

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 033

Campanaのorbifold飯高予想と対数的劣加法性

総括・論文間のつながりと5篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-11

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

総括に続き、公式カタログ順で全5篇の解説を収録しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00 · カタログ033 総括	3
01 · Orbifold and logarithmic Iitaka subadditivity	12
02 · Logarithmic Kodaira dimension and whole-fiber variation	28
03 · The reverse logarithmic Kodaira inequality and additivity	50
04 · Projective Hodge lines and ordinary Iitaka subadditivity	65
05 · B-semiampleness for compact log-smooth Kähler fibrations	77

原論文の参照版: [fd4aeeb2ee4fc729c18d98444fed42fd0529eeeb](#)

カタログ033・総括

Web版を読む ↗

CATALOGUE 033

Campanaのorbifold飯高予想と対数的劣加法性

Campana's orbifold litaka conjecture and logarithmic subadditivity

小平次元の劣加法性とvariation、対数的加法性、moduli lineの半豊富性を扱う5篇を案内する。公式順の一覧から主張と方法を選び、結果単位の接続から各記事の証明段階へ進める。

公式順の記事一覧

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

カタログ 033・2026-10-11 確認の固定参照版

#

01

論文・概説

Orbifold and logarithmic litaka subadditivity →

図中の略称: Orbifold litaka

2026-09-26・55 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

係数1を許すclass C のSNC対でorbifold劣加法性を主張し、対数的・標数0の通常劣加法性を導く。

Theorem 1.1; Corollaries 6.2–6.3・pp. 2–3, 40–41 ↗

議論の役割・概説

相対飯高底の切断比較、Hodge随伴正值性、捻りの相殺。後続稿へ渡す結果を区別する。

証明概説を読む →

#

02

論文・概説

Logarithmic Kodaira dimension and whole-fiber variation →

図中の略称: Whole-fiber variation

2026-09-26 · 75 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

底の対数的小平次元が非負なら、全幾何学的一般ファイバーのvariationを含む下界を主張する。
smooth族の帰結は追加入力を使う。

[Theorem 1.1; Corollaries 1.2–1.3 · pp. 2, 5](#) ↗

議論の役割・概説

切断からparameter fieldを作り、root coverのconstancy、marking、有限被覆の降下で全ファイバーへ戻る。

[証明概説を読む](#) →

#

03

論文・概説

The reverse logarithmic Kodaira inequality and additivity →

図中の略称: Reverse log additivity

2026-09-26 · 51 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

開いた底上で全境界stratumまでsmoothな射影的対に逆向き不等式を示し、対数劣加法性の下界と合わせて加法性を得る。

[Theorem 1.1; Corollary 1.2; Proposition 1.3 · pp. 2–3](#) ↗

議論の役割・概説

指定点での零点を保持して底の切断を作る。正次元period商では数値的な捻りを除く。

[証明概説を読む](#) →

#

04

論文・概説

Projective Hodge lines and ordinary Iitaka subadditivity →

図中の略称: Projective Hodge lines

2026-09-27 · 40 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

標数0での通常劣加法性と、全最高Hodge部分がlineである変動の随伴正值性を主張する。

[Theorems 1.1–1.2 · p. 2](#) ↗

議論の役割・概説

境界・有限分岐でのrank loss、標準束公式、二つの底の比較と補間による別証明。

[証明概説を読む](#) →

#

05

論文・概説

B-semiampleness for compact log-smooth Kähler fibrations →

図中の略称: Kähler B-semiampleness

2026-09-10 · 38 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

相対対数標準束が底から引き戻されるコンパクトKähler族で、moduli b-lineの安定化と半豊富性を主張する。

[Theorem 1.1\(a\)–\(b\) · p. 3](#) ↗

議論の役割・概説

lctとHodge延長を同定し、積分分解の各因子の半豊富性から指定線束の大域生成を降ろす。

[証明概説を読む](#) →

033内で結果を使う箇所

Orbifold IitakaはWhole-fiber variationの主証明に異なる二つの入力を渡す。Reverse log additivityはまず独立した上界を示し、下界を加えるのは加法性の帰結である。以下の論文名は記事の該当節、結果番号は固定版の原典へリンクする。

供給元の結果

Orbifold Iitaka · Corollary 6.2 · pp. 40–41

利用先 · 使用箇所

Whole-fiber variation · Theorem 2.1; Lemmas 2.8–2.9 · pp. 6, 10–12

使う内容

直接入力。通常対数下界を与え、飯高ファイバー上で二つの非負な項を0にする。parameter fieldの構成に使う。

供給元の結果

Orbifold Iitaka · Theorem 3.1 · pp. 17–18

利用先 · 使用箇所

Whole-fiber variation · Theorem 3.8 / Proposition 3.9; Proposition 3.12 · pp. 21, 23

使う内容

直接入力。制限した変動のHodge lineに随伴正值性を与える。切断次元の上界と合わせて随伴比較の底を点にし、Mの有理自明性を得る。

供給元の結果

Orbifold Iitaka · Corollary 6.2 · pp. 40–41

利用先 · 使用箇所

Reverse log additivity · Corollary 1.2; Theorem 7.8 / §7.6 · pp. 2, 50

使う内容

帰結への入力。同じ対と非常に一般のファイバーに下界を与え、RAの上界と合わせて加法性にする。

最初の二つの入力はparameter fieldと制限Hodge lineの段階を支える。それだけで全ファイバーのconstancyが得られるわけではなく、Whole-fiber variationの全体図でconstancy · marking · 降下までを追う。Reverse log additivityの上界の証明は、小平次元の全符号を処理してから下界へ進む。

Whole-fiber variation §9の追加の相対飯高構成には、さらに次の三つを使う。§7.4で完結する主証明とは別の経路である。

供給元の結果

Orbifold Iitaka · Proposition 2.7 · pp. 10, 16–17

利用先 · 使用箇所

Whole-fiber variation · Proposition 9.1(i), (iii) · pp. 69–70

使う内容

追加結果内の入力。元の X を参照空間に固定し、相対・絶対の切断と比を保持する。追加の通常相対飯高構成で相対bignessを得る。

供給元の結果

Orbifold Iitaka · Lemma 7.1 / Corollary 7.2 · pp. 43–46

利用先 · 使用箇所

Whole-fiber variation · Proposition 9.1(iv), (v) · pp. 69–70

使う内容

追加結果内の入力。被約境界と最小指数のroot coverから全最高部分をrank oneにし、正規化済み M を純粋整変動のlineとして実現する。

供給元の結果

Orbifold Iitaka · Lemma 7.4 · pp. 46–47

利用先 · 使用箇所

Whole-fiber variation · Proposition 9.1: initial normalized boundary · pp. 69–70

使う内容

追加結果内の入力。実際のsource成分での最小値と全付値のlctを区別して B を正規化する。切断比較とHodge lineを同じモデル上で使う。

切断の保存、被約境界での全最高line、同じモデル上の境界の正規化を分担する。記述と使用箇所の照合であり、全付値比較や§§8–9全体の証明確認ではない。

カタログ034との接続

両方向に異なる結果が渡る。Log Abundanceから戻る良いモデルはWhole-fiber variationのsmooth族の帰結で使い、variation主定理の入力にはしない。

供給元の結果

Orbifold Iitaka · Corollary 6.2 · pp. 40–41

利用先 · 使用箇所

Log Abundance · Theorem 1.2 → Lemma 6.1 · pp. 6, 30–31

使う内容

直接入力。境界0のAlbaneseファイブレーションに適用し、非消滅反例のirregularityを0にする。LAでの劣加法性の用途はここに限る。

供給元の結果

Log Abundance · Corollary 11.2 · pp. 73–74

利用先 · 使用箇所

Whole-fiber variation · Corollary 1.3 proof · p. 5

使う内容

帰結への入力。BDPPで擬有効となる各閉ファイバーにsemiampleなgood modelと有効例外差を与える。canonical性を確認してTajiを適用する。

供給元の結果

Orbifold Iitaka · Lemma 2.6 · p. 9

利用先 · 使用箇所

Kähler abundance · §5.1; reused in Lemma 5.7 · pp. 91, 98

使う内容

直接入力。相対飯高底へ移して一般ファイバーを小平次元0にし、低次元への帰納法を続ける。

供給元の結果

Orbifold Itaka · Lemma 5.2 · p. 32

利用先 · 使用箇所

Kähler abundance · §5.1 · p. 91

使う内容

直接入力。 水平境界を少し下げたbigなファイバーを射影的stable familyに比較し、代数次元0でbigな場合を排除する。

供給元の結果

Orbifold Itaka · Proposition 2.7 / Theorem 3.1 · pp. 10–17, 17–18

利用先 · 使用箇所

Kähler abundance · Lemma 5.2 · pp. 91–94

使う内容

直接入力。 切断空間と実際の有理Hodge lineを比較し、 $M=p^*P$ と底の随伴bignessを得る。余次元2へ落ちる項の符号は別途扱う。

供給元の結果

Orbifold Itaka · Lemma 3.3 · pp. 18–19

利用先 · 使用箇所

Kähler abundance · Lemma 5.7, interpolation · pp. 98–99

使う内容

直接入力。 bigな底の捻りから非零切断を作り、別の有効因子と補間して正の小平次元を強制する。

Log AbundanceのAlbanese帰着は境界0の場合で、原稿にはこの用途をHacon–Popa–Schnellで賄う別経路もある。Kähler稿への各行は特定の補助結果の利用であり、利用先自身の仮定を残す。Log Abundanceを経由する推移的な経路を、Schnellへの直接入力とはしない。

明示的な前提への対応。 Orbifold Itaka, Theorem 1.1 · pp. 2–3はConditional Kähler models, Assumption 2.2 · pp. 7–8に対応する。任意次元class C、係数1、不変な底項の規約まで含めた対応であり、他のKähler MMP · 豊富性の前提は残る。前提の記述へ進める。

別証明・結果の包含・背景

Projective Hodge lines, Theorem 1.1 · p. 2とOrbifold Iitaka, Corollary 6.3 · p. 41は、標数0での同じ通常劣加法性への別証明である。後者は対数的結論も含む。通常の主張はその境界0の特殊化という結果の包含であり、証明依存ではない。二つの底の補間と標数0への移行を比較できる。

Projective Hodge lines, Lemma 8.4 / Theorem 8.1 · pp. 28–29はWhole-fiber variation, Remark 3.17 · p. 25が挙げる別の随伴比較である。制限上でtensor replacementを作り直す必要があり、受け手の本文は直接比較を採用する。別に、smooth族で底とファイバーの小平次元が非負なら、加法性とvariation下界の比較でも底の上界を得る（比較段落 · p. 5）。負の底やすべてのspecial baseはこの経路で扱わない。

Orbifold IitakaとProjective Hodge linesの弱正值性・補間は類似手法だが、Hodge lineの仮定は異なる。Orbifold IitakaとKähler B-semiamplenessのroot line計算でも、orbifoldのinf-multiplicity境界とlct discriminantは別物である。Kähler B-semiampleness · p. 3はorbifold Iitaka theoremを使わないと明記するが、全論文間関係の調査済みを意味しない。全体図で安定化と積分分解の経路を追える。

Reverse log additivityのconnection-formによるAx–Schanuel論証の出典は方法の背景として記録する。必要な半単純の場合を本文内で論じており、外部入力の説明で外部定理の直接適用と区別する。

原典・確認範囲

公式一覧／OpenAI Research Catalog · 033 · p. 5。公式分野はAlgebraic and complex geometryで、記事一覧は公式順を保つ。033原稿はcommit fd4aeeb2ee4fc729c18d98444fed42fd0529eeebに固定する。034の接続先は公開記事の参照版 adc7f1241b42e322a6451854ab7e4b4c146bf78a (Log Abundance : 2026-09-24、Kähler abundance : 2026-10-04、conditional Kähler models : 2026-10-05) を保持する。

2026年10月11日の改訂では、5篇の固定PDFと不足していた証明対象の主張・結論を照合し、ハッシュを再確認して、既存の接続と記事を突き合わせた。12入力と1前提対応の原典記述・使用箇所の照合は10月8日の記録を継承し、外部証明の全検証を新たに主張しない。適用条件と確認限界を含む接続記録を保持している。

- Orbifold Iitaka : rank loss、安定族の全構成、付値・BFMT比較、coreの帰結。
- Whole-fiber variation : 正則化・ L^2 の全評価、Hanamura・SGA1の原典記述、§§8–9全体。
- Reverse log additivity : 斉次置換、compact flag、境界・表現論の全計算。
- Projective Hodge lines : 多変数延長、補助結果の全証明、§§8–9の別証明。
- Kähler B-semiampleness : parameter-space全構成、偏極変更、外部コンパクト化理論。

未記録の関係は未調査である。主張・使用箇所の照合、証明概略の説明、証明全体の独立検証を区別し、専門家査読・形式検証済みとはしない。

Orbifold and logarithmic Iitaka subadditivity

相対飯高底の切断比較と、二つの正值性入力 of 合流

原稿は、Fujiki class C の有理SNC対に対するorbifold劣加法性を、係数1の境界も含めて主張する。証明の軸は、相対飯高底上で元の対数多重標準切断を保持し、Hodge lineの随伴正值性と一般型ファイバーの加法性を組み合わせることである。最後のample捻りの除去は、固定切断による乗法として行われる。

原稿の著者: OpenAI · 2026-09-26 · 55 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — Orbifold劣加法性

X を滑らかなコンパクト連結複素多様体でFujiki class Cに属するもの、 Δ を係数が $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ にあるSNC境界とする。 $f: X \rightarrow Y$ を、正規コンパクト既約複素空間への連結ファイバーを持つ全射正則写像とする。非常に一般の滑らかなファイバー F と $\Delta_F = \Delta|_F$ について、原稿は

$$\kappa(X, K_X + \Delta) \geq \kappa(F, K_F + \Delta_F) + \kappa(f | \Delta)$$

を示す。点の飯高次元は0、 $(-\infty) + a = -\infty$ とし、 $a = -\infty$ の場合も含む。

底が滑らかなモデル上では

$$m_\Delta(E) = \frac{1}{1 - \Delta_E}, \quad m(f, \Delta; D) = \min_{E \rightarrow D} \text{ord}_E(f^* D) m_\Delta(E),$$

$$B(f, \Delta) = \sum_D \left(1 - \frac{1}{m(f, \Delta; D)} \right) D$$

と置く。 $1/0 = \infty$ 、 $1/\infty = 0$ であり、可除性条件は課さない。定理の底項は任意のモデルの $\kappa(Y, K_Y + B(f, \Delta))$ ではなく、原典(1.2)のorbifold双有理同値で許されるモデルにわたる

$$\kappa(f \mid \Delta) = \inf_{f' \sim f} \kappa(Y', K_{Y'} + B(f', \Delta'))$$

である。正規な特異底では、底と主成分を解消し、元の Δ の狭義変換に全空間の被約例外境界を加えて定義する。

Theorem 1.1 · (1.1)–(1.4) · pp. 2–3

Corollary 6.2 — 対数劣加法性

$f: X \rightarrow Y$ を滑らかな連結射影複素多様体間の連結ファイバーを持つ全射射とする。 D_X, D_Y を被約SNC因子とし、零因子も許して

$$\text{Supp}(f^*D_Y) \subseteq \text{Supp}(D_X)$$

を仮定する。非常に一般のファイバー F と $D_F = D_X|_F$ に対して

$$\kappa(X, K_X + D_X) \geq \kappa(F, K_F + D_F) + \kappa(Y, K_Y + D_Y).$$

同じ結論はFujiki class Cの滑らかなコンパクト多様体間の正則ファイブレーションにも成立する。

Corollary 6.2 · pp. 40–41

Corollary 6.3 — 標数0での通常劣加法性

k を標数0の代数閉体、 $f: X \rightarrow Y$ を滑らかな連結射影 k 多様体間の連結ファイバーを持つ全射射とする。幾何学的な一般ファイバー F について

$$\kappa(X) \geq \kappa(F) + \kappa(Y).$$

さらに、Corollary 6.2と同じ境界条件で対数不等式も k 上成立する。この場合も非常に一般の複素ファイバーを幾何学的な一般ファイバーに置き換える。

Corollary 6.3 · p. 41

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 Orbifold and logarithmic Iitaka subadditivity を指します。外部入力には次の略号を使います。

- FF Osamu Fujino; Taro Fujisawa — Variation of mixed Hodge structure and its applications : Hodge延長と相対対数最高形式の比較。author version 0.55, 2025-03-11, 36 pages。

- Vil Mads Bach Villadsen — Hodge modules and Kähler morphisms : period商または有限被覆のコンパクト化。記事末尾の照合範囲を参照。arXiv:2401.09544v1, 2024-01-17, 26 pages。
- BC Yohan Brunebarbe; Benoît Cadorel — Hyperbolicity of varieties supporting a variation of Hodge structure : immersiveなperiod写像から対数一般型性を得る。arXiv:1707.01327v1, posted 2017-07-05, manuscript dated 2017-07-06, 7 pages。
- BT Benjamin Bakker; Jacob Tsimerman — The Ax–Schanuel conjecture for variations of Hodge structures : 境界でのrank lossのためのAx–Schanuel入力。arXiv:1712.05088v1, 2017-12-14, 12 pages。
- KP Sándor J. Kovács; Zsolt Patakfalvi — Projectivity of the moduli space of stable log-varieties and subadditivity of log-Kodaira dimension : 射影安定族の正值性とmarked modelのvariationの下界。62-page author manuscript; PDF metadata creation date 2016-09-26 UTC (2016-09-27 JST)。
- Fuj Osamu Fujino — Notes on the weak positivity theorems : 負のample捻りを伴う切断の構成に使う弱正值性。author version 0.54, 2015-06-30, 44 pages。
- Cam Frédéric Campana — Orbifolides géométriques spéciales et classification biméromorphe des variétés kählériennes compactes : neatモデルで不変なorbifold底項を計算。arXiv:0705.0737v8, 155-page PDF; arXiv stamp 2009-07-15, title page date 2018-10-25。
- BFMT Benjamin Bakker; Stefano Filipazzi; Mirko Mauri; Jacob Tsimerman — Baily–Borel compactifications of period images and the b-semiampleness conjecture : Hodge/moduli同定と射影的半豊富性。使用する定理と未確認範囲は本文で区別。arXiv:2508.19215v2, 2025-12-18 (as specified in OI reference [7])。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1の証明 — 相対飯高底への移送

証明対象 : Theorem 1.1 · pp. 2–3 仮定 · 結論を参照する。

証明の道筋。 主定理では、相対飯高底の切断比較に二つの正值性入力を合わせる。最後のample捻りの相殺を次節で展開し、得た下界から対数劣加法性と標数0への移行を導く。WVへの追加結果は主定理の経路と分けて読む。

