S, P は固定する。

一つの ample A_X で正の二次 limsup を排除
[Section 4; equation \(4.1\) · pp. 13–14](#)

3 元の X へ切断を移す

$u^*K_X \geq r^*\pi^*L$, $\kappa_\sigma(X, K_X) = 1$
 $\implies L^2 \cdot H^{n-2} = 0$.

固定した点・例外曲線で jet と Hodge index を使う
[Lemmas 3.2–3.3; Proposition 3.4 · pp. 10–13](#)

4 第二の曲面：負の曲線は矛盾

$L \cdot C_0 < 0 \implies \text{coeff}_e F_j \geq ck_j$
 $\implies M_j^2 \cdot [T] \geq \epsilon > 0$, $M_j^2 \cdot [T] \rightarrow 0$.

nef 性に、有限 prefix の discrepancy 比較を合わせる
[Proposition 2.1\(iii\); Lemma 2.2 · pp. 4–5, 8](#)

極小モデルと標準因子の比較

K_Y nef, $p^*K_X = q^*K_Y + E$, $E \geq 0$, $q_*E = 0$.
 有限 K -negative 列、因子非抽出、縮約因子上で $E > 0$ 。

摂動MMP、固定捻り付き増大、負の曲線の排除を結ぶ証明図

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 有限の正摂動を、余次元2で固定する

(X, B) がklt、 $B \geq 0$ がampleな有理因子、 $K_X + B$ がampleとなるよう選ぶ。 $t_j = 2^{-j}$ とし、前のnef終点から $(K + t_{j+1}B)$ -MMPを $(t_j - t_{j+1})B$ でscalingする。境界の変換はbigかつeffectiveで十分であり、ample性を保つ必要はない。BCHMの有限scaling MMPを使い、adjointもbigなのでMori fibre spaceへの分岐を除く。各終点のnefかつbigなklt adjointにbase point free theoremを適用する。

[BCHM10, Corollary 1.4.2, p. 10]

scaling ray上の $(K + t_{j+1}B) \cdot R < 0$ と $(K + t_{j+1}B + \lambda C) \cdot R = 0$ から $B \cdot R > 0, K \cdot R < 0$ を得る。小縮約では $K - b(K + t_{j+1}B) \sim_{\mathbb{Q}} h^*A$ を相対base point free theoremで降下し、 $b > 0$ とadjointの相対ample性からflip後の K も相対ampleとする。したがって、各段階は実際にcanonical MMPである。

Lemma 2.3はこの連結列の停止そのものを主張しない。因子的縮約の有限性、discrepancyの厳密増加によりflip先の余次元2成分を有限回で除き、次に代数的 $(n-2)$ -cycle類の張る有限次元空間の次元減少でflip元も扱う。この後の一つの終点 Y を選ぶと、各後続の有限列は両側で余次元3以上の外では同型である。正規性により切断を移し、 $|d_j M_j|$ が $Y \setminus Z_j$ で生成される。 d_j と Z_j は j に依存してよい。

Proposition 2.1; Lemmas 2.2–2.3 · pp. 4–8

2. 一つのample捻りを保って平方を0にする

$L = K_Y$ と置く。 Y はterminalなので余次元2で滑らかである。非常に一般の完全交叉曲面 $S \subset Y$ を、可算個の Z_j と $\text{Sing } Y$ をすべて避けて選ぶ。各 $M_j|_S$ はsemiample、従って極限 $L|_S$ はnefで、 $L^2 \cdot H^{n-2} \geq 0$ である。

解消 $\pi: \hat{Y} \rightarrow Y$ 上で、 $r = n - 2, A = \pi^*H$ とし、ample Cartier因子 A_0 を用いて $P = K_{\hat{Y}} + rA + A_0$ を固定する。各 m に対し先に $j = j(m)$ を mt_j が十分小さくなるように選び、その後 d_j の倍数で $k > m$ を選ぶ。一般の $D_m \in |k\pi^*M_j|$ から $R_m = (m/k)D_m$ を取ると、 $\mathcal{J}(R_m)$ は S 付近で自明である。