右辺のいずれかが $-\infty$ の場合を除き、 $r = \kappa(F, K_F + \Delta_F) \geq 0$ 、 $b = \kappa(f | \Delta) \geq 0$ と置く。以下の X, W, Y は許された共通モデルを表し、切断を戻す滑らかな参照対を (X_0, Δ_0) とする。 $h : W \rightarrow Y$ は元の底を保持し、 $p : W \rightarrow S$ はperiodに由来する別の射である。

相対飯高帰着と固定した参照空間

$$X \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} Y, \quad \dim W_y = r, \quad \kappa(G, K_G + \Delta_G) = 0$$

$$C = B(f, \Delta), \quad \kappa(Y, K_Y + C) \geq b$$

Kodaira 次元 0 の生成形式から Hodge line と境界を構成
Lem. 2.6, p. 9; Prop. 2.7, pp. 10–17

境界の付値を比較し、切断を移す

$$B(g, \Delta) \leq T \leq 1, \quad D_W = K_W + T$$

$$H^0(W, q(D_W + M)) \simeq H^0(X_0, q(K_{X_0} + \Delta_0))$$

Y 上でも切断の積・比を保持する

相対比較と重複度の合成
Prop. 2.7(iv); Lem. 2.12
pp. 10, 17; (6.4)–(6.5), pp. 39–40

最高 Hodge line の随伴正値性
Thm. 3.1, pp. 17–18
Prop. 4.5; Lem. 4.7, pp. 25–31

元の底への射を使う

$$h : W \rightarrow Y$$

$$(D_W + M)|_{W_y} \text{ big}$$

$$B(h, T) \geq C$$

$$T_E = 1 \quad (\text{codim}_Y h(E) \geq 2)$$

独立な period 底へ移る

$$p : W \rightarrow S, \quad S \text{ projective}$$

$$M = p^*P, \quad P \text{ nef}$$

$$K_S + a_0P \text{ big}, \quad a_0 > 0$$

Y と S を結ぶ射は仮定しない

一般型加法性と固定切断による ample 捻りの相殺
Prop. 3.4, pp. 19–20; (6.6), p. 40

二つの入力を合流させる

$$\kappa(W, D_W + M) \geq r + \kappa(Y, K_Y + C)$$

参照空間への降下が比と像の次元を保持
Prop. 2.7; Lem. 2.1, pp. 5–6, 16–17; §6, p. 40

元の対の切断へ戻す

$$\kappa(X, K_X + \Delta) \geq r + b$$

主定理：相対飯高帰着から、境界の保持と Hodge line の正値性を合流させる

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 例外因子の係数を保ち、元の底を固定する

底を解消し、平坦化を全空間の解消より先に行う。底の余次元2以上へ落ちる素因子は固定した滑らかな参照空間に対して例外的となる。境界を狭義変換と被約例外因子の和にすると、対数標準因子の差は有効例外的で、多重標準切断とその積・比が保存される。ここで滑らかな底 Y を固定し、 $C = B(f, \Delta)$ とする。その後の W の変更でも C と係数1の条件を保持でき、 $\kappa(Y, K_Y + C) \geq b$ が残る。

Lemma 2.1 · Corollaries 2.3, 2.5 · Lemmas 2.4, 2.6 · pp. 5–9; §6 · p. 39

2. Kodaira次元0のファイバーを、実際のHodge lineに置き換える

相対飯高写像を $X \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} Y$ とすると、 $\dim W_y = r$ 、非常に一般の g ファイバー G の対数飯高次元は0となる。十分可除な次数の相対生成形式 s の根を取り、その固有指標の最高Hodge部分を使う。これは全最高Hodge空間が1次元という主張ではない。係数1がある場合には開ファイバーの混合Hodge構造を使い、唯一の非零純粋重み部分へ移す。FFの延長定理は、この同定を境界上でも保持するために使われる。

Lemmas 2.6, 2.8–2.10 · pp. 9–15 · FF, Theorem 1.1 (iii), (iv) · p. 2

境界 T は、元の形式の許容極とHodge延長の二つの付値を比較して決める。原典§2.6.3の記号で

$$\alpha_D = \min_{E \mapsto D} \frac{l_E + \Delta_E}{a_E}, \quad \beta_D = \min_{E \mapsto D} \frac{l_E + 1 - a_E}{a_E}, \quad T_D = \alpha_D - \beta_D.$$

ここで $a_E = \text{ord}_E(g^*D)$ 、 $l_E = m^{-1} \text{ord}_E(s \wedge g^*\omega^m)$ で、 ω は底の局所的な通常の体積形式である。SNCに整えた全空間の全成分を最小値に含める。これにより $B(g, \Delta) \leq T \leq 1$ となり、十分可除な q について

$$H^0(W, q(K_W + T + M)) \simeq H^0(X_0, q(K_{X_0} + \Delta_0))$$

が得られる。底の余次元2以上へ落ちる未検査の素因子は参照空間上で例外的であるため、まず X_0 へ降下し、余次元2を越えて延長する。この参照空間の指定が、一般点の公式から実際の切断空間へ戻る接続を担う。

Proposition 2.7 · (2.12), (2.14), (2.16) · pp. 10, 13–17

3. 相対的な切断比較から、一般型ファイバーの加法性に必要な条件を得る

Proposition 2.7(iv)は Y 上の直像も同定し、切断の比を保つ。相対飯高像の次元が $r = \dim W_y$ なので、 $K_W + T + M$ は非常に一般の h ファイバー上でbigとなる。一方、Lemma 2.12の重み付き重複度の積の比較は $B(h, T) \geq C$ を与え、 Y の余次元2以上へ落ちる W の素因子にも係数1を与える。どちらも加法性の適用仮定である。

Proposition 2.7(iv) · Lemma 2.12 · pp. 10, 17; (6.3)–(6.5) · pp. 39–40

4. Period底上の随伴正值性を供給する

Theorem 3.1は、純粹・実偏極可能な変動の複素直和因子に属する最高Hodge lineから、変更後に $M = p^*P$ 、 P nef、 $K_S + a_0P$ bigとなる滑らかな射影底 S を与える。整格子は周囲の変動に要求され、複素直和因子自体が有理的である必要はない。

証明では有理随伴因子の全periodから商を作る。Vilのコンパクト化とBCのMoishezon性を用いて射影モデルへ移り、非自明な局所モノドロミーを持つ被約境界 D_S について $K_S + D_S$ bigを得る。有限で非自明なモノドロミーもこの境界に含める。Lemma 4.6はBT等を用い各成分で $\nu(P|_{D_i}) < \nu(P)$ を主張する。Lemma 4.7の切断数評価では、 t に関する主項の次数 $\nu(P)$ が境界除去で失う項の次数を上回り、 $K_S + a_0P$ のbignessが得られる。選んだlineの写像の階数と、全period写像の階数は区別されている。

Theorem 3.1 · pp. 17–18; Proposition 4.5 · Lemmas 4.6–4.7 · pp. 25–31 · Vil, Theorem 2.19 · p. 16 · BC, Theorem 1.1 / Corollary 1.3 · pp. 1–2 · BT, Theorem 1.1 · p. 2

5. 加法性を適用して、切断を元の空間に戻す

以上でProposition 3.4の仮定が揃い、次節の切断操作が

$$\kappa(W, K_W + T + M) \geq r + \kappa(Y, K_Y + C) \geq r + b$$

を与える。Proposition 2.7と例外的降下でこの線形系を元の (X, Δ) へ戻す。全段階で切断の比と像の次元を保持するので、同じ下界が主定理の左辺に移る。 S が点の場合は M が有理的に自明となり、Proposition 3.2を直接用いる。

Propositions 3.2, 3.4 · pp. 18–20; §6 · (6.6) · p. 40

得た下界を対数的底へ移すのが第4節である。途中のTheorem 3.1はWVの制限上のHodge比較にも渡される。

Ol, §6 · pp. 39–41 · WV, Theorem 3.8 / Proposition 3.9 · p. 21

3. Proposition 3.4の核心 — Ample捻りを固定切断で消す

証明対象：Proposition 3.4 · pp. 19–20

$D_W = K_W + T$ 、 $M = p^*P$ とする。 h のファイバー上で $D_W + M$ がbigであることから出発する。原稿は κ の極限連続性を使わず、係数を有理数で固定して二つの線形系を掛け合わせる。

Proposition 3.4

$h : W \rightarrow Y$ を滑らかなコンパクト Fujiki class C 多様体間の連結ファイバーをもつ全射とする。 T, C はそれぞれ W, Y 上の有理 SNC 境界（係数 $[0, 1]$ ）で、 $C \leq B(h, T)$ とする。 Y の余次元 2 以上へ写るすべての W の素因子 E について $T_E = 1$ を仮定する。 $p : W \rightarrow S$ は滑らかな射影多様体への連結ファイバーをもつ全射で、 P は S 上の nef な有理 line、 $M = p^*P$ とする。ある有理数 $a_0 > 0$ で $K_S + a_0 P$ が big であり、 $K_W + T + M$ が非常に一般の h ファイバー上で big ならば、

$$\kappa(W, K_W + T + M) \geq \dim(W/Y) + \kappa(Y, K_Y + C).$$

最後の項が $-\infty$ なら不等式は自動的である。 S が点なら $M \sim_{\mathbb{Q}} 0$ となる。

Proposition 3.4 · pp. 19–20

ファイバー上の bigness を少し残す

$$D_W = K_W + T, \quad M = p^*P, \quad 0 < c < 1$$

$$(D_W + cM)|_{W_y} \text{ big}, \quad A \text{ ample on } S$$

一般の境界 Q_η を加えて一般型ファイバーの加法性を適用
Prop. 3.2, p. 18; (3.5), p. 19; §5, pp. 31–38

正の捻りで十分な切断の比を得る

$$E_+(\eta) = D_W + cM + \eta p^*A$$

$$\kappa(W, E_+(\eta)) \geq r + \kappa(Y, K_Y + C) \quad (\eta \in \mathbb{Q}_{>0})$$

p の一般ファイバーで非消滅を得て、big な底の捻りを使う
Lem. 3.3, pp. 18–19; (3.6)–(3.7), p. 20
[Fuj] Thm. 1.1, pp. 1–2

負の捻りの切断を一つ作る

$$a > \max\{1, a_0\}, \quad H = K_S + aP - \lambda A \text{ big}$$

$$E_- = D_W + aM - \lambda p^*A, \quad 0 \neq e \in H^0(W, qE_-)$$

M の係数を 1 にし、 p^*A の係数を 0 にする
(3.8), p. 20

有理係数を固定して正確に相殺する

$$\theta = \frac{1-c}{a-c}, \quad \eta = \frac{(1-c)\lambda}{a-1}$$

$$D_W + M = (1-\theta)E_+ + \theta E_-, \quad 0 < \theta < 1$$

十分可除な n を取り、共通因子を切断の比から消す
Prop. 3.4, following (3.8), p. 20

固定切断の乗法で像の次元を保持

$$H^0(W, n(1-\theta)E_+) \xrightarrow{\cdot e^{n\theta/q}} H^0(W, n(D_W + M))$$

$$\kappa(W, D_W + M) \geq r + \kappa(Y, K_Y + C)$$

随伴加法性：正のample捻りの線形系と負の捻りの固定切断を合わせる

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 一般型加法性で、正の捻りを持つ線形系を作る

big錐の開性から $0 < c < 1$ を選び、 $D_W + cM$ を非常に一般の h ファイバー上で big に保つ。 S 上の ample 因子 A と任意の有理数 $\eta > 0$ について、 $cP + \eta A$ は ample である。一般の有理因子 $Q_\eta \sim_{\mathbb{Q}} cM + \eta p^* A$ を選ぶと $T + Q_\eta$ は SNC 境界のままで、既存の係数 1 と orbifold 基底の下界を保つ。Proposition 3.2 により

$$\kappa(W, D_W + cM + \eta p^* A) \geq r + \kappa(Y, K_Y + C).$$

この Proposition 3.2 を非射影底上で示すため、§5 では水平境界だけを少し減らして klt 一般ファイバーにし、Lemma 5.2 で射影的な最大変動安定族へ比較する。KP の Theorem 8.1 と Corollary 8.3 が相対対数標準因子の bigness を供給する。有限被覆上で得た形式は有限群の不変式により降下し、Lemma 5.4 がファイバー上の像の次元を保つ。底の因子上では $C \leq B(h, T)$ 、余次元 2 以上では $T_E = 1$ が積の極を許容範囲に収める。§5 の加法性は、射影的な原定理を元の class C 族へそのまま適用しているわけではない。

Proposition 3.2 · p. 18; (3.5) · p. 19; Lemmas 5.2–5.5 · pp. 32–38 · KP, Theorem 8.1 / Corollary 8.3 · p. 40

2. 弱正值性で、負の捻りの切断を一つ確保する

前段の非零切断を非常に一般の p ファイバーへ制限すると、底からの捻りが消え、 D_W の相対非消滅が得られる。 $a > \max\{1, a_0\}$ と十分小さい有理数 $\lambda > 0$ を選び、 $H = K_S + aP - \lambda A$ を big にする。Lemma 3.3 は Fuj の弱正值性を用いて

$$E_- = D_W + aM - \lambda p^* A = K_{W/S} + T + p^* H$$

の正の倍に非零切断を与える。平坦化後に残る極が元の滑らかな W 上で例外的であることを使い、ここでも固定空間へ降下する。

Lemma 3.3 · pp. 18–19; (3.6)–(3.7) · p. 20 · Fuj, Theorem 1.1 · pp. 1–2

3. 二つの捻りを正確に相殺し、切断の比を保存する

$$\theta = \frac{1-c}{a-c}, \quad \eta = \frac{(1-c)\lambda}{a-1}, \quad E_+ = D_W + cM + \eta p^* A$$

と置くと、 $0 < \theta < 1$ で

$$D_W + M = (1-\theta)E_+ + \theta E_-.$$

$0 \neq e \in H^0(W, qE_-)$ を一つ固定する。十分可除な n について $e^{n\theta/q}$ による乗法は

$$H^0(W, n(1-\theta)E_+) \hookrightarrow H^0(W, n(D_W + M))$$

を与える。 e の零点の外では共通因子が比から消えるため、前段の像の次元がそのまま残る。 P の semiamplessness を経由する必要はない。

Proposition 3.4 · (3.8) と直後の乗法 · p. 20

固定切断による乗法が像の次元を保つため、第2節の二つの正值性入力を主定理の下界へ合流できる。

Ol, Proposition 3.4 · §6 · pp. 19–20, 40

4. Corollary 6.2の証明 — 対数的底との比較

証明対象：Corollary 6.2 · pp. 40–41 仮定・結論を参照する。

必要なのは D_Y を一つのモデルの境界に含めることに加え、その比較を不変量 $\kappa(f \mid D_X)$ に移すことである。

被約境界の支持条件

$$\text{Supp}(f^* D_Y) \subseteq \text{Supp}(D_X)$$

$$f : X \rightarrow Y, \quad \Delta = D_X$$

旧成分と例外成分に係数 1 を付けて比較する
Lem. 6.1, p. 40

Neat モデルで無限重複度を使う

$$q : Y' \rightarrow Y, \quad E_Y = (q^{-1} \text{Supp } D_Y)_{\text{red}}$$

$$B(f', \Delta') \geq E_Y$$

対数形式を引き戻し、neat モデル上の等式を使う
(2.2), p. 5; Lem. 6.1, p. 40
[Cam] Cor. 4.11, p. 49

不変な底項へ移す

$$\kappa(f \mid D_X) \geq \kappa(Y, K_Y + D_Y)$$

$\Delta = D_X$ として orbifold 劣加法性へ代入
Thm. 1.1, p. 3; Cor. 6.2, pp. 40–41

主定理を対数対に適用する

$$\kappa(X, K_X + D_X) \geq \kappa(F, K_F + D_F) + \kappa(Y, K_Y + D_Y)$$

対数劣加法性：係数1からorbifold基底の比較を得て主定理を適用する

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. Neatモデルで対数多重標準切断を引き戻す

Lemma 6.1でneatモデル $f' : (X', \Delta') \rightarrow Y'$ を取り、 $q : Y' \rightarrow Y$ 、 $E_Y = (q^{-1} \text{Supp } D_Y)_{\text{red}}$ とする。 E_Y の各成分を支配する全空間の素因子には係数1が付くので $B(f', \Delta') \geq E_Y$ である。対数体積形式の引き戻しは切断の比を保存する。Camのneatモデル上の等式により

$$\kappa(f \mid D_X) \geq \kappa(Y, K_Y + D_Y)$$

となる。

Lemma 6.1 · p. 40; (2.2) · p. 5 · Cam, Corollary 4.11 · p. 49

2. 主定理へ代入し、開多様体へ移す

Theorem 1.1に $\Delta = D_X$ を代入する。滑らかな準射影多様体 $U \rightarrow V$ の優越射で一般ファイバーが幾何学的連結なら、グラフと境界を解消した整合的コンパクト化により Corollary 6.2の仮定を満たす。従って非常に一般の v について $\bar{\kappa}(U) \geq \bar{\kappa}(U_v) + \bar{\kappa}(V)$ を得る。境界を0とすれば複素数上の通常劣加法性となる。

Corollary 6.2の証明と直後の議論 · pp. 40–41

この下界はWVのparameter field構成と、RAの独立した上界を等号にする帰結で使う。

WV, Theorem 2.1 · p. 6 · RA, Corollary 1.2 / §7.6 · pp. 2, 50

class Cの場合も、neatモデルでの境界比較とTheorem 1.1への代入は同じであり、底と全空間の射影性を追加しない。これがCorollary 6.2のコンパクトclass Cの結論を与える。

5. Corollary 6.3の証明 — 幾何学的一般ファイバーと体の変更

証明対象：Corollary 6.3 · p. 41 仮定 · 結論を参照する。

複素数上の非常に一般のファイバーで得た不等式を、幾何学的一般ファイバーの切断空間を介して標数0の代数閉体へ移す。

標数 0 のデータを有限生成体へ降下

$K \subset k$, $K/\mathbb{Q}$ finitely generated, $K \hookrightarrow \mathbb{C}$
 $f_K : (X_K, D_{X_K}) \longrightarrow (Y_K, D_{Y_K})$

滑らかさ・境界条件・連結ファイバーを保持
Cor. 6.2; proof of Cor. 6.3, p. 41

複素数上で対数不等式を適用

$$\kappa(X_{\mathbb{C}}, K + D_{X_{\mathbb{C}}}) \geq \kappa(F_{\mathbb{C}}, K + D_{F_{\mathbb{C}}}) + \kappa(Y_{\mathbb{C}}, K + D_{Y_{\mathbb{C}}})$$

各可除次数の基底変換と像の次元、可算個の例外集合を使う
Proof of Cor. 6.3, p. 41

非常に一般のファイバーから幾何学的一般ファイバーへ

$$\kappa(F_{\text{very general}}, K + D) = \kappa(F_{\overline{\eta}}, K + D)$$

非消滅と完備線形系の像の次元を保存
Cor. 6.3, p. 41

切断空間の体拡大不変性で元の体に戻す

$$\begin{aligned} H^0(V, mL) \otimes_K K' &\simeq H^0(V_{K'}, mL_{K'}) \\ \kappa(X, K_X + D_X) &\geq \kappa(F_{\overline{\eta}}, K + D_F) + \kappa(Y, K_Y + D_Y) \\ D_X = D_Y = 0 &\text{ で通常劣加法性} \end{aligned}$$

標数0への移行：次数ごとの基底変換と有限生成体への降下

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 各次数の切断と像の次元を比較する

複素射影族で各可除次数にコホモロジーと基底変換を適用し、相対有理写像の像の次元が一定となる開集合を選ぶ。可算個の例外集合を除けば、非常に一般のファイバーと幾何学的一般ファイバーの飯高次元が一致する。体拡大 $K \subseteq K'$ については

$$H^0(V, \mathcal{O}_V(mL)) \otimes_K K' \simeq H^0(V_{K'}, \mathcal{O}_{V_{K'}}(mL_{K'}))$$

により、非消滅と完備線形系の像の次元が保たれる。

Corollary 6.3の証明 · p. 41

2. 有限生成体上に降下して複素不等式を適用する

f 、射影埋込み、境界を $\mathbb{Q}$ 上有限生成な部分体 $K \subset k$ へ降下し、 $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ を選ぶ。滑らかさ・幾何学的整性・境界条件に加え、 $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ も忠実平坦降下で保持する。複素数上の対数不等式を適用し、三つの飯高次元を体拡大不変性で k 上へ戻す。

Corollary 6.3の証明 · p. 41

通常・対数的な劣加法性を標数0の代数閉体上へ適用できる。PHの通常劣加法性とは別証明として比較する。

Ol, Corollary 6.3 · p. 41 · PH, Theorem 1.1 · p. 2

6. Whole-fiber variationへ渡す追加結果

§7は主定理後の追加経路である。Lemma 7.1は、標数0の体 K 上の滑らかな幾何学的整射影対 (J, D) で D が被約SNC、 $\kappa(J_{\bar{K}}, K_{J_{\bar{K}}} + D_{\bar{K}}) = 0$ の場合を扱う。最小の非消滅次数 p の形式の根から被覆を作り、適切な極境界 $D_{\tilde{N}}$ について

$$H^0(\tilde{N}, m(K_{\tilde{N}} + D_{\tilde{N}})) = K\Omega^m \quad (m \geq 1)$$

を示す。Corollary 7.2はこの全最高部分を整純粋変動のlineとして実現し、 M_W の有理延長との正規化を同定する。有理境界一般についてProposition 2.7が与える固有指標lineより強いが、被約性が必要である。Remark 7.3の $\mathbb{P}^1$ 上の5点・係数2/5の例では、根被覆の最高空間は6次元になる。

§7 · Lemma 7.1 · Corollary 7.2 · Remark 7.3 · pp. 43–46

WVのProposition 9.1はこれらをProposition 2.7、Lemma 7.4と併用する追加の相対飯高構成である。WVの主経路への入力として確認したものは、別にCorollary 6.2による下界とTheorem 3.1による随伴正值性である。§7のmoduli divisorとの同定に使うBFMTのTheorem 6.28、Lemma 7.4の全付値比較、およびWV §§8–9の全証明は今回未確認とする。BFMTの別のsemiampness定理を、この同定の入力と解釈しない。

WV, Theorem 2.1 · p. 6; Theorem 3.8 / Proposition 3.9 · p. 21; Proposition 9.1 · pp. 69–70 ·

Ol, Corollary 7.2 · pp. 45–46

Lemma 7.4は、実際の成分上の最小値と高いモデル上の全付値を許すlctを同じSNCモデルで比較する。WV Proposition 9.1はこの記述を初期境界の正規化に使い、切断比較と全最高lineを同じ準備の上で扱う。入力の記述とこの用途は照合した。上で未確認とした範囲は付値比較・モデル変更の全証明である。

Ol, Lemma 7.4 · pp. 46–47 · WV, Proposition 9.1の証明 · p. 70

7. どの論文が、どの段階を担うか

入力

FF Theorem 1.1(ii), (iv), p. 2

本稿での使用箇所と役割

§2.6.4–5, pp. 13–15 : 対数最高部分の標準延長と純粹重み部分への移行

今回の照合範囲

記述・使用箇所を照合。半安定化全体は未検証

入力

Vil Theorem 2.19, p. 16

本稿での使用箇所と役割

Proposition 4.5, pp. 25–26 : class C のperiod商をコンパクト化

今回の照合範囲

記述・使用箇所を照合

入力

BC Theorem 1.1 / Corollary 1.3, pp. 1–2

本稿での使用箇所と役割

Proposition 4.5およびTheorem 3.1の証明, pp. 26, 30–31 : 射影モデルと $K_S + D_S$ big

今回の照合範囲

記述・適用仮定を照合

入力

BT Theorem 1.1, p. 2

本稿での使用箇所と役割

Lemma 4.6, p. 27 : line写像のファイバーのZariski閉包で期待次元を強制

今回の照合範囲

記述・適用箇所を照合。rank-loss証明全体は未検証

入力

KP Corollaries 6.19, 7.3, pp. 28–29; Theorem 8.1 / Corollary 8.3, p. 40

本稿での使用箇所と役割

Lemmas 5.2, 5.4, pp. 34, 36 : 射影安定族の用意と相対対数標準因子のbigness

今回の照合範囲

記述・最大変動・klt一般ファイバーの適用条件を照合

入力

Fuj Theorem 1.1, pp. 1–2

本稿での使用箇所と役割

Lemma 3.3, pp. 18–19 : bigな底の捻りを加えた非消滅

今回の照合範囲

記述・class Cのlc対／射影底の条件を照合

入力

Cam Corollary 4.11, p. 49

本稿での使用箇所と役割

(2.2), p. 5; Lemma 6.1, p. 40 : neatモデルで不変な底項を計算

今回の照合範囲

記述・使用箇所を照合。neat-model理論全体は未検証

カタログ033ではOI Corollary 6.2からWV Theorem 2.1へ、OI Theorem 3.1からWV Theorem 3.8へ入力する。RAではCorollary 6.2をCorollary 1.2の加法性にだけ使用し、上界Theorem 1.1の入力とはしない。PHは通常劣加法性の別証明として紹介されている。034のLAやKähler原稿への接続は別の結果単位で扱い、OI→LA→SchnellをOI→Schnellの直接依存に置き換えない。

WV · pp. 6, 21, 69–70 · RA · pp. 2, 50 · OI · pp. 5, 41

8. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1 · pp. 2–3 — 主定理の仮定・結論を確認し、下記の証明箇所と対応させる
- Proposition 3.4 · pp. 19–20 — 余次元2の境界条件と、固定切断で捻りを相殺する操作を読む

- Corollary 6.2 · pp. 40–41 — 係数1の境界条件から対数的底の下界へ移る
- Corollary 6.3 · p. 41 — 通常・対数的な結論を幾何学的一般ファイバーと体拡大で移す

原稿はOpenAI、2026年9月26日版、参考文献込み55ページ。参照commitは

fd4aeeb2ee4fc729c18d98444fed42fd0529eeeb。まず§6 pp. 39–40で入力 of 合流を読み、Proposition 2.7 pp. 10–17の固定参照空間への切断比較、Proposition 3.4 pp. 19–20の相殺へ戻ると論証を追いやす。二つの正值性入力は§4 pp. 20–31と§5 pp. 31–38で証明される。

今回読解した核心は、§2のモデル規約・相対飯高帰着・付値比較と降下、§3の効果性と相殺、§4のperiod商・rank-lossの適用部分・境界切断数評価、§5の安定族比較の記述と構成の主要段階・有限降下・極の検査、§6の主定理とCorollaries 6.2–6.3の証明である。§7はLemma 7.1とCorollary 7.2の主張・証明経路を読んだ。上表の外部入力は記述と使用箇所を照合した。

有理随伴因子の構成全体、Lemma 4.6の有限モノドロミーを含む全rank-loss論証、半安定化と全ての標準延長の技術的接続、安定族比較の全パラメータ空間構成、Lemma 7.4・Appendix A、coreのCorollaries 6.4–6.5の全証明、外部文献の証明全体は独立検証していない。この概説は原稿の主張と論証を案内する初稿であり、全証明の正しさの認定を意味しない。記録していない論文間の関係は未調査である。

原稿全体

Logarithmic Kodaira dimension and whole-fiber variation

対数的飯高系が検出する体から、全ファイバーの双有理的定義体へ

非負の対数的小平次元を持つ底上の射影的ファイブレーションについて、原稿は小平次元の下界に全幾何学的一般ファイバーのvariationを加える。証明は、対数的切断からparameter fieldを構成し、最小指数のroot coverの双有理的constancy、markingによる飯高底の固定、有限被覆の降下を順に組み合わせる。

原稿の著者: OpenAI · 2026-09-26 · 75 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む ↗](#)

1. 主要結果

以下は原稿の主張であり、番号・仮定・結論を原典に合わせる。 $\Omega = \overline{\mathbb{C}(V)}$ を固定し、 F を幾何学的一般ファイバーとする。variationは

$$\mathrm{Var}(f) = \min_{\substack{\mathbb{C} \subset L \subset \Omega \\ L \text{ algebraically closed}}} \{ \mathrm{trdeg}_{\mathbb{C}} L : F \text{ is birational to } (F_L)_{\Omega} \text{ for some } F_L/L \}.$$

これは F 全体の関数体を測る。period像、canonical model、相対飯高底だけのvariationとは区別する。

式(1.1) · p.2

Theorem 1.1 — Logarithmic variation

$f : U \rightarrow V$ を滑らかな連結複素準射影多様体の間の、連結ファイバーを持つ射影的全射とする。 $\bar{\kappa}(V) \geq 0$ ならば

$$\bar{\kappa}(U) \geq \kappa(F) + \max\{\bar{\kappa}(V), \mathrm{Var}(f)\}.$$

f のsmoothness、 F のabundanceやgood minimal modelの存在は仮定しない。 $\kappa(F) = -\infty$ の場合は原稿の $(-\infty) + a = -\infty$ の規約による。

Theorem 1.1 · p.2

Corollary 1.2 — Projective Iitaka–Viehweg inequality

$f: X \rightarrow Y$ を滑らかな連結複素射影多様体の間の、連結ファイバーを持つ全射とし、 $\kappa(Y) \geq 0$ とする。このとき

$$\kappa(X) \geq \kappa(F) + \max\{\kappa(Y), \text{Var}(f)\}.$$

Corollary 1.2 · p.2

Corollary 1.3 — Variation and birational isotriviality

$f: U \rightarrow V$ を滑らかな連結複素準射影多様体の間の、連結ファイバーを持つ smooth projective な全射とする。すべての閉ファイバーが non-uniruled ならば

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}(V) = -\infty &\implies \text{Var}(f) < \dim V, \\ \bar{\kappa}(V) \geq 0 &\implies \text{Var}(f) \leq \bar{\kappa}(V). \end{aligned}$$

さらに V が Campana-special ならば $\text{Var}(f) = 0$ 。特に $\bar{\kappa}(V) = 0$ ならば双有理的に isotrivial である。ここで isotriviality は variation が 0 という意味であり、族の同型による自明化は主張しない。この帰結は LA と Taji の定理を追加で使い、Theorem 1.1 の証明には入らない。

Corollary 1.3 と証明 · p.5

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Logarithmic Kodaira dimension and whole-fiber variation](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- **OI** OpenAI — Orbifold and logarithmic Iitaka subadditivity：カタログ内の入力・追加結果・別経路。使用箇所と種別は本文の表を参照。2026-09-26。
- **Fuj** Osamu Fujino — Notes on the weak positivity theorems：負の ample 捻りを伴う切断の構成に使う弱正値性。version 0.54, 2015-06-30。
- **Del** Pierre Deligne — Théorie de Hodge II：有限指標。不変サイクルの外部原典の照合は未了。1971, printed p.47 = PDF p.44。
- **DHP** Jean-Pierre Demailly; Christopher D. Hacon; Mihai Păun — Extension theorems, non-vanishing and the existence of good minimal models：極を持つ因子の収縮に用いる拡張。arXiv:1012.0493v2。
- **PT** Mihai Păun; Shigeharu Takayama — Positivity of twisted relative pluricanonical bundles and their direct images：相対 Bergman weight と一様評価。arXiv:1409.5504v1。

- **BCHM** Caucher Birkar; Paolo Cascini; Christopher D. Hacon; James McKernan — Existence of minimal models for varieties of log general type : big klt adjoint modelの存在。arXiv:math/0610203v2, 81 pages。
- **KP** Sándor J. Kovács; Zolt Patakfalvi — Projectivity of the moduli space of stable log-varieties and subadditivity of log-Kodaira dimension : 射影安定族の正值性と marked modelのvariationの下界。62-page author manuscript; hash pinned。
- **Han** Masaki Hanamura — Structure of birational automorphism groups, I: non-uniruled varieties : cocycleの定数化。原定理の記述は未照合。1988, DOI 10.1007/BF01394338。
- **SGA1** Alexander Grothendieck et al. — Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1) : 高さ1の非分岐性からのpurity。原典記述は未照合。2003 re-edition; arXiv:math/0206203v2。
- **Lan** Aaron Landesman — Invariance of the tame fundamental group under base change between algebraically closed fields : 有限étale被覆・射・群作用の基底拡大に関する降下。arXiv:2005.09690v3。
- **BDPP** Sébastien Boucksom; Jean-Pierre Demailly; Mihai Păun; Thomas Peternell — The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension : 擬有効性と可動曲線、またはnon-unirulednessの比較。arXiv:math/0405285v1。
- **LA** OpenAI — Log abundance in characteristic zero : Corollary 1.3にgood minimal modelを供給する帰結への入力。2026-09-24。
- **Taj** Behrouz Taji — Birational geometry of smooth families of varieties admitting good minimal models : good minimal modelを持つsmooth族のvariationとspecial baseの帰結。arXiv:2005.01025v4。
- **RA** OpenAI — The reverse logarithmic Kodaira inequality and additivity : カタログ内の入力・追加結果・別経路。使用箇所と種別は本文の表を参照。2026-09-26。
- **PH** OpenAI — Projective Hodge lines and ordinary Iitaka subadditivity : カタログ内の入力・追加結果・別経路。使用箇所と種別は本文の表を参照。2026-09-27。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1の全体像

証明対象 : Theorem 1.1 · p. 2 仮定・結論を参照する。

$\kappa(F) = -\infty$ の場合は主張の規約により不等式が自動的に成り立つ。以下は $d = \kappa(F) \geq 0$ の場合を扱い、OIの下界が与える底の項と、全ファイバーの降下が与えるvariationの項を合わせる。

証明の道筋。 主定理は、parameter fieldの構成、小平次元0のファイバーのconstancy、元の全ファイバーの降下の三段階からなる。境界を空にする帰結と、LA・Tajiを使うsmooth familyの帰結は、主定理の後で分けて扱う。

$d = \kappa(F) \geq 0$ の場合に、切断系から得た体 $b = \overline{\mathbb{C}(T_0)}$ を、元の全幾何学的一般ファイバー F の双有理的定義体にする。 J は相対飯高写像の小平次元0のファイバーであり、 F 全体とは区別する。

対数的飯高系を元の底と比較する

$$d = \kappa(F) \geq 0, \quad \bar{\kappa}(V) \geq 0, \quad X' \longrightarrow W \longrightarrow Z$$

対数下界と形式の比例性から像の族を測る
[\[OI\] Cor. 6.2, pp. 40–41](#); [\[WV\] Prop. 2.10, pp. 12–14](#)

parameter field を底の関数体に埋め込む

$$\mathbb{C}(T_0) \subseteq \mathbb{C}(Y), \quad \bar{\kappa}(U) = d + \dim T_0$$

制限上の随伴比較、極の収縮、群作用を保つ降下
[\[OI\] Thm. 3.1, pp. 17–18](#); [\[WV\] Prop. 3.12, p. 23](#)
[\[WV\] Cor. 3.16, p. 25](#); [Thm. 4.1 / Prop. 4.10, pp. 26, 42–43](#)

飯高ファイバー方向で最初の双有理的 constancy

$M|_{W_z} \sim_{\mathbb{Q}} 0 \implies$ 最高 line は平坦・有限指標
 root cover の constancy から J の constancy へ

J の constancy だけで止めず、座標・作用・被覆を保つ
[\[WV\] Prop. 6.2, pp. 47–51](#); [Lem. 7.1 / Prop. 7.2, pp. 52–56](#)

飯高底の座標と全関数体を固定する

$b = \overline{\mathbb{C}(T_0)}, \quad C_* \rightarrow P_0, \quad V' \rightarrow P_0$
 marking、定数 cocycle、動く因子上の非分岐性

被覆と群作用を降下し、元の幾何学的一般ファイバーと同定
[\[WV\] Prop. 7.3 / §7.4, pp. 57–59](#)

全ファイバーの variation を下界へ入れる

$$\mathrm{Var}(f) \leq \dim T_0, \quad \bar{\kappa}(U) \geq d + \max\{\bar{\kappa}(V), \mathrm{Var}(f)\}$$

parameter field、最初のconstancy、markingと有限被覆の降下を結ぶ全体図

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 切断系から候補の体を得る

OIの対数下界を使い、 $\mathbb{C}(T_0) \subseteq \mathbb{C}(Y)$ と $\bar{\kappa}(U) = d + \dim T_0$ を示す。これは次節で扱う構成である。

[Proposition 2.10](#) · [Remark 2.11](#) · [pp.12–14](#) · [OI, Corollary 6.2](#) · [pp.40–41](#)

2. Hodge lineの自明性を双有理的constancyへ移す

制限したroot-cover変動にOIの随伴比較を適用し、その全最高lineを平坦・有限指標にする。極の収縮と局所flowを経て J を一定にする部分は第4節の核心である。

Propositions 3.9, 3.12 · Corollary 3.16 · Proposition 4.10 · pp.21–25, 42–43 · OI, Theorem 3.1 · pp.17–18

3. 座標・群作用を保って全ファイバーへ戻る

markingは飯高底の座標と有限正規化を固定する。定数cocycleと動く因子の慣性を処理して被覆・作用を降下し、元の F の関数体を同定する。第5節で $\text{Var}(f) \leq \dim T_0$ を得る。

Proposition 6.2 · Propositions 7.2–7.3 · §7.4 · pp.47–59

この不等式を切断系の次元等式と合わせてTheorem 1.1を得る。Corollary 1.2は境界0の特殊化、Corollary 1.3はLA・Tajiを加える別の帰結である。以下のparameter field、最初のconstancy、全ファイバーの降下の各図で、この三段階を展開する。