$m\pi^*L + P - iA - K_{\hat{Y}} - R_m$ は $0 \leq i \leq r$ でampleとなり、Nadel消滅とKoszul複体が制限写像の全射性を与える。

[Laz10, Theorem 2.4, p. 11]

曲面Riemann–Rochから、 dL がCartierとなる一つの d の倍数に沿って

$$h^0(\hat{Y}, m\pi^*L + P) \geq \frac{m^2}{2}L^2 \cdot H^{n-2} + O(m).$$

ここで P と誤差の係数は m, j, k に依存しない。共通解消上の有効差 $u^*K_X - r^*\pi^*L \geq 0$ で切断を X へ移し、固定Cartier因子 $P_X = u_*r^*P$ を一つのample因子 A_X で上から抑える。正の平方なら $h^0(X, mK_X + A_X) \geq cm^2$ が得られ、原典(1.1)に矛盾する。従って $L^2 \cdot H^{n-2} = 0$ である。 $\kappa_\sigma = 1$ から様な $O(m)$ 上界を仮定する必要はない。

Lemma 3.1 · pp. 8–10 Section 4; equation (4.1) · pp. 13–14

3. 負の曲線を通る曲面でnef性を確定する

仮に $L \cdot C_0 < 0$ なら、 C_0 上の適切な点 x を通る別の完全交叉の曲面成分 T を固定する。最初の非常に一般の S は C_0 を見逃し得るため、この変更が必要である。各成分の M_j の平方は非負で、重複度付きの和が $M_j^2 \cdot H^{n-2} \rightarrow 0$ なので、 $M_j^2 \cdot [T] \rightarrow 0$ 。

一方、解消上で x の上の点 z を通り C_0 を支配する曲線を固定する。Lemma 3.2 の ambient jet 評価から、引き戻した $k_j M_j$ の全切断は z で少なくとも ck_j 次消滅する ($c > 0$ は固定)。 T の固定解消上で一度 blow-up した例外曲線 e に、固定成分 F_j が $\text{coeff}_e F_j \geq ck_j$ を持つ。Hodge index theorem による一様な $F_j^2 \leq -\epsilon k_j^2$ と可動部分の平方の非負性が

$$0 \leq (k_j f^*(M_j|_T) - F_j)^2 = k_j^2 (M_j^2 \cdot [T]) + F_j^2 \implies M_j^2 \cdot [T] \geq \epsilon$$

を与え、極限 0 に矛盾する。特異集合内の曲線もこの構成に含まれる。これが Proposition 3.4 を $L = K_Y$ へ適用する箇所である。

Lemmas 3.2–3.3; Proposition 3.4 · pp. 10–13

4. 双有理的な全結論を有限列から回収する

Y の射影性、 $\mathbb{Q}$ -factorial 性、terminal 性、因子の非抽出は Proposition 2.1 の有限 canonical prefix から得る。Lemma 2.2 の有効な標準因子差を共通解消上で足せば $p^* K_X = q^* K_Y + E$ となる。 Y の素因子に写る成分の係数は 0 なので E は q -exceptional である。 X 上で縮約される素因子は log discrepancy 1 から terminal な Y 上の 1 より大きい値へ移るため、その狭義変換は E に正の係数で現れる。以上で主定理の nef 性以外の結論も対応する。

Proposition 2.1 (iii); Lemma 2.2 · pp. 4–5, 8

3. Corollary 1.2 の証明 — ordinary log abundance を追加する

証明対象 : Corollary 1.2 · p. 2

Corollary 1.2 は、構成済みの同じ終点へ追加の入力を適用する。

Theorem 1.1 の同じ終点

Y は射影 $\mathbb{Q}$ -factorial terminal.
 $(Y, 0)$ lc, K_Y nef and $\mathbb{Q}$ -Cartier.