3. Proposition 2.10 — parameter fieldの構成

証明対象：Proposition 2.10 · pp. 12–14

$d = \kappa(F) \geq 0$ とする。まず絶対対数的飯高底 Z と元の底 Y を同じ関数体の中で比較し、 $\bar{\kappa}(U) - d$ 次元の体を $\mathbb{C}(Y)$ の部分体として得る。この段階ではファイバーのconstancyを使わない。

Proposition 2.10

Theorem 1.1の仮定で $d = \kappa(F) \geq 0$ とする。被約逆像境界を保つSNCコンパクト化 $(X, D_X) \rightarrow (Y, D_Y)$ を取り、Proposition 2.7のモデルで $q: X' \rightarrow Z$ を絶対対数飯高写像、 $q = h \circ x$ 、 $X' \xrightarrow{x} W \xrightarrow{g} Y$ とする。 x, g, h は連結ファイバーをもち、 $W \rightarrow Y \times Z$ は像上 generically finiteである。 $r = \dim W_z$ 、 $p_1 = \dim Y - r$ と置く。

これらのモデルとともに滑らかな連結射影多様体 S, T_0 を選び、双有理射 $\rho: S \rightarrow Y$ 、 $g = \rho \circ g_S$ とする写像 $g_S: W \rightarrow S$ 、および S, Z から T_0 への射を得る。誘導射 $W \rightarrow (S \times_{T_0} Z)_{\text{main}}$ は優越的かつgenerically finiteで、

$$\dim(W/Y) = d, \quad \dim T_0 = p_1, \\ \dim Z = d + \dim T_0$$

を満たす。 $S \rightarrow T_0$ と $Z \rightarrow T_0$ の一般ファイバーは幾何学的整で、 $D_S = (\rho^* D_Y)_{\text{red}}$ をSNCにする、非常に一般の t で $\kappa(S_t, K_{S_t} + D_S|_{S_t}) \geq 0$ となる。特に $\mathbb{C}(T_0) \subseteq \mathbb{C}(S) = \mathbb{C}(Y)$ を元の体の中で得る。

Proposition 2.10 · pp. 12–14

01 対数的下界と非零の底の形式

$$d = \kappa(F) \geq 0, \quad \bar{\kappa}(U) \geq d + \bar{\kappa}(V),$$

$$0 \neq \xi \in H^0(Y, m(K_Y + D_Y)).$$

係数 1 の逆像境界を保つ。合成体の相対代数閉包で中間体を選ぶ。

[\[OI\] Cor. 6.2, pp.40–41](#) [Lemma 2.6; Prop. 2.7, pp.8–10](#)

02 絶対飯高写像と元の射を合わせる

$$X' \xrightarrow{x} W, \quad W \xrightarrow{g} Y, \quad W \xrightarrow{h} Z, \quad q = hx.$$

$$\dim Z = \bar{\kappa}(U), \quad W \longrightarrow Y \times Z \text{ は像上 generically finite.}$$

$g^*\xi$ を $p_1 = \dim Y - \dim W_z$ 個の底方向で収縮する。
 x_z への劣加法性で、非負の二項がともに 0 となる。

[Lemmas 2.8–2.9, pp.10–12](#)

03 飯高ファイバー上の切断を比例させる

$$\kappa(J) = \kappa(J, K_J + D'|_J) = 0,$$

$$\kappa(W_z, K_{W_z} + D_W^0|_{W_z}) = 0, \quad D_W^0 = (g^*D_Y)_{\text{red}}.$$

小行列式の比の一定性から像の族の階数を得る。
 $\mathbb{C}(Y) \subseteq \mathbb{C}(S) \subseteq \mathbb{C}(X)$ と相対代数閉性が $\mathbb{C}(S) = \mathbb{C}(Y)$ を与える。

[Prop. 2.10, \(2.10\)–\(2.12\), pp.12–14](#)

04 像の族から、元の底の部分体を得る

$$\mathbb{C}(T_0) \subseteq \mathbb{C}(Y), \quad \bar{\kappa}(U) = d + \dim T_0.$$

残る目標： F を $b = \overline{\mathbb{C}(T_0)}$ 上へ降下。

対数的劣加法性、二つの飯高系、像の族からparameter fieldを得る

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 係数1の境界を保って二つの写像を合わせる

$f^{-1}(V) = U$ となるSNCコンパクト化 $(X, D_X) \rightarrow (Y, D_Y)$ を選ぶ。OI Corollary 6.2を使うと $\bar{\kappa}(U) \geq d + \bar{\kappa}(V)$ 。 $K_X + D_X$ の絶対飯高写像を解消して $q: X' \rightarrow Z$ とし、 $\mathbb{C}(Y)\mathbb{C}(Z)$ の $\mathbb{C}(X)$ 内での相対代数閉包を使って $X' \xrightarrow{x} W \xrightarrow{h} Z$ 、 $g: W \rightarrow Y$ を構成する。これにより $W \rightarrow Y \times Z$ は像上generically finiteとなり、各写像の一般ファイバーの幾何学的整性も保たれる。

[Lemma 2.6, Proposition 2.7 · pp.8–10](#) [OI, Corollary 6.2 · pp.40–41](#)

2. 対数的な形式の収縮で像の族の階数を測る

$0 \neq \xi \in H^0(Y, m(K_Y + D_Y))$ を固定する。 $r = \dim W_z$ 、 $p_1 = \dim Y - r$ とすると、 p_1 個の Z 方向による $g^*\xi$ の収縮は W_z 上の非零対数的多重標準形式になる。 X'_z の対数的小平次元は0なので、劣加法性を x_z に使うと

$$\kappa(W_z, K_{W_z} + D_W^0|_{W_z}) = 0, \quad \kappa(J) = \kappa(J, K_J + D'|_J) = 0, \quad D_W^0 = (g^*D_Y)_{\text{red}}.$$

ここで J は x の幾何学的な一般ファイバーである。収縮で得た同次数の切断は比例するため、正規変形写像 $T_z Z \rightarrow N_{g(W_z)/Y, y}$ の最大小行列式の比は y に依存しない。その核の一定性がHilbert parameter mapの微分階数 p_1 を与える。

Lemmas 2.8–2.9、Proposition 2.10の証明 · pp.10–13

3. parameter fieldを元の底の中に埋め込む

像の族 $g(W_z)$ のparameter fieldを $\mathbb{C}(Z)$ 内で相対代数閉包にして T_0 を得る。普遍像の族の解消 S は Y にgenerically finiteだが、

$$\mathbb{C}(Y) \subseteq \mathbb{C}(S) \subseteq \mathbb{C}(W) \subseteq \mathbb{C}(X)$$

の最初の拡大が代数的であり、 $\mathbb{C}(Y)$ は $\mathbb{C}(X)$ 内で相対代数閉だから $\mathbb{C}(S) = \mathbb{C}(Y)$ 。これが単なる次元計算より強い接続である。 $\dim(W/Y) = d$ と合わせて

$$\mathbb{C}(T_0) \subseteq \mathbb{C}(Y), \quad \bar{\kappa}(U) = \dim Z = d + \dim T_0$$

を得る。残る目標は $b = \overline{\mathbb{C}(T_0)} \subseteq \Omega$ 上への全ファイバーの降下である。

Proposition 2.10、Remark 2.11 · pp.12–14

得られた $b = \overline{\mathbb{C}(T_0)}$ を全ファイバーの定義体候補に固定する。次に J のconstancyを示し、markingと有限被覆の降下で元の F まで戻る。

WV, §§3–7 · pp. 14–59

Proposition 2.10の最後の結論には、固定した非零底切断 ξ を S へ引き戻し、非常に一般の S_t へ非零に制限する。随伴により $\kappa(S_t, K_{S_t} + D_S|_{S_t}) \geq 0$ となり、後のmarked model比較でも底の非消滅を保つ。

4. Theorem 4.1 / Proposition 4.10 — root coverから最初のconstancyへ

証明対象：Theorem 4.1 · p. 26

J の最小のordinary pluricanonical indexを使うことにより、固有成分だけでなく最高Hodge成分全体をrank oneにする。その平坦性から双有理的constancyへ進む箇所が§4の解析的議論である。

Theorem 4.1

$\pi^\circ : P^\circ \rightarrow C^\circ$ を滑らかな連結複素代数曲線上の、連結ファイバーをもつsmooth projective morphismとする。非常に一般のファイバー D は $\kappa(D) = 0$ 、 $h^0(D, K_D) = 1$ を満たすとし、 $n = \dim D$ と置く。全最高Hodge束 $F^n(R^n\pi_*^\circ \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{C^\circ})$ が平坦なlineで、そのモノドロミー指標が有限であると仮定する。

このとき有限拡大 $L/\mathbb{C}(C^\circ)$ と滑らかな連結射影多様体 $D_0/\mathbb{C}$ が存在し、 L へ拡大した一般ファイバーは $(D_0)_L$ と双有理になる。有限群 Γ が底上で作用する場合はこの同定を Γ 同変に取れる。有限なファイバーごとの双有理作用も、同変な滑らかな射影モデルに替えて扱える。

Theorem 4.1 · p. 26

Proposition 4.10

Propositions 2.7–2.10で固定した $x : X' \rightarrow W$ 、 $h : W \rightarrow Z$ と、その小平次元0の幾何学的一般ファイバー J の族を考える。非常に一般の $z \in Z$ に対し、 W_z 上のこの族の幾何学的一般ファイバーは、 $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影多様体の基底拡大と双有理である。相対的にも、 $\mathbb{C}(Z)$ を代数閉包へ拡大した h ファイバー上で、 x の幾何学的一般ファイバーはその代数閉体上で双有理的に一定となる。

Proposition 4.10 · p. 43

01 最小指数で root cover を取る

$p = \min\{m > 0 : H^0(J, mK_J) \neq 0\}, \quad \eta^{\otimes p} = \pi^* \omega_J.$
 $h^0(\tilde{J}, mK_{\tilde{J}}) = 1 \ (m > 0) :$ 最高 Hodge 成分全体が直線.

Hodge norm の可積分閾値が parabolic order を与える。
 相対形式を掛け、固定された $X_{*,z}$ に切断比を移す。

[Lemma 3.1; Props. 3.3, 3.5, 3.7, pp.14–21](#)

02 実際の位数で切断系を比較する

$B_P = 1 - \lambda_P + t_P, \quad M \sim_{\mathbb{Q}} \sum_P (\lambda_P - 1)P, \quad B \geq D_W^0,$
 $\kappa(W_z, K_{W_z} + B_z + M_z) \leq 0.$

制限した integral variation に比較を適用。weak positivity から
 $\kappa(D + cM_z) \geq \dim R$ となり、 $\dim R > 0$ は上界と矛盾する。

[\[OI\] Thm. 3.1, pp.17–18](#) [\[Fuj\] Thm. 1.1, pp.1–2](#)

[Props. 3.9, 3.12; Lemma 3.11, pp.21–24](#)

03 制限後の随伴比較を補間する

$D = K_{W_z} + B_z \sim_{\mathbb{Q}} D_{\text{eff}}, \quad M_z \sim_{\mathbb{Q}} a^* A,$
 $D + M_z = c^{-1}(D + cM_z) + (1 - c^{-1})D,$
 $\dim R = 0 \implies M_z \sim_{\mathbb{Q}} 0, \quad \kappa(D) = 0.$

曲線上で半正曲率を消し、制限上の rank-one subsystem に有限指標定理を使う。

[Cors. 3.13–3.16, pp.24–25](#) [\[Del\] Cor. 4.2.8\(iii\)\(b\), PDF p.44](#)

04 最高成分の flatness と有限指標を得る

$\deg M_z|_C = 0 \implies$ projective top line が一定、指標は有限.

拡張・Bergman weight・先頭係数を固定する最小化で極を固定成分にする。
 big adjoint model で収縮し、flow を代数化する。巡回作用を保ち商を取る。

[\[DHP\] Thm. 4.1, pp.20–21](#) [\[PT\] Thm. 4.2.7, p.36](#)

[\[BCHM\] Thm. 1.2\(2\), p.5](#) [Thm. 4.1; Prop. 4.10, pp.26–43](#)

05 極を収縮して最初の constancy を得る

$\sigma_S(K_D) > 0$ (極の因子), $K_D + \varepsilon H$ big klt.
 J は h -fiber 方向で幾何学的に双有理一定.

最小root cover、制限上のHodge lineの自明性、解析的収縮による最初のconstancy

図を拡大 ↗ [TeXソース](#) ↓

1. 相対形式の実際の位数をHodge lineに結び付ける

最小の $p > 0$ と $0 \neq \omega_J \in H^0(J, pK_J)$ から作る連結巡回被覆の解消 $\tilde{J}$ は $h^0(\tilde{J}, mK_{\tilde{J}}) = 1$ をすべての $m > 0$ で満たす。root formが最高形式空間全体を生成する。各底因子 P に対し、実際のsource成分での最小値 t_P と、上位モデルも含む閾値 λ_P を分ける：

$$t_P = \min_{Q \subset X', Q \rightarrow P} \frac{r_Q + d_Q}{m_Q}, \quad \lambda_P = \inf_{Q \rightarrow P} \frac{1 + r_Q}{m_Q}, \quad B_P = 1 - \lambda_P + t_P.$$

$m_Q = \text{ord}_Q(x^*P)$ 、 $r_Q = p^{-1} \text{ord}_Q(\omega_J)$ は実際の相対標準束で測り、 $d_Q = \text{coeff}_Q(D')$ 。Hodge normの可積分指数からparabolic line M の位数は $\lambda_P - 1$ となる。したがって

$T = \sum t_P P \sim_{\mathbb{Q}} B + M$ 、 $0 \leq B \leq 1$ 、 $B \geq D_W^0$ が得られる。

Lemma 3.1、Propositions 3.3 · 3.5 · pp.14–19

2. 制限したvariationに随伴比較を適用し直す

ω_J を掛けて切断を固定された $X_{*,z}$ に移すと、切断比を保つ比較から

$$\kappa(W_z, K_{W_z} + B|_{W_z} + M|_{W_z}) \leq 0.$$

一方、 $D = K_{W_z} + B|_{W_z}$ は有理的にeffective。OI Theorem 3.1を制限後のintegral variationに適用して $M|_{W_z} \sim_{\mathbb{Q}} a^*A$ 、 $K_R + cA$ bigを得る。Fujによるweak positivityと切断の移送から

$\kappa(D + cM) \geq \dim R$ 。 $c \geq 1$ に対する

$$D + M = c^{-1}(D + cM) + (1 - c^{-1})D$$

はこの下界を $D + M$ にも移すので、 R は点でなければならない。結果は $M|_{W_z} \sim_{\mathbb{Q}} 0$ と

$\kappa(W_z, D) = 0$ 。曲線上の曲率とDelの有限指標定理を制限上で使い、entire top lineのflatnessとfinite monodromyを得る。

Propositions 3.7 · 3.9 · 3.12、Lemma 3.11、Corollaries 3.13–3.16 · pp.20–25 · OI, Theorem 3.1 · pp.17–18 · Fuj, Theorem 1.1 · pp.1–2 · Del, Corollary 4.2.8(iii)(b) · printed p.47/PDF p.44

3. 平坦な最高形式から、極を収縮する双有理的モデルへ

曲線上で有限指標を消し、不変サイクルから得る大域形式 Θ のkernelを使って $d\pi(v) = \partial_t, \iota_v \Theta = 0$ となる有理ベクトル場を作る。 v は相対最高形式の零因子に極を持ちうる。DHPの拡張を用いる

Lemma 4.4と、PTのrelative Bergman weightを用いるLemmas 4.6–4.7が、極を持つ因子 S には正の漸近固定次数 $\sigma_S(K_D) > 0$ があることを導く。特に重みは最後のファイバーを選ぶ前に構成され、正則化、次数、cutoffの極限の順序が固定される。

§§4.1–4.5 · pp.26–40 · DHP, Theorem 4.1 · pp.20–21 · PT, Theorem 4.2.7 · Remark 4.3.1 · pp.36–37

有限個の極に共通の小さい $\varepsilon > 0$ を選び、 $K_D + \varepsilon H$ の big klt adjoint model を BCHM で作る。正の固定次数を持つ極は収縮され、正規性によってベクトル場は余次元2以上にも延びる。その局所 flow と graph の代数的 spreading から、有限体拡大後の双有理的 constancy を得る。巡回群作用を保ってこれを root cover に適用し、不変関数体を取ると J が h -fiber 方向に一定となる。ここまでで固定したのは J であり、元の F 全体の降下は次節に残る。

Theorem 4.1 の証明、Corollary 4.9、Proposition 4.10 · pp.40–43 · BCHM, Theorem 1.2(2) · p.5

固定されたのは小平次元0の J である。次の降下では、飯高底の座標と群作用を保持して全幾何学的な一般ファイバーを固定する。

WV, §6 導入 · §7.4 · pp. 46, 58–59

5. Proposition 7.3 — 飯高底を残した全ファイバーの降下

証明対象：Proposition 7.3 · pp. 57–59

$b = \overline{\mathbb{C}(T_0)}$ とし、 W, S, Z の T_0 上の幾何学的な一般ファイバーを H_0, I, P_0 と書く。 $p_I : H_0 \rightarrow I$ 、 $a_0 : H_0 \rightarrow P_0$ を誘導射とする。 $H_0 \rightarrow I \times_b P_0$ は generically finite、 $\dim P_0 = d$ である。目標は J の constancy を P_0 の座標と両立させることである。

Proposition 7.3

§§6–7 の設定で $b = \overline{\mathbb{C}(T_0)} \subseteq \Omega$ を固定する。Proposition 6.2 の marking と有限 parameter 拡大後、元の飯高底の有限正規化を V'/b 、parameter variety を I/b とし、 $k = b(V')$ 、 $L_0 = b(I)$ 、 $K = L_0(V')$ と置く。 J/K は小平次元0のファイバーで、 $K(J)$ は元の全空間から来る体である。Lemma 7.1 の定数 cocycle をもつ有限 Galois splitting と、Proposition 7.2 のすべての有限 parameter 拡大後の動く因子での非分岐性を用いる。

L_0 の代数閉包 Λ に対し、 $k \subseteq F_b$ を満たす有限生成体 F_b/b と同型

$$\begin{aligned} & \text{Frac}(\Lambda \otimes_b F_b) \\ & \simeq \text{Frac}(\Lambda \otimes_{L_0} K(J)). \end{aligned}$$

が存在する。 $\Lambda = \Omega$ と同定すると右辺は元の全幾何学的な一般ファイバーの関数体であり、 $\text{Var}(f) \leq \dim T_0$ となる。

Proposition 7.3 · pp. 57–59

01 係数で識別できる marking を加える

$$H_0 \longrightarrow I \times_b P_0, \quad \dim P_0 = d, \quad b = \overline{\mathbb{C}(T_0)},$$

$$(x_0 = 0), (x_j = 0), (x_0 + x_j = 0) : \quad d + \text{Var}(\text{marked model}) \leq \kappa(K_{H_0} + \Delta) \leq d.$$

marked model の variation を 0 にし、和の marking で残る定数を固定する。
最初の constancy から reference fiber J_0/k を選ぶ。

[KP] Thm. 9.9, p.50 Props. 5.3, 6.2, pp.45–51

02 写像・有限正規化・旧境界の像を固定する

$$x_j/x_0 = c_j f_j, \quad f_j \in b(C_*), \quad c_j \in b,$$

$$V' \longrightarrow P_0 \text{ finite}, \quad k = b(V'), \quad K = k(I), \quad J_0/k.$$

双有理群の abelian 部分で cocycle を平均する。旧境界像の固定性と
位数の等号は、任意の有限 parameter 拡大後にも実際の Q を与える。

Lemmas 6.4, 7.1, pp.51–54 [Han] Thms. 2.1–2.2

[Han] の原典記述は未照合。

03 定数 cocycle と multiplicity-one 最小化因子を揃える

$$\tilde{K}/K \text{ Galois}, \quad \rho_g = z_g s_g, \quad (z_g, g|_{k'}) \text{ faithful},$$

$$P \text{ moving : } B_P = 0, \quad m_Q = 1, \quad (1 + r_Q)/m_Q = \lambda_P.$$

定数族の special fiber は閾値の一意的な最小化因子。
慣性の一致と cocycle の faithfulness が非分岐性を強制する。

Prop. 7.2, (7.12)–(7.16), pp.55–56

04 動く因子上の分岐を消す

$$m_{Q'} = e_Q m_Q / e, \quad e_Q = e, \quad I_{Q'} = I_{P'} = 1.$$

固定分岐を除き purity を適用。有限 étale 被覆・群作用・係数体を
同時に降下し、不変式を取る。飯高底の k 座標を保持する。

[Lan] Thm. 1.1, p.2 Prop. 7.3; Section 7.4, pp.57–59

[SGA1] X, Thm. 3.1 原典記述は未照合。

05 全ファイバーの関数体を降下する

$$k = b(V') \subseteq F_b = E_1(J_0)^{G_1},$$

$$\text{Frac}(\Omega \otimes_b F_b) \simeq \text{Frac}(\Omega \otimes_{\mathbb{C}(Y)} \mathbb{C}(X)),$$

$$\text{Var}(f) \leq \dim T_0 \implies \bar{\kappa}(U) \geq d + \max\{\bar{\kappa}(V), \text{Var}(f)\}.$$

markingによる有限正規化の固定と、動く因子上の非分岐性から全関数体を降下させる

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 座標と和のmarkingで有限正規化を回復する

P_0 の埋込みの座標 $x_0, \dots, x_N$ に対し、 $x_0 = 0$ 、 $x_j = 0$ 、 $x_0 + x_j = 0$ の引戻しに区別可能な小さい係数を付ける。旧境界を少し下げてgeneric pairをkltにし、さらに一般のmarkingを加えてbigにする。 a_0 のファイバー上では追加した線束は自明なので、上界 $\kappa(H_0, K_{H_0} + \Delta) \leq d$ は残る。KPを使う Proposition 5.3は $d + \text{Var}(\text{marked model})$ という下界を与えるため、marked modelは有限parameter拡大後に一定となる。この b 上のmarked model pairの台となる正規射影多様体を C_* と置く。

Proposition 5.3、Proposition 6.2 · pp.45–50 · KP, Theorem 9.9 · p.50

座標因子は $x_j/x_0 = c_j f_j$ 、 $f_j \in b(C_*)$ までを固定し、和の因子が $c_j \in b$ を強制する。したがって写像 $C_* \rightarrow P_0$ 自体が降下し、その関数体での正規化 $V' \rightarrow P_0$ も固定される。旧境界の正係数の像も b 上の因子になる。ここで $k = b(V')$ 、 $K = k(I)$ と置くと、前節のconstancyを使ってreference variety J_0/k が得られる。markingはこの識別のための補助であり、最終的なファイバーには加えない。

Proposition 6.2、特に式(6.12) · pp.47–51

2. 非定数のcocycleを除き、動く因子の慣性を消す

Lemma 7.1はHanの双有理自己同型群の構造を入力とする。恒等成分がabelian varietyであることと、 $A_1(\overline{K})/A_1(\overline{k})$ の一意可除性を使い、有限商上の平均でcocycleの非定数部分をcoboundaryにする。得られる有限Galois splittingと定数cocycleはfaithfulな組 $(z_g, g|_{k'})$ を持つ。

Lemma 7.1 · pp.52–54

このHanの原定理の照合は保留している。

動く因子 P では旧境界係数 $B_P = 0$ 。位数公式の等号から、 $m_Q = 1$ で閾値 λ_P を達成する実際のsource成分 Q が存在する。splitting後の定数族ではspecial fiberが一意の最小化因子であり、

$$m_{Q'} = \frac{e_Q m_Q}{e}, \quad \frac{1 + r_{Q'}}{m_{Q'}} = e \frac{1 + r_Q}{m_Q} - (e - 1)$$

より $e_Q = e$ 。全空間と底の慣性が一致し、定数cocycleのfaithfulnessから慣性は自明となる。この議論を任意の有限parameter拡大後にも行うことが、代数閉包上のすべての動く因子を扱うために必要になる。

Corollary 3.4 · p.18、Lemma 6.4 · pp.51–52、Proposition 7.2 · pp.55–56

3. 被覆・作用・係数体をまとめて降下する

固定された分岐因子と特異部分を除いた $O \subset V'$ 上で、原稿はpurityによりsplitting coverを有限étaleとする。Lanの標数0での基底拡大不変性は被覆だけでなくその射も降下させるので、群作用と k' への写像を一緒に保持できる。連結成分の体 E_1 、その安定化群 G_1 を使って

$$F_b = E_1(J_0)^{G_1}, \quad k = b(V') \subseteq F_b,$$

を得る。有限群の不変式と体拡大の可換性、元のfield towerの同定により

$$\mathrm{Frac}(\Omega \otimes_b F_b) \simeq \mathrm{Frac}(\Omega \otimes_{\mathbb{C}(Y)} \mathbb{C}(X)).$$

右辺は元の全幾何学的一般ファイバーの関数体である。従って $\mathrm{Var}(f) \leq \mathrm{trdeg}_{\mathbb{C}} b = \dim T_0$ 。第3節の次元等式と劣加法性の下界を合わせてTheorem 1.1に到達する。

Proposition 7.3 · §7.4 · pp.57–59 · Lan, Theorem 1.1 · Remark 1.5 · pp.2–3

purityについては利用先の仮定確認まで、SGA1の原典記述の再照合は未実施である。

Theorem 1.1のvariationを含む下界が完成する。境界を空にしたCorollary 1.2はこの出力をそのまま使う。

WV, Theorem 1.1 / Corollary 1.2 · p. 2; §7.4 · p. 59

6. Corollary 1.2 : 境界を空にする

証明対象 : Corollary 1.2 · p. 2 仮定 · 結論を参照する。

射影的な X, Y には空のコンパクト化境界を用いる。variationを定義する幾何学的一般ファイバーとその定義体は変わらない。

01 射影的な設定に空の境界を選ぶ

$$f : X \longrightarrow Y, \quad \kappa(Y) \geq 0, \quad D_X = D_Y = 0.$$

滑らかな連結複素射影多様体、全射、連結ファイバー.

$\bar{\kappa}(X) = \kappa(X)$ 、 $\bar{\kappa}(Y) = \kappa(Y)$ 。定義体の不変量も同じ。

Thm. 1.1; Cor. 1.2 and proof, p.2

02 同じ全ファイバーの variation で特殊化する

$$\kappa(X) \geq \kappa(F) + \max\{\kappa(Y), \mathrm{Var}(f)\}.$$

空の境界によって対数的不等式を射影的不等式へ特殊化する

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 対数的小平次元を通常的小平次元に置き換える

$D_X = D_Y = 0$ ならば $\bar{\kappa}(X) = \kappa(X)$ 、 $\bar{\kappa}(Y) = \kappa(Y)$ 。仮定 $\kappa(Y) \geq 0$ はTheorem 1.1の底の条件そのものなので、その不等式が直ちにCorollary 1.2となる。

Corollary 1.2の証明 · p.2、§7.4 · p.59

非負の小平次元の底を持つ射影的族に、通常のIitaka–Viehweg不等式を適用できる。追加の相対飯高経路を主証明の前提にする必要はない。

WV, Corollary 1.2 · p. 2; §9導入 · p. 69

7. Corollary 1.3 : good modelを介するsmooth familyの帰結

証明対象 : Corollary 1.3 · p. 5 仮定 · 結論を参照する。

ここではすべての閉ファイバーのnon-unirulednessと、族のsmoothnessを使う。主定理の証明にこの経路を逆向きに組み込まない。

01 すべての閉ファイバーの non-uniruledness を使う

$f : U \rightarrow V$ smooth projective, F_v non-uniruled (v closed).
滑らかな連結複素準射多様体、全射、連結ファイバー.

射影多様体に対する uniruledness 判定の対偶を使う。

[BDPP] Cor. 0.3, p.2

02 標準因子を pseudo-effective にする

K_{F_v} pseudo-effective (v closed).

smooth canonical good-model の存在定理を各閉ファイバーへ適用。

[LA] Cor. 11.2, pp.73–74 Cor. 1.3 proof, p.5

03 semiample なモデルと例外項の比較式を得る

$p^*K_{F_v} = q^*K_{M_v} + E$, $E \geq 0$, E q -exceptional.
 K_{M_v} semiample.

任意の M_v -exceptional 因子を含む共通解消で discrepancy を比較。

Cor. 1.3 proof, p.5

04 Taji に必要な canonical な good model を確認する

$a(P, M_v) = a(P, F_v) + \text{coeff}_P E \geq 0$.

smooth family と各ファイバーの good model を入力する。
 $\bar{\kappa}(V) = 0$ でも variation は 0。主定理の証明には用いない。

[Taj] Thms. 1.1–1.2 and variation, p.2

05 同じ whole-fiber variation の上界を得る

$\bar{\kappa}(V) = -\infty \Rightarrow \text{Var}(f) < \dim V$,
 $\bar{\kappa}(V) \geq 0 \Rightarrow \text{Var}(f) \leq \bar{\kappa}(V)$,
 V Campana-special $\Rightarrow \text{Var}(f) = 0$.

non-uniruledな閉ファイバーからLAのgood modelを得てTajiの定理に接続する

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. LAの比較式からcanonicalなgood modelを得る

各閉ファイバー F_v にBDPPを適用すると K_{F_v} はpseudo-effective。LA Corollary 11.2はsemiampleな K_{M_v} と共通解消上の

$$p^*K_{F_v} = q^*K_{M_v} + E, \quad E \geq 0, \quad E \text{ is } q\text{-exceptional}$$

を供給する。さらに任意の M_v -exceptional な素因子 P に対して

$$a(P, M_v) = a(P, F_v) + \text{coeff}_P E \geq 0$$

なので M_v は canonical となり、Taji の意味での good minimal model を得る。

Corollary 1.3 の証明 · p.5 · BDPP, Corollary 0.3 · p.2 · LA, Corollary 11.2 · pp.73–74

2. whole-fiber variation について Taji を適用する

Taj Theorems 1.1–1.2 は、good minimal model を持つ smooth projective family に、special base での双有理的 isotriviality と対数的小平次元による二分岐の上界を与える。Taji の p.2 の定義も全ファイバーの双有理的定義体を測るため、不変量を取り替えず適用できる。 $\bar{\kappa}(V) = 0$ では非負性 $\text{Var}(f) \geq 0$ と合わせて 0 となる。Corollary 1.3 · p.5 · Taj, Theorems 1.1–1.2 と variation の定義 · p.2

smooth な場合で $\kappa(F) \geq 0$ 、 $\bar{\kappa}(V) \geq 0$ に限れば、RA Corollary 1.2 の加法性と Theorem 1.1 を比較しても同じ上界が得られる。これは別経路であり、負の底やすべての special base の分岐を代替しない。

比較段落 · p.5 · RA, Corollary 1.2 · p.2

底の対数的小平次元 0 では双有理的 isotriviality を得る。負の底や special base まで含む主張には、この節の LA · Taji 経路の仮定を保持する。

WV, Corollary 1.3 · p. 5

8. §§8–9 の追加結果

主定理は §7.4 で完結する。Theorem 8.1 は、 $g: W \rightarrow Y$ 、 $h: W \rightarrow Z$ 、effective SNC rational boundary $B \geq (g^* D_Y)_{\text{red}}$ 、 $\kappa(Y, K_Y + D_Y) \geq 0$ の下で、 $M = h^* A$ を任意の nef rational divisor の引戻しに一般化する。ここで多様体は滑らかな複素射影多様体、両射は連結ファイバーを持つ全射、 D_Y は reduced SNC、 B の係数は $[0, 1]$ に属し、ここでは $d = \dim(W/Y)$ とする。 $K_Z + aA$ が十分大きい有理数 a で big、 $K_W + B + M$ が Y 上 big ならば、第二飯高底 U_2 （原稿では U ）を構成し

$$\kappa(W, K_W + B + M) = \dim U_2 = d + \dim T_0, \quad \kappa(Y, K_Y + D_Y) \leq \dim T_0$$

を得ると主張する。最後の補間と同じモデル上の $P_{U_2}(c)$ と $P_{U_2}(a)$ を用いる。今回読んだのは定理文と証明末尾であり、§8 の volume 評価 · 有限群の effective action の次数評価の証明は未読である。

Theorem 8.1 · pp.59–60、証明末尾 · p.69

§9 は通常の相対飯高写像にこの構成を適用する。OI Proposition 2.7、Lemma 7.1、Corollary 7.2、Lemma 7.4 が、section comparison と reduced-root の entire top line を供給する引用先として指定される。Corollary 9.4 は絶対飯高体と中間体を同定し、 $\mathbb{C}(T_0) = \mathbb{C}(Y) \cap \mathbb{C}(U_2)$ を $\mathbb{C}(X)$ 内で回復して Proposition 7.3 につなぐ。追加の OI 入力、定理文と Proposition 9.1 での使用箇所を照合した。これらの入力の全証明および §§8–9 の全推論は独立検証していない。

9. どの論文が、どの段階を担うか

入力結果

OI Corollary 6.2, pp.40–41

本稿での使用箇所・役割

Theorem 2.1、§2：対数的下界と0次元の飯高ファイバー

関係と確認範囲

direct。入力の記述・適用を照合

入力結果

OI Theorem 3.1, pp.17–18

本稿での使用箇所・役割

Theorem 3.8、Propositions 3.9・3.12：制限上の随伴比較

関係と確認範囲

direct。integral ambientとcomplex summandの条件を照合

入力結果

Fuj Theorem 1.1, pp.1–2

本稿での使用箇所・役割

Lemma 3.11, pp.22–23：bigな底の捻りで切断を作る

関係と確認範囲

direct。lc・Cartier倍・射影的な底の条件を照合

入力結果

Del Corollary 4.2.8(iii)(b), printed p.47

本稿での使用箇所・役割

Corollaries 3.14–3.16 : rank-one subsystemの有限指標

関係と確認範囲

direct. 該当記述と適用を照合。不変サイクルの引用は別途未照合

入力結果

DHP Theorem 4.1, pp.20–21

本稿での使用箇所・役割

Lemma 4.4, pp.30–31 : 零因子への制限が非零という仮定から切断を拡張

関係と確認範囲

direct. 条件(19)–(23)と適用を照合

入力結果

PT Theorem 4.2.7 · Remark 4.3.1, pp.36–37

本稿での使用箇所・役割

Lemma 4.6, pp.34–35 : relative Bergman weightと一様上界

関係と確認範囲

direct. 定理文と適用箇所を照合

入力結果

BCHM Theorem 1.2(2), p.5

本稿での使用箇所・役割

§4.6, p.40、§6, p.48 : big klt adjoint model

関係と確認範囲

direct. モデル存在の記述と適用を照合。ample modelの補助番号は未照合

入力結果

KP Theorem 9.9, p.50

本稿での使用箇所・役割

Proposition 5.3, p.46 → Proposition 6.2 : marked modelのvariationの下界

関係と確認範囲

direct。補助底因子 $M = 0$ 、klt big generic pairの条件を照合

入力結果

Han Theorems 2.1–2.2

本稿での使用箇所・役割

Lemma 7.1, p.53 : 双有理群の恒等成分とcocycle

関係と確認範囲

direct。利用先の引用・論証を確認。原典の記述は未照合

入力結果

SGA1 X, Théorème 3.1

本稿での使用箇所・役割

Proposition 7.3, p.57 : 高さ1で非分岐な有限正規化にpurityを適用

関係と確認範囲

direct。利用先の仮定提示のみ確認

入力結果

Lan Theorem 1.1 · Remark 1.5, pp.2–3

本稿での使用箇所・役割

Proposition 7.3, pp.57–58 : 有限étale被覆と射の降下

関係と確認範囲

direct。標数0への特殊化と使用を照合

入力結果

BDPP Corollary 0.3、LA Corollary 11.2、Taj Theorems 1.1–1.2

本稿での使用箇所・役割

Corollary 1.3, p.5

関係と確認範囲

consequence。入力の記述・接続を照合。主定理には使わない

入力結果

PH Lemma 8.4・Theorem 8.1

本稿での使用箇所・役割

Remark 3.17, p.25

関係と確認範囲

alternative。入力記述と使用箇所を照合。PH記事の確認記録を含む。入力の証明は未検証

入力結果

OI Proposition 2.7、Lemma 7.1、Corollary 7.2、Lemma 7.4

本稿での使用箇所・役割

Proposition 9.1, pp.69–70

関係と確認範囲

consequence（追加結果内の直接入力）。入力記述・使用箇所を照合。全証明は未検証

未記録の関係は未調査であり、依存なしを意味しない。入力の記述と適用の照合は、その入力定理自体の全証明検証とは区別する。

10. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1・p. 2 — 主定理の仮定・結論を確認し、下記の証明箇所と対応させる
- Proposition 2.10・pp. 12–14 — parameter fieldが元の底の部分体となる理由と次元等式を読む
- Theorem 4.1・p. 26 — 平坦な全最高lineから、極の収縮・同変flowによる双有理的constancyへ進む