有効有理境界 0 の ordinary lc 対へ log abundance を適用
[\[OpenAI26LA, Theorem 1.1, p. 2\]](#) [Corollary 1.2 · p. 2](#)

Corollary 1.2 : good minimal model

$\exists m > 0$: mK_Y is Cartier and globally generated.
 数値同値な代替ではなく、 K_Y 自体の半豊富性。

terminalなnef終点からordinary log abundanceによってgood minimal modelを得る図

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. nefな標準因子からsemiampleな標準因子へ

Y は正規射影terminalで K_Y は $\mathbb{Q}$ -Cartierかつnefである。従ってordinary pair $(Y, 0)$ はlcで、境界 0 は有効有理境界である。標数 0 のlog abundanceを適用すると、元の K_Y の正のCartier倍数が大域生成される。数値同値な別の因子を得る結論ではない。Theorem 1.1で構成した写像と比較式を保持したまま、good minimal modelとなる。

[\[OpenAI26LA, Theorem 1.1, p. 2\]](#) [Corollary 1.2 · p. 2](#)

4. どの論文が、どの段階を担うか

入力

BCHMのbig境界付きscaling MMP

使用箇所

Proposition 2.1, p. 7

役割・適用条件

klt、big effective境界、scaling前のnef adjointを保ち各正摂動を有限で終える

確認範囲

Corollary 1.4.2と停止を述べる直前の段落、適用箇所を照合

入力

LazarsfeldのNadel消滅

使用箇所

Lemma 3.1, p. 9

役割・適用条件

smooth解消上、effective R_m 、差がample。固定捻りの制限全射へ

確認範囲

Theorem 2.4の記述と式(3.7)を照合

入力

Kollár–MoriのMMP・base point free・negativity

使用箇所

§§2.1–2.2, pp. 5–8

役割・適用条件

canonical negativity、相対降下、特異点と有効差

確認範囲

本稿での使用内容を読解。引用書の各番号・頁の原本照合は保留

入力

曲面Riemann–Roch・Hodge index、cycleの交叉

使用箇所

Lemmas 3.1, 3.3; Proposition 3.4

役割・適用条件

固定曲面の二次増大・例外固定部分の一樣負値

確認範囲

本稿の計算と使用条件を読解。Hartshorne/Fulton原本の頁別照合は保留

入力

Log abundance in characteristic zero (034)

使用箇所

Corollary 1.2, p. 2

役割・適用条件

ordinary lc対 $(Y, 0)$ のnef adjointをsemiampleにする

確認範囲

Theorem 1.1の記述と適用を照合。入力定理の証明は対象外

AHKの4次元flipの議論はLemma 2.3の方法上の先行例であり、任意次元の停止定理として輸入されない。036のgeneralized lc原稿をTheorem 1.1の入力にする構成でもない。関連する一般存在定理との包含関係から、未確認の直接依存を追加しない。

5. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1; equation (1.1) · pp. 1–2 — 切断増大の規約と主定理の全結論
- Proposition 2.1; Lemmas 2.2–2.3 · pp. 4–8 — 正摂動から余次元2で固定したモデルへ
- Lemma 3.1 · pp. 8–10 — 固定捻りと $j(m)$ の選び方
- Lemmas 3.2–3.3; Proposition 3.4 · pp. 10–13 — 固定曲面上での負の曲線の排除
- Section 4; equation (4.1) · pp. 13–14 — X への切断移送と数値次元の使用
- Corollary 1.2 · p. 2 — log abundanceを追加する位置

Theorem 1.1、Corollary 1.2、および§§2–4の証明本文を読解し、固定モデル・固定捻り・固定例外曲線がどこで選ばれるかを照合した。BCHM、Nadel消滅、log abundanceは入力結果の記述と適用を確認した。古典的教科書の上記箇所の原本照合、外部結果そのものの証明、全論証の独立検証は行っていない。ここで紹介した結論は原稿の主張であり、専門家査読や形式検証による認定ではない。