- [Proposition 7.3](#) · pp. 57–59 — 固定した飯高底の座標を残し、被覆と群作用を全ファイバーへ降ろす
- [Corollary 1.2](#) · p. 2 — 境界を空にして射影的なIitaka–Viehweg不等式を得る
- [Corollary 1.3](#) · p. 5 — good modelとTajiの入力が負の底・special baseの帰結も担うことを読む
- parameter fieldの埋込み : [Proposition 2.10](#)、式(2.12)、pp.12–14。
- actual minimumとall-valuation threshold : [Propositions 3.3](#) · [3.5](#)、pp.17–19。これが[Lemma 6.4](#)のmultiplicity-one minimizerに戻る。
- 第一のconstancy : [Proposition 3.12](#)、[Theorem 4.1](#)、[Lemmas 4.6–4.7](#)、[Proposition 4.8](#)、pp.23–43。
- 第二のconstancyと全関数体 : [Proposition 6.2](#)、[Lemma 6.4](#)、[Propositions 7.2–7.3](#)、pp.47–59。

今回、主定理・帰結の定理文、§2のparameter field、§3のroot cover・位数比較・制限上の自明性、§4の解析的constancyの主要論証、§§5–7のmarked modelと降下を読んだ。表に示した外部結果は記述と使用箇所を照合した。これは論証の経路の概説であり、全推論の独立検証ではない。

§4の正則化・ L^2 解法の全見積り、Hodge extensionと境界成長の外部結果、Hanamuraの原定理、SGA1のpurityの原典、§8の中間証明、§9の追加OI入力的全証明検証は残る。外部入力的全証明、専門家査読、形式検証は未実施。§§8–9の確認範囲は主証明と分けて上記に記した。

WVとOI等の033原稿は[commit fd4aeeb2ee4fc729c18d98444fed42fd0529eeeb](#)、LAは既存034記事と同じ[commit adc7f1241b42e322a6451854ab7e4b4c146bf78a](#)に固定した。ページは各PDFのページ番号であり、Deligneのみ誌面番号も併記する。

追加経路ではOI [Proposition 2.7](#)、[Lemma 7.1](#)、[Corollary 7.2](#)、[Lemma 7.4](#)の記述と本稿[Proposition 9.1](#)での使用箇所を照合した。全付値比較・BFMTとの全接続・§§8–9の全証明は未検証である。

OI, [Proposition 2.7](#) · [Lemma 7.1](#) · [Corollary 7.2](#) · [Lemma 7.4](#) · pp.10–17, 43–47 ·
WV, [Proposition 9.1](#) · pp.69–70

The reverse logarithmic Kodaira inequality and additivity

指定点での零点を保つ切断構成と、period twistの除去

開いた底の上で全境界stratumまで滑らかな射影的対に対し、原稿は対数的小平次元の上界を示す。核心は、全空間の一つのpluriformから元の底のpluriformを作り、指定ファイバー上の消滅を底の指定点での消滅へ移すProposition 1.3にある。上界の論証を先に追い、OIの下界を加える加法性は最後に分けて扱う。

原稿の著者: OpenAI · 2026-09-26 · 51 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 逆向きの対数的小平次元不等式

X, Y を滑らかな連結射影的複素多様体、 $f: X \rightarrow Y$ を連結ファイバーをもつ全射とする。 $E \subset X$ と $D \subset Y$ はreduced SNC因子で、零因子も許し、

$$\mathrm{Supp}(f^*D) \subseteq \mathrm{Supp}(E)$$

を仮定する。 $V = Y \setminus \mathrm{Supp} D$ 上では、 X と、 E の成分の任意の非空な共通部分の各既約成分を $f^{-1}(V)$ に制限したものが、すべて V 上滑らかであるとする。非常に一般の $y \in V$ に対して $F = X_y$ 、 $E_F = E|_F$ と置き、

$$L_X = K_X + E, \quad L_Y = K_Y + D, \quad L_F = K_F + E_F$$

と書く。このとき

$$\kappa(X, L_X) \leq \kappa(Y, L_Y) + \kappa(F, L_F).$$

右辺のどちらかの項が $-\infty$ なら、すべての整数 $m > 0$ について $H^0(X, mL_X) = 0$ である。点の小平次元を0、 $(-\infty) + a = -\infty$ ($a = -\infty$ も含む) とする。境界条件は台の包含であり、 f^*D の重複度を捨てる条件ではない。 D 上の滑らかさ、abundance、semiampleness、good minimal modelは仮定しない。

Theorem 1.1 · (1.1)–(1.2) · p. 2

Corollary 1.2 — 対数的加法性

Theorem 1.1と同じ対・射・stratumの滑らかさの仮定、および同じ $-\infty$ の規約の下で、

$$\kappa(X, K_X + E) = \kappa(Y, K_Y + D) + \kappa(F, K_F + E_F).$$

これは上界に[OI, Corollary 6.2]を加えた帰結である。OIはTheorem 1.1の上界には使われない。

Corollary 1.2 · p. 2, §7.6 · p. 50 · OI, Corollary 6.2 · pp. 40–41

Proposition 1.3 — 元の底上の切断と指定点での零点

f, E, D はTheorem 1.1の仮定を満たし、ある整数 $m > 0$ について $0 \neq s \in H^0(X, mL_X)$ が存在するとする。このとき $\kappa(Y, L_Y) \geq 0$ である。さらに $\kappa(Y, L_Y) = 0$ かつ、ある $y \in V$ について $s|_{X_y} = 0$ なら、ある整数 $a > 0$ と切断

$$0 \neq \tau \in H^0(Y, aL_Y), \quad \tau(y) = 0$$

が存在する。 y は元の V の任意の該当点でよく、 s から作る巡回被覆の滑らかな開集合に属する必要はない。

Proposition 1.3 · p. 3

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 The reverse logarithmic Kodaira inequality and additivity を指します。外部入力には次の略号を使います。

- OI OpenAI — Orbifold and logarithmic Iitaka subadditivity : カタログ内の入力・追加結果・別経路。使用箇所と種別は本文の表を参照。2026-09-26。
- FF14 Osamu Fujino; Taro Fujisawa — Variations of mixed Hodge structure and semipositivity theorems : Hodge · weight filtrationの局所自由性。Author manuscript 2014-03-17, vmhs-sp108.pdf。
- FF17 Osamu Fujino; Taro Fujisawa — A short remark on [2] : FF14のstrictnessに関する補足。2017-07-07。

- **BBT** Benjamin Bakker; Yohan Brunebarbe; Jacob Tsimerman — o-minimal GAGA and a conjecture of Griffiths : 格子を保つperiod像の代数化とHodge lineの正値性。arXiv:1811.12230v3, 2022-10-23。
- **FG** Osamu Fujino; Yoshinori Gongyo — On the moduli b-divisors of lc-trivial fibrations : 負の境界を許すlc-trivial fibrationのb-nef性。Annales de l'Institut Fourier 64 (2014), 1721–1735; published PDF with cover。
- **CP** Frédéric Campana; Mihai Păun — Foliations with positive slopes and birational stability of orbifold cotangent bundles : orbifold余接束の次数評価と相対擬有効性。arXiv:1508.02456v4, 2017-06-14 (RA bibliography cites Publ. Math. IHÉS 129 (2019))。
- **BDPP** Sébastien Boucksom; Jean-Pierre Demailly; Mihai Păun; Thomas Peternell — The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension : 擬有効性と可動曲線、またはnon-unirulednessの比較。arXiv:math/0405285v1。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1の証明 — 小平次元の符号による帰着

証明対象 : Theorem 1.1 · p. 2 仮定 · 結論を参照する。

証明の道筋。 まずProposition 1.3を入力として上界を導く。その入力の証明をHodgeベクトルから切断を構成する段階と、正次元period商の捻りを除く段階に分けて展開する。OIの下界を使うのは、最後の加法性の帰結である。

$\kappa_X, \kappa_Y, \kappa_F$ はそれぞれの対の対数的小平次元を表す。Proposition 1.3を入力とすれば、上界は切断の制限と底の対数的飯高ファイブレーションから得られる。

Theorem 1.1 小平次元の各場合を切断で比較する

$$\kappa_X = \kappa(X, L_X), \quad \kappa_Y = \kappa(Y, L_Y), \quad \kappa_F = \kappa(F, L_F).$$

A ファイバーが負の無限大

$$\kappa_F = -\infty.$$

非零の全空間切断なら、非常に一般のファイバー上にも非零切断が得られる。

[§2.2, p. 5](#)

非常に一般のファイバーへ制限

$$H^0(X, mL_X) = 0 \quad (m > 0).$$

B 底が負の無限大

$$\kappa_Y = -\infty.$$

非零の全空間切断から $\kappa_Y \geq 0$ 。

[Prop. 1.3, p. 3](#) [§2.2, p. 5](#)

底の非消滅との矛盾

$$H^0(X, mL_X) = 0 \quad (m > 0).$$

C 底の小平次元 0

$$\kappa_Y = 0, \quad h^0(Y, aL_Y) \leq 1.$$

全ての底切断の零因子を避ける $y \in V$ 。

$s|_{X_y} = 0$ なら、元の y で消える底切断を作り、点の選択に矛盾する。

[Prop. 1.3, p. 3](#)

[§2.3, \(2.3\)–\(2.5\), pp. 5–6](#)

全次数での制限の単射性

$$H^0(X, mL_X) \hookrightarrow H^0(F, mL_F).$$

$$\kappa_X \leq \kappa_F.$$

D 正の小平次元の底

$$k = \kappa_Y > 0, \quad q: Y' \rightarrow T, \quad \dim T = k.$$

$$\kappa(G, K_G + D'|_G) = 0.$$

誘導対は stratum の滑らかさを保つ。
線形系と $q \circ f'$ の合成像の次元を評価。

[§2.4, pp. 6–7](#)

飯高ファイバーで前段を使う

$$H = (q \circ f')^{-1}(t), \quad H \rightarrow G.$$

$$\begin{aligned} \kappa_X &\leq k + \kappa(H, K_H + E'|_H) \\ &\leq k + \kappa_F. \end{aligned}$$

END 全ての場合で同じ上界

$$\kappa_X \leq \kappa_Y + \kappa_F, \quad (-\infty) + a = -\infty.$$

上界の証明：負の無限大の二つの場合、底の小平次元0での単射性、正の場合の飯高帰着

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 負の無限大の二つの場合を切断の消滅として処理する

$\kappa_F = -\infty$ のとき、非零の全空間切断があれば、その非消滅集合の像は底の稠密開集合を含む。非常に一般のファイバーへの制限と随伴により $H^0(F, mL_F) \neq 0$ となり矛盾する。一方、 $\kappa_Y = -\infty$ のときは、非零の全空間切断から底の非消滅を与える Proposition 1.3 に矛盾する。どちらも全正次数での消滅を示している。

§2.2 · p. 5

2. 小平次元0の底で、同じファイバーへの制限を全次数で単射にする

$\kappa_Y = 0$ なら $h^0(Y, aL_Y) \leq 1$ である。非零切断の零因子は各次数で高々一つなので、全次数にわたるそれらの可算和を避け、ファイバーの各 plurigenus も非常に一般の値を取る点 y を選べる。制限の核に非零の s があれば、Proposition 1.3 が y で消える非零の底切断を作り、選び方に反する。したがって

$$H^0(X, mL_X) \hookrightarrow H^0(F, mL_F) \quad (m > 0), \quad \kappa_X \leq \kappa_F.$$

ここで必要なのは、切断ごとに変わる被覆の開集合ではなく、元の V の指定点で Proposition 1.3 が使えることである。切断環の有限生成性は用いない。

§2.3 · (2.3)–(2.5) · pp. 5–6

3. 正の小平次元を、飯高ファイバー上の小平次元0へ帰着する

$k = \kappa_Y > 0$ とし、対数的飯高写像を解消して $q: Y' \rightarrow T$ 、 $\dim T = k$ を得る。境界には狭義変換と被約例外因子を取り、全空間側も対応する解消 $f': X' \rightarrow Y'$ を行う。対数的切断空間は変わらない。非常に一般の q -ファイバー G は $\kappa(G, K_G + D'|_G) = 0$ である。 $H = (q \circ f')^{-1}(t)$ から G への射も、誘導境界を含めて必要な滑らかさを保つため、前段が適用できる。

$$\kappa(H, K_H + E'|_H) \leq \kappa_F, \quad \kappa_X \leq \dim T + \kappa(H, K_H + E'|_H) \leq k + \kappa_F.$$

最後の上界は全空間の線形系と $q \circ f'$ を組み合わせた像の次元評価である。 G が点の場合も含む。 H の小平次元が $-\infty$ なら、制限により全空間の切断そのものを排除する。

§2.1 · (2.1) · p. 5、§2.4 · pp. 6–7

この独立した上界を、第5節でOIの対数下界と合わせる。上界の核心は次節以降の Proposition 1.3 である。

RA, §2 · §7.6 · pp. 5–7, 50

3. Proposition 1.3の証明 — Hodgeベクトルから元の底の切断へ

証明対象：Proposition 1.3 · p. 3 仮定・結論を参照する。

非零切断 s を固定する。構成するHodgeベクトルは最高Hodge束全体を生成するとは限らない。このため、ベクトルの係数と、その射影方向が決める compact flag を保持する。以下の $\mathcal{E}_0$ は最高Hodge束であり、境界 E とは別の記号である。

START 全空間の一つの pluriform を固定する

$$0 \neq s \in H^0(X, mL_X), \quad V = Y \setminus \text{Supp } D.$$

巡回被覆の根を Hodge 類へ移し、非零の純 weight 商を取る。
半安定比較と部分束性により、各係数が正則に延長する。

[Prop. 3.1, Lem. 3.2, pp. 8–13](#) [\[FF14\] §4.9, pp. 24–25](#)

[\[FF17\] pp. 1–2](#)

01 純 weight 商で元の係数格子を保持する

$$u : \mathcal{O}_Y(-L_Y) \dashrightarrow \mathcal{E}^d, \quad \theta^j(u) : \mathcal{O}_Y(-L_Y) \dashrightarrow \mathcal{E}^{d-j} \otimes \Omega_Y^1(\log D)^{\otimes j}.$$

blowup 後も元の source line を使う。根の因子を割り出してから
weight 商へ射影し、斉次テンソル操作で零点を保つ。

[Lem. 3.3, \(3.15\), pp. 13–14](#)

02 指定点の零点を元の枠で保持する

$$u_* : \mathcal{O}_Y(-aL_Y) \dashrightarrow \mathcal{E}_0, \quad y \in V.$$

$$s|_{X_y} = 0 \implies \text{ord}_\tau(u_*) \geq ae/m > 0 \quad (t = \tau^e, m \mid e).$$

格子を保持した全 Lie period 像を代数化し、compact mark を加える。

[Prop. 4.1, pp. 14–15](#) [Lem. 4.7, pp. 19–20](#)

[\[BBT\] Thm. 1.1, p. 1](#)

03 全 Lie period と compact flag を記録する

$$Y \dashrightarrow S, \quad \mathcal{E}_0 \text{ は } S \text{ 上の変動から来る。}$$

定数枠の係数は全素因子で正則。
正の例外次数が元の点での零点を与える。

[§7.1, p. 43](#)

相対飯高の完全切断空間の比較と、
次図の数値的除去を使う。

[Prop. 6.3, pp. 40–43](#)

[Prop. 7.7, p. 49](#)

A S が点：非零の定数座標を選ぶ

$$0 \neq \tau \in H^0(Y, aL_Y).$$

$$s|_{X_y} = 0 \implies \tau(y) = 0.$$

B $\dim S > 0$ ：捻りを除く

$$L_W \text{ big} \implies$$

$$\kappa(Y, L_Y) \geq \dim W \geq \dim S > 0.$$

END 非消滅と、小平次元 0 の場合の指定点の零点

$$\kappa(Y, L_Y) \geq 0; \quad \kappa(Y, L_Y) = 0 \implies S = \text{pt.}$$

[Prop. 7.1, p. 43](#) [Prop. 1.3: proof, p. 50](#)

切断構成：元対数的係数格子と指定点の零点を保持し、period商が点か正次元かで分岐する

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 巡回被覆の新しい判別式を、底の極に加えない

s の m 乗根を取る被覆から対数的混合Hodge類を作り、非零となる純weight商へ射影する。得られる $u : \mathcal{O}_Y(-L_Y) \dashrightarrow \mathcal{E}^d$ とそのHiggs反復は、元の $\Omega_Y^1(\log D)$ の枠で係数を測る。原稿のProposition 3.1 は、任意の所定の高いモデルでも、この係数がunipotent化後のHodge延長内で正則であることを示す。

横断曲線で試す際、余接テンソルの枠は外部の引戻し束の枠として残す。被覆側の微分へ置き換えて割り戻さないで、元の V 内に現れた被覆の判別式が新たな極を生まない。純weightへの射影の正則性はLemma 3.2の部分束性に依存する。その入力はFF14の半安定対数的de Rhamとcanonical extensionの比較、およびFF17が補うstrictnessである。

Proposition 3.1 · Lemma 3.2 · pp. 8–13 · FF14, §4.9 · Lemma 4.10, Step 1 · pp. 24–31 · FF17 · pp. 1–2

2. 指定点のblowupでは、元のsource lineの枠を保つ

$s|_{X_y} = 0$ なら、相対SNCな滑らかなファイバーの近傍で s の係数は $\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_X$ に属する。 y をblowupし、例外因子に横断的な座標 t を取り、 $t = \tau^e$ 、 $m \mid e$ とする。元の L_X の枠で測る根 r は

$$(r/\tau^{e/m})^m = s/\tau^e$$

を満たし、右辺は正則である。正規性から $r/\tau^{e/m}$ も正則となる。weight商へ移す前にこの因子を割り出せるのはLemma 3.2の部分束性による。次数 a の斉次テンソル操作後にも、元の $\mathcal{O}_Y(-aL_Y)$ の引戻し枠で少なくとも $ae/m > 0$ の零点が残る。blowup後の新しい対数的標準束の枠へ置き換えると、この指定点の情報を失う。

Lemma 3.3 · (3.15) · pp. 13–14

3. period商が点なら係数を取り出し、正次元なら底の正の小平次元を示す

Proposition 4.1は斉次置換 $u_* : \mathcal{O}_Y(-aL_Y) \dashrightarrow \mathcal{E}_0$ と、全Lie periodおよびcompact flagを記録する連結商 S を作る。[BBT, Theorem 1.1]は、格子を保持した全Lie変動のperiod像の代数性に使う。最高Hodge束の行列式だけをperiod商として用いるわけではない。

S が点なら降下した変動は定数となる。定数枠での u_* の各座標は aL_Y の有理切断であり、全素因子での係数正則性と正規性から大域切断になる。非零座標を τ に選ぶ。前段の正の例外因子次数は元の点 y での消滅次数なので、 $s|_{X_y} = 0$ なら $\tau(y) = 0$ である。正次元の S に対しては次節が $\kappa_Y > 0$ を与える。したがって $\kappa_Y = 0$ なら点商の場合だけが残る、Proposition 1.3の両結論が得られる。

Proposition 4.1 · pp. 14–15, Lemma 4.7 · pp. 19–20, §7.1 · Proposition 7.1 · p. 43, §7.5 · pp. 49–50 · BBT, Theorem 1.1 · p. 1

指定点で消える底切断は、小平次元0の底で同じファイバーへの制限を全次数で単射にする。正次元period商の分岐は次節で処理する。

RA, §2.3 · Proposition 1.3の証明 · pp. 5–6, 50

4. Proposition 7.7 — 正次元period商と捻りの除去

証明対象 : Proposition 7.7 · pp. 49–50

$\dim S > 0$ とする。以下では適切なモデル上で $Y \xrightarrow{x} W \xrightarrow{h} S$ と書くが、切断の比較先は固定した元の対である。 $\geq_{\text{pe}}$ は差が擬有効であることを表す。

Proposition 7.7

Proposition 1.3 の非零の全空間 pluriform に付随する §§4–7 のデータを用いる。 S は全 Lie period と compact flag を記録する商、 $Y \xrightarrow{x} W \xrightarrow{h} S$ は相対飯高帰着、 L_W は固定した元の対 (Y, D) の完全切断空間を表す因子である（下の第1段）。 $\dim S > 0$ ならば

$$L_W \text{ は big, } \quad \kappa(Y, K_Y + D) \geq \dim W > 0.$$

適用される数値的な捻り除去は、次の Proposition 7.2 である。

Proposition 7.7 · pp. 49–50

Proposition 7.2

$h : W \rightarrow S$ を滑らかな射影多様体間の全射、 $\dim S > 0$ とする。 L は W 上の有理因子、 H は S 上の nef な有理因子とし、次を仮定する。 L は h の一般ファイバー上で big、 $L - h^*K_S$ は擬有効であり、ある有理数 $b \geq 0$ で $K_S + bH$ が big である。さらに滑らかな射影多様体からの優越的 generically finite morphism $\pi : \widehat{W} \rightarrow W$ 、 $\widehat{W}$ 上の nef な有理因子 P 、有理数 $Q > 0$ が存在して、 $\tilde{H} = \pi^*h^*H$ に対し

$$\begin{aligned} \nu(P + \tilde{H}) &= \nu(P), \\ Q\pi^*L &\geq_{\text{pe}} P. \end{aligned}$$

を満たす。このとき L は big である。

Proposition 7.2 · pp. 44–45

START 正次元の marked quotient から出発する

$$\dim S > 0, \quad Y \xrightarrow{x} W \xrightarrow{h} S, \quad u_* = \omega x^* u_W.$$

generic fiber の生成元で分解し、元の source の valuation を抽出する。
最小値の条件が全ての極を検出し、切断比を保つ。

[Lem. 6.1–6.2, pp. 37–40](#) [Prop. 6.3, pp. 40–41](#)

01 元の底と完全切断空間を一致させる

$$L_W = K_W + \sum_A t_A A, \quad t_A = \min_{I \rightarrow A} \frac{a^{-1} \operatorname{ord}_I \omega + d_I}{m_I}.$$

$$H^0(W, \ell L_W) \simeq H^0(Y_0, \ell L_{Y_0}) \quad (\ell \text{ 十分割り切れる}), \quad L_W \text{ big over } S.$$

負の係数を許す Δ で、discrepancy sheaf の階数 1 を検証する。

[Prop. 6.3, \(6.12\)–\(6.13\), pp. 41–42](#)

[\[FG\] Def. 3.2, Thm. 3.6, PDF pp. 5, 7](#)

02 lc-trivial な補助 subpair から nef 部分を得る

$$L_W = K_W + B_W + M_W, \quad 0 \leq B_W \leq 1, \quad M_W \text{ nef}.$$

境界での rank loss で D_0 を除き、Higgs tails の零曲率方向を比較する。

[Prop. 5.3, 5.5, pp. 30–34](#) [Prop. 5.6, pp. 34–36](#)

03 period と Higgs tails の正值性を比較する

$$K_S + bH \text{ big}, \quad P = -\sum_i (i+1) \det G_i \text{ nef}, \quad \tilde{H} = \pi^* h^* H.$$

$$\nu(P + \tilde{H}) = \nu(P).$$

固定 Higgs 写像を orbifold 余接束へ移す。可動曲線で評価し、
擬有効閾値を 0 にする。相対擬有効性も摂動から得る。

[Lem. 7.4–7.6, pp. 46–49](#)

[\[CP\] Thm. 1.3, 3.4, pp. 3, 12–14](#) [\[BDPP\] Thm. 2.2, p. 6](#)

04 境界摂動に依存しない比較を得る

$$Q\pi^* L_W \geq_{\text{pe}} P \quad (Q > 0), \quad L_W - h^* K_S \geq_{\text{pe}} 0.$$

$L_W + bh^* H$ は big。nef Morse 評価と数値次元の一致で捻りを除き、
完全切断空間の比較で元の底へ戻す。

[Prop. 7.2, Lem. 7.3, pp. 44–45](#) [Prop. 7.7, p. 49](#)

05 period の捻りを引き去る

$$(1+tQ)\pi^* L_W \geq_{\text{pe}} A' + tP - b\tilde{H} \text{ big} \quad (t \gg 0).$$

$$L_W \text{ big} \implies \kappa(Y, L_Y) \geq \dim W \geq \dim S > 0.$$

正次元period商での論証：正確な切断格子、nefなmoduli部分とHiggs tails、数値的な捻りの除去

図を拡大 ↗ [TeXソース](#) ↓

1. 相対飯高底に、切断空間を正確に表す因子を作る

S のgeneric fiberでは係数系が定数なので非零の対数的切断が得られ、そこでの飯高次元は非負になる。相対飯高ファイブレーションを取り、 x のgeneric fiber J 上の次数 a の一意的な生成元 ω によって $u_* = \omega x^* u_W$ と分解する。 W の素因子 A に対し

$$t_A = \min_{I \rightarrow A} \frac{a^{-1} \operatorname{ord}_I(\omega) + d_I}{m_I}, \quad m_I = \operatorname{ord}_I(x^* A), \quad d_I = \operatorname{coeff}_I D_Y, \quad L_W = K_W + \sum_A t_A A$$

を定める。 D_Y はこのモデルの被約境界である。元のsource上の素因子が一時的な底の余次元2以上へ潰れる場合、その制限valuationを底に抽出してから最小値を計算する。この操作により、十分割り切れる ℓ について

$$H^0(W, \ell L_W) \xrightarrow{\sigma \mapsto \omega^{\ell/a} x^* \sigma} H^0(Y_0, \ell L_{Y_0})$$

は同型となり、切断比を保つ。 Y_0 は固定モデルで、その切断空間は元の (Y, D) と同じである。また L_W は S 上相対的にbigである。

Lemmas 6.1–6.2 · (6.5)–(6.6)、Proposition 6.3 · (6.8) · pp. 37–41

2. 補助subpairの階数条件を確かめてmoduli部分のnef性を得る

原稿は $\Delta = -a^{-1} \operatorname{div}_{aK_{Y/W}}(\omega) + x^* \sum t_A A$ を使い、 $K_Y + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} x^* L_W$ とする。 Δ には負の係数を許す。generic fiber上の対数的零因子 Z_J の小平次元が0であることから、discrepancy sheafの切断を $\mathcal{O}_J(NZ_J)$ の切断で上から抑え、定数切断で下から抑える。こうして

$$\operatorname{rank} x_* \mathcal{O}_Y([\mathbf{A}^*(Y, \Delta)]) = 1$$

を確認し、[FG, Definition 3.2 / Theorem 3.6]を適用する。必要なモデル上で

$$L_W = K_W + B_W + M_W, \quad 0 \leq B_W \leq 1, \quad M_W \text{ nef}$$

を得る。 $B_W \geq 0$ は、 t_A の最小値を実現する同じ素因子でdiscriminant thresholdを評価して示す。ここで使う外部結果はb-nef性であり、moduli部分のsemiamplenessではない。

Proposition 6.3 · (6.9)–(6.15) · pp. 41–43

FG, Definition 3.2 · Theorem 3.6 · PDF pp. 5, 7 (刊行pp. 1724, 1726)

3. period方向をHiggs tailsの数値次元の中へ収める

period側では、非自明なLie monodromyをもつ境界 D_0 の各成分で $\nu(H|_{D_i}) < \nu(H)$ となる。切断の増大次数を比較してこの境界を取り除き、 $K_S + bH$ をbigにする。一方、 u_W のHiggs反復の全収縮が生成する束を G_i とし、unipotentな有限被覆と解消の合成 $\pi: \widehat{W} \rightarrow W$ 上で

$$P = - \sum_i (i+1) \det G_i, \quad \tilde{H} = \pi^* h^* H$$

と置く。Proposition 5.6は P のnef性と $\nu(P + \tilde{H}) = \nu(P)$ を示す。曲率が零の方向で選んだ直線と compact flagが固定されることに加え、orbit計算と表現論のLemma 5.7で最高Hodge空間全体も固定されることが必要である。選んだベクトルがその空間全体を生成するという仮定は置かない。

Proposition 5.3 · pp. 30–33、Lemma 5.4 · Proposition 5.5 · pp. 33–34、Proposition 5.6 · (5.11)–(5.18) · pp. 34–36

4. 境界に一樣な余接束評価から、固定した比較式を得る

Lemma 7.4は、 t_A の最小値を実現する成分とdiscriminant係数の評価を併用して、Higgs行列式を orbifold余接テンソルへ移す。 $M_W + \epsilon A$ を一般の有効な Λ_ϵ で表し、 $K_W + B_W + \Lambda_\epsilon \sim_{\mathbb{Q}} L_W + \epsilon A$ が 擬有効な範囲で[CP, Theorem 1.3]を適用する。[BDPP, Theorem 2.2]で可動曲線との次数評価を擬有効な因子の比較へ戻すと、 ϵ に依存しない $C \geq 0, R > 0$ について

$$C(L_W + \epsilon A) + RL_W \geq_{\text{pe}} P_W.$$

擬有効閾値 t_0 が正なら $t_0 \leq Ct_0/(C+R) < t_0$ となるので、 $t_0 = 0$ である。極限を取り、 $\pi^*P_W \geq_{\text{pe}} P$ と合わせて、固定した $Q = C + R > 0$ に対する $Q\pi^*L_W \geq_{\text{pe}} P$ を得る。同じ摂動対に[CP, Theorem 3.4]を適用し、good modelから押し戻して $L_W - h^*K_S \geq_{\text{pe}} 0$ も得る。

Lemmas 7.4–7.6 · (7.5)–(7.11) · pp. 46–49 · CP, Theorems 1.3, 3.4 · Remarks 3.3, 3.6 · pp. 3, 12–14 · BDPP, Theorem 2.2 · p. 6

5. 数値的な捻りを引き去り、元の底の小平次元へ戻す

相対bigness、 $L_W - h^*K_S \geq_{\text{pe}} 0$ 、 $K_S + bH$ のbignessから、まず $L_W + bh^*H$ がbigになる。引戻し後に豊富な A' を下から取り、前段の固定した比較式を足すと

$$(1 + tQ)\pi^*L_W \geq_{\text{pe}} A' + tP - b\tilde{H}.$$

Lemma 7.3では $\nu(P + \tilde{H}) = \nu(P)$ により、nef Morse不等式の損失項の t 次数が供給項より小さくなり、右辺が $t \gg 0$ でbigになる。Proposition 7.2はここから L_W のbignessを得る。第1段の完全切断空間の同型で元の底へ戻し、 $\kappa_Y \geq \dim W \geq \dim S > 0$ を得る。一般の擬有効因子について数値次元と飯高次元の一致を仮定する段階はない。

Proposition 7.2 · Lemma 7.3 · pp. 44–45、Proposition 7.7 · p. 49、Proposition 1.3の証明 · p. 50

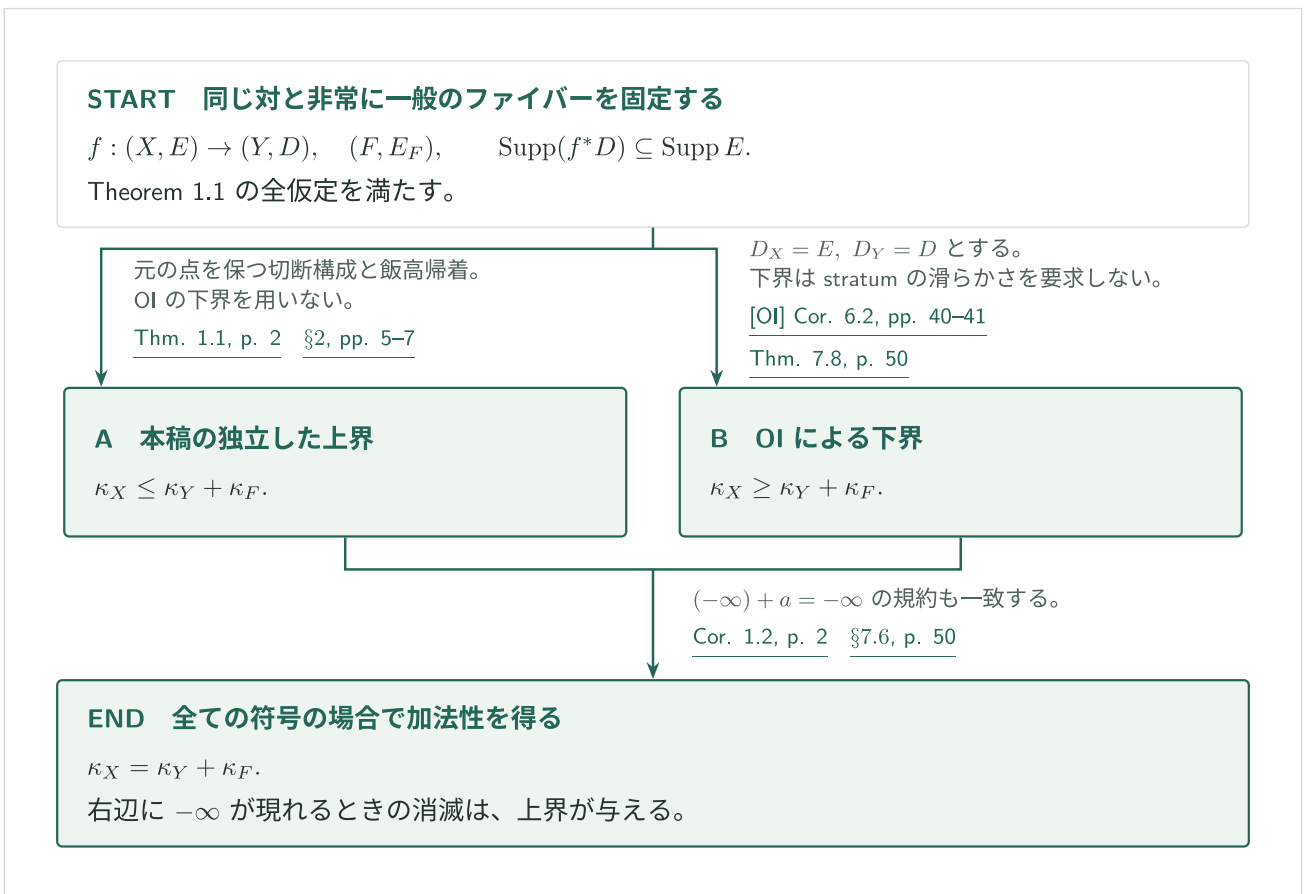
底の正の小平次元が従うため、底の小平次元0の場合には点商だけが残る。これでProposition 1.3を閉じ、第2節の上界へ戻る。

RA, Propositions 7.7, 1.3 · pp. 49–50

5. Corollary 1.2の証明 — 上界に下界を加える

証明対象：Corollary 1.2 · p. 2 仮定 · 結論を参照する。

ここで初めて033内の別稿OIを使う。 $\kappa_X, \kappa_Y, \kappa_F$ の記号と $-\infty$ の規約は第2節と同じである。



加法性：本稿の独立した上界とOIの対数的劣加法性を、同じ対・同じファイバーで組み合わせる

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 下界の境界条件と非常に一般のファイバーを一致させる

[OI, Corollary 6.2]に $D_X = E, D_Y = D$ を代入する。滑らかな連結射影的複素多様体、連結ファイバー、被約SNC境界と台の包含はすべてTheorem 1.1の仮定から従う。下界側はstratumの滑らかさを要求せず、使う非常に一般の対も (F, E_F) で一致する。原稿はこれをTheorem 7.8として再掲する。

Theorem 7.8 · §7.6 · p. 50 · OI, Corollary 6.2 · pp. 40-41

2. 負の無限大でも、上界が与える消滅を保つ

両項が有限なら、上界と下界を合わせて等号を得る。どちらかが $-\infty$ なら下界は自動的に不等式となり、Theorem 1.1が与えた $H^0(X, mL_X) = 0$ が等号の内容を担う。OIの証明から、この消滅結論を引き出しているわけではない。

Theorem 1.1 · p. 2, §2.2 · p. 5, §7.6 · p. 50 · OI, Corollary 6.2の証明 · p. 41

smooth族でファイバーと底の小平次元が非負なら、WV Theorem 1.1との比較でvariationの上界を得る別経路になる。

WV, Corollary 1.3後の比較 · p. 5

6. どの論文が、どの段階を担うか

入力結果

OI, Corollary 6.2 · pp. 40–41

本稿の使用箇所

Corollary 1.2 · Theorem 7.8 · pp. 2, 50

役割 · 今回の照合範囲

帰結への入力。同じ境界・ファイバーの下界。記述・短い帰結証明と適用を照合。OI全体の証明は未検証。

入力結果

FF14, §4.9 · Lemma 4.10, Step 1 · pp. 24–31、FF17 · pp. 1–2

本稿の使用箇所

Lemma 3.2 · pp. 12–13

役割 · 今回の照合範囲

Hodge延長とweight射影の正則性の入力。記述と局所自由性・strictnessの接続を照合。Steenbrink・Deligneまでの全証明は未追跡。

入力結果

BBT, Theorem 1.1 · p. 1

本稿の使用箇所

Lemma 4.7 · pp. 19–20

役割 · 今回の照合範囲

格子をもつ全Lie period像を代数化。入力の記述と適用対象を照合。compact markの全構成・有限monodromyの降下は独立検証未完了。

入力結果

FG, Definition 3.2 · Theorem 3.6 · PDF pp. 5, 7

本稿の使用箇所

Proposition 6.3 · pp. 41–43

役割 · 今回の照合範囲

負の係数を許す補助subpairの階数1条件からb-nef性。定義・定理文と(6.12)–(6.13)を照合。入力定理の証明は未検証。

入力結果

CP, Theorems 1.3, 3.4 · pp. 3, 12–14

本稿の使用箇所

Lemmas 7.5–7.6 · pp. 47–49

役割 · 今回の照合範囲

orbifold余接商の次数評価と相対擬有効性。摂動対 · good model · 押戻しの使用箇所を照合。入力の全証明は未検証。

入力結果

BDPP, Theorem 2.2 · p. 6

本稿の使用箇所

Lemma 7.5 · (7.10) · p. 48

役割 · 今回の照合範囲

可動曲線との次数から擬有効性への移行。射影的な定理の記述と適用を照合。入力の全証明は未検証。

AS, Theorem A · pp. 1–2は、§5.1 · Lemma 5.1 · pp. 26–28のconnection-form論証の出典である。本稿は必要な半単純の場合の議論を本文で与えているため、ここでは証明方法の関係として区別する。Theorem Aの記述と本稿の位置付けを比較したが、ASの全証明は追跡していない。その他の033内の関係は未調査・未記録であり、矢印がないことを「依存なし」と解釈しない。

7. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1 · p. 2 — 主定理の仮定・結論を確認し、下記の証明箇所と対応させる
- Proposition 1.3 · p. 3 — 元の底の指定点における零点まで保持する切断構成を読む

- Proposition 7.7 · pp. 49–50 — 数値的な捻り除去と完全切断空間の比較から底の正の小平次元へ戻る
- Corollary 1.2 · p. 2 — 独立した上界へ下界を加える箇所と負の無限大の扱いを読む
- §2 · pp. 5–7 : Proposition 1.3だけを用いた全符号の場合の上界。
- Proposition 3.1 · Lemmas 3.2–3.3 · pp. 8–14 : 元の係数格子と指定点の零点。
- Proposition 4.1 · Lemma 4.7 · pp. 14–15, 19–20、Propositions 5.3, 5.5–5.6 · pp. 30–36 : marked quotient、境界でのrank loss、Higgs tails。
- §6 · pp. 37–43 : 相対飯高、source valuationの抽出、正確な切断比較、lc-trivial条件。
- §7 · pp. 43–50 : 定数係数の場合、捻りの除去、元の底への復帰、下界の追加。

今回の確認：主結果の仮定・結論と上記の選択した証明箇所を読み、§§2–3、§6のvaluation・階数条件、§7の閾値と数値的除去を中心に接続を確認した。§§4–5については商の記述・降下箇所、boundary dropとHiggs tailsの記述、後段への使用箇所、および選択した証明段落を確認した。表に示す外部入力 of 記述と適用を照合した。

未確認：§4.1–4.2の斉次置換・compact flag構成、§4.4の全計量評価、§5の境界退化と表現論の全計算は独立検証未完了である。外部定理の全証明、その先の文献の再帰的検証、全依存関係の網羅、専門家査読・形式検証は行っていない。図は原稿の論証を整理したものであり、その全正当性を認定するものではない。

本稿とOIはcommit `fd4aeeb2ee4fc729c18d98444fed42fd0529eeeb`、2026-09-26版に固定した。ページ番号は各リンク先PDFに対応し、FGには表紙があるためPDF番号と刊行ページを併記した。

Projective Hodge lines and ordinary Iitaka subadditivity

最高Hodge lineの境界での階数低下から、通常の飯高劣加法性へ

本稿は、全最高Hodge空間が1次元である有理偏極付き整純Hodge構造の変動から随伴正值性を導き、標準束公式と弱正值性を介して通常の飯高劣加法性を示すと主張する。論証の要点は、full period imageの次元とhighest-line mapの階数を区別したまま境界・有限商の分岐を除き、半豊富性を仮定せずに切断を作ることである。

原稿の著者: OpenAI · 2026-09-27 · 40 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

以下の定理文は原稿の主張を、その順序と仮定に従って記す。

Theorem 1.1 — 通常の飯高劣加法性

k を標数0の代数閉体とし、 $f: X \rightarrow Z$ を滑らかな連結射影 k 多様体間の、連結ファイバーをもつ全射射影射とする。 F をその幾何学的一般ファイバーとすると、

$$\kappa(X) \geq \kappa(F) + \kappa(Z).$$

$(-\infty) + a = -\infty$ 、 $\kappa(\text{point}) = 0$ とする。

Theorem 1.1 · p. 2

Theorem 1.2 — 射影的随伴正值性

Y を滑らかな連結射影複素多様体、 $U \subset Y$ を稠密 Zariski 開集合、 $\mathbb{V}$ を U 上の有理偏極付き整純 Hodge 構造の変動とする。全体の最高非零 Hodge filtration が line、すなわち $F^{p+1} = 0$ 、 $\text{rank } F^p = 1$ であると仮定する。 $M \in \text{Pic}(Y) \otimes \mathbb{Q}$ について、必要なら Y を滑らかな射影双有理モデルに替え、滑らかな射影 alteration $\tau: \hat{Y} \rightarrow Y$ と $c \in \mathbb{Q}_{>0}$ が存在し、引き戻した変動の SNC 境界まわりのモノドロミーが unipotent で、延長最高 Hodge line $J_{\hat{Y}}$ に対して

$$\tau^* M \sim_{\mathbb{Q}} c J_{\hat{Y}}$$

が成り立つとする。さらに滑らかな射影双有理変更を行うと、滑らかな射影多様体 S への連結ファイバーをもつ全射 $p: Y \rightarrow S$ と nef な有理 line L が存在し、

$$M \sim_{\mathbb{Q}} p^* L, \quad K_S + jL \text{ は十分大きいすべての整数 } j \text{ に対して big}$$

となる。 S が点の場合は $M \sim_{\mathbb{Q}} 0$ を結論する。

Theorem 1.2 · p. 2

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Projective Hodge lines and ordinary Iitaka subadditivity](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- **BBT** Benjamin Bakker; Yohan Brunebarbe; Jacob Tsimerman — o-minimal GAGA and a conjecture of Griffiths : 格子を保つ period 像の代数化と Hodge line の正值性。arXiv:1811.12230v3 (2022-10-23)。
- **BC** Yohan Brunebarbe; Benoît Cadorel — Hyperbolicity of varieties supporting a variation of Hodge structure : immersive な period 写像から対数一般型性を得る。arXiv:1707.01327v1。
- **FM** Osamu Fujino; Shigefumi Mori — A canonical bundle formula : 標準束公式の残余因子と全次数の直像。JDG 56 (2000), author-hosted journal PDF。
- **Amb** Florin Ambro — Shokurov’s boundary property : moduli b-divisor と延長 Hodge eigensheaf。arXiv:math/0210271v1 (2002-10-17)。
- **Fuj** Osamu Fujino — Notes on the weak positivity theorems : 負の ample 捻りを伴う切断の構成に使う弱正值性。2015-06-30, version 0.54。
- **Has** Kenta Hashizume — Log Iitaka conjecture for abundant log canonical fibrations : 有効 klt 対の一般型ファイバーに対する加法性。arXiv:1902.10923v2 (2019-05-01)。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号と PDF 内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHub の閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.2 — 周期像から境界と分岐を除く

証明対象：Theorem 1.2 · p. 2 仮定 · 結論を参照する。

証明の道筋。Theorem 1.1には二つの準備を合流させる。本節でTheorem 1.2の随伴正值性を示し、標準束公式による切断比較を用意してから、二つの底の比較と補間で通常の飯高劣加法性を導く。

T をneat levelでの実際のfull period imageの滑らかな射影モデルとし、 J を延長最高line、 $L_T = cJ$ とする。 D_N はモノドロミー対数が非零の境界、 R_{div} は有限商の余次元1の分岐、 R_{exc} は商の底上で例外的なJacobian成分である。 $r = \nu(J)$ はhighest-line mapの階数であり、 $\dim T$ と同じとは限らない。

01 全最高 line を含む最小の有理変動を取る

$$\text{rank } F^p = 1, \quad F^{p+1} = 0, \quad \tau^* M \sim_{\mathbb{Q}} cJ_{\widehat{Y}}.$$

neat level で代数化し、有限指標を tensor power で消す。
full period map の immersivity を対数一般型性に使う。

[Lemma 2.1; §5, pp. 13–15](#) [\[BBT\] Thm. 1.1, p. 1](#) [\[BC\] Thm. 1.1, p. 1](#)

02 実際の周期像と有限商を作る

$$T \dashrightarrow B \text{ birational}, \quad \pi : T \rightarrow S_0, \quad L_T \sim_{\mathbb{Q}} \pi^* L_0, \\ r = \nu(L_T) = \text{rank}_{\text{gen}} d\ell \leq \dim T, \quad K_T + D_N \text{ big}.$$

階数が同じなら最高 line は $\ker N$ 内。
有理最小性から $N = 0$ となり矛盾。

[Lemmas 2.2, 3.4–3.5; Thm. 4.1, pp. 6–11](#)

階数が同じなら全周期を固定。
実際の周期像への有効作用に矛盾。

[Lemma 2.3; Thm. 4.1, pp. 6–7, 11–12](#)

A 非零のモノドロミー対数

$$E \subset D_N, \quad N \neq 0 \\ \nu(L_T|_E) < r.$$

B 有限 inertia の固定因子

$$E \subset R_{\text{div}}, \quad b \neq 1 \\ \nu(L_T|_E) < r.$$

制限切断は次数 $r - 1$ 以下。例外成分を除き、bigness を降ろす。
Stein 分解は有限 inertia の矛盾を得た後に行う。

[Lemmas 5.1–5.2; \(5.5\), pp. 12–16](#)

03 次数差で境界と分岐を除き、最後に連結ファイバー化

$$A = \pi^* K_{S_0} + R_{\text{exc}}, \quad D = D_N + R_{\text{div}}, \quad A + D \text{ big}, \\ cj^r - O(j^{r-1}) > 0 \implies K_S + jL \text{ big}, \quad M \sim_{\mathbb{Q}} p^* L.$$

有理最小化と二種類の階数低下から随伴のbignessを得る

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 実際の周期像上で有限群の作用を保持する

最高lineを含む最小の有理部分変動に替えると、一般のHodge構造はそのlineで有理的に生成される。これにより、lineを固定する有理正規モノドロミー部分群を排除できる。neat levelで周期像を代数化し、その正規化の関数体を保ったまま有限群作用を考える。lineの有限安定化群の指標はtensor powerで消し、商の上に有理lineを降ろす。原来の M との同一視は共通alteration上の延長同士を比較し、normで降ろすので、開集合上だけの同一視ではない。

Lemmas 2.1–2.3 · pp. 5–7; §5, (5.1) · pp. 13–15 · BBT, Theorem 1.1 · p. 1

周期像が点なら、延長lineは定数lineである。共通alteration上の同定をnormで降ろすことで $M \sim_{\mathbb{Q}} 0$ となり、Theorem 1.2の点の場合の結論も得る。

2. 境界と有限分岐で別々に階数を落とす

nef lineの数値次元は $\nu(J) = \text{rank}_{\text{gen}} d\ell$ である。境界 E で数値次元が落ちないと仮定すると、接方向の極限の階数も r となり、Lemma 3.4により近傍のline像が極限像に含まれる。 $N \neq 0$ ならその像は $\mathbb{P}(\ker N)$ に入り、有理最小性に矛盾する。有限inertiaの場合は一つの固有空間に入り、Lemma 2.3から全周期を固定する。この最後の矛盾には $C(T)$ が実際の周期像の関数体であることが必要で、先に任意の有限被覆やStein分解へ替えることはできない。

Proposition 3.2 · pp. 7–8; Lemmas 3.4–3.5 · pp. 9–10; Theorem 4.1 · pp. 11–12 · BBT, Lemma 6.17 · pp. 43–44

3. 切断数の次数差で二つの障害を同時に除く

$N = 0$ の成分を越えて変動を延長した後、full period mapの一般的なimmersivityから $K_T + D_N$ のbignessを得る。Lemma 5.1に

$$A = K_T - R_{\text{div}} = \pi^* K_{S_0} + R_{\text{exc}}, \quad D = D_N + R_{\text{div}}, \quad J = L_T$$

を代入する。豊富な摂動を加えた内部の切断数は j^r で増え、取り除く各因子への制限は高々 j^{r-1} なので、 $A + jL_T$ がbigになる。例外成分を除き、一般有限射で降下して $K_{S_0} + jL_0$ をbigにする。連結ファイバー化はこの後に行い、有効Jacobianを加えることで $K_S + jL$ のbignessを保つ。

Lemmas 5.1–5.2 · pp. 12–13; (5.2)–(5.5) · pp. 15–16 · BC, Theorem 1.1 · p. 1

得た $M = p^*L$ と底の随伴bignessを、第4節の弱正值性・補間へ渡す。ここで M の半豊富性は結論していない。

PH, §7.3 · pp. 25–26

3. Proposition 6.4 — 標準束公式と切断比較

証明対象：Proposition 6.4 · pp. 20–21

$d = \kappa(F) \geq 0$ とし、相対飯高写像を $\tilde{X} \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{q} Z$ と書く。 $\dim(Y/Z) = d$ で、 g の幾何学的一般ファイバー C は小平次元0である。ここでTheorem 1.2に入るlineと、元の多重標準切断との比較を同時に保持する。

Proposition 6.4

複素数上で $f: X \rightarrow Z$ を滑らかな連結射影多様体間の連結ファイバーをもつ全射とし、幾何学的一般ファイバー F について $d = \kappa(F) \geq 0$ とする。滑らかな射影多様体 $\tilde{X}, Y$ 、双有理射 $\mu: \tilde{X} \rightarrow X$ 、連結ファイバーをもつ全射 $\tilde{X} \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{q} Z$ を、 $qg = f\mu$ 、 $\dim Y - \dim Z = d$ 、 g の幾何学的一般ファイバーの小平次元が0となるように取れる。

Theorem 6.1 (pp. 16–18) のデータ B, M, R を同時に取り、 $B \geq 0$ は SNC、 (Y, B) は klt、 M は Y へ降下する nef な moduli b-divisor の trace とし、

$$K_{\tilde{X}} \sim_{\mathbb{Q}} g^*(K_Y + B + M) + R,$$

$$g_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\lfloor kR^+ \rfloor) = \mathcal{O}_Y \quad (k \in \mathbb{Z}_{>0}).$$

を満たす。 R^- は Y の余次元2以上へ写り、元の X 上でも例外的である。 M は generically finite な半安定基底変更後、全最高部分が rank one の偏極可能な有理変動の延長 Hodge line の正の有理倍として実現される ((6.4))。 $D = K_Y + B + M$ と置くと

$$\kappa(X) \geq \kappa(Y, D), \quad D|_{Y_{\bar{\eta}}} \text{ は big}$$

となる。 $\bar{\eta}$ は Z の幾何学的一般点で、非常に一般の滑らかな q ファイバーでも同じ bigness が成り立つ。

Proposition 6.4 · pp. 20–21

01 相対飯高写像を取り、小平次元 0 のファイバーへ

$$\tilde{X} \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{q} Z, \quad d = \dim(Y/Z) = \kappa(F), \quad \kappa(C) = 0.$$

最小性が被覆の次数 b を保証し、最高形式を一意にする。
character 固有空間だけに置き換えず、有理変動全体を保持する。

Lemma 6.3; Prop. 6.4, pp. 19–21

02 最小指数の root cover を族に広げる

$$b = \min\{m > 0 : H^0(C, mK_C) \neq 0\}, \quad \xi^b = s/\omega^b, \\ \kappa(W) = 0, \quad h^0(W, K_W) = 1, \quad \forall = R^n h_* \mathbb{Q}, \quad \text{rank } F^n = 1.$$

標準束公式と Hodge eigensheaf を、共通 alteration の延長上で照合。
補助境界 $-\text{div}(s)/b$ は負であり得る。

Thm. 6.1; (6.4), pp. 16–20

[FM] Thm. 4.5, PDF pp. 11–12 [Amb] Lemma 5.2; Prop. 5.5, pp. 15, 17–18

03 境界を含む Hodge 同定と残余因子を保持する

$$D = K_Y + B + M, \quad B \geq 0, (Y, B) \text{ klt}, \quad M \text{ nef}, \quad \tau^* M \sim_{\mathbb{Q}} aJ, \\ K_{\tilde{X}} \sim_{\mathbb{Q}} g^* D + R, \quad g_* \mathcal{O}(\lfloor kR^+ \rfloor) = \mathcal{O}_Y, \quad R^- \text{ exceptional over } X.$$

R^+ の切断を掛け、 R^- の例外性で X へ戻す。
一般ファイバー上は全次数の直像条件と平坦基底変更を使う。

Lemma 6.5; Lemma 6.6, pp. 21–22

04 全空間と一般ファイバーで切断を比較する

$$H^0(Y, mD) \hookrightarrow H^0(X, mK_X), \quad \kappa(X) \geq \kappa(Y, D), \\ d \leq \kappa(Y_{\bar{\eta}}, D|_{Y_{\bar{\eta}}}) \leq \dim Y_{\bar{\eta}} = d \implies D|_{Y_{\bar{\eta}}} \text{ big}.$$

最小指数root coverと残余因子からHodge lineおよび切断比較を得る

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 最小指数root coverで全最高空間を1次元にする

$b = \min\{m > 0 : H^0(C, mK_C) \neq 0\}$ とし、その一意な切断 s から $\xi^b = s/\omega^b$ で root cover を作る。

Lemma 6.3 はその解消 W について $\kappa(W) = 0$ 、 $h^0(W, K_W) = 1$ を示す。これを族に広げると $R^n h_* \mathbb{Q}$ の全最高空間が rank one になる。cyclic character が有理的でなくても、変動全体は有理のまま保持される。

Lemma 6.3, (6.4) · pp. 19–20

2. 負の補助境界と残余因子を区別する

標準束公式は、 $B \geq 0$ 、 (Y, B) klt、 M nef として

$$K_{\tilde{X}} \sim_{\mathbb{Q}} g^*(K_Y + B + M) + R, \quad g_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\lfloor kR^+ \rfloor) = \mathcal{O}_Y \quad (k > 0)$$

を与える。 R^- は底上で余次元2以上へ写り、かつ元の X 上で例外的である。後者は単なる像の次元からは従わず、flatteningを用いて確保される。補助sub-pairの一般ファイバー境界は $-\operatorname{div}(s)/b$ なので、有効とは限らない。本稿が使うのはnefnessと延長Hodge lineの同定であり、その境界の有効性を要するmoduliのabundanceを入力にしない。

Theorem 6.1, Remark 6.2 · pp. 16–19 · FM, Theorem 4.5 · PDF pp. 11–12 ·
Amb, Lemma 5.2(4)–(5), Proposition 5.5 · pp. 15, 17–18

3. 全空間への単射と一般ファイバー上のbigness

$D = K_Y + B + M$ とする。 R^- の例外性により $K_{\tilde{X}} + R^-$ の切断は X の標準切断と一致し、 R^+ の切断を掛けると $H^0(Y, mD)$ がそこへ入る。一方、 q の幾何学的な一般ファイバーへの平坦な基底変更と全次数の直像条件から

$$\kappa(X) \geq \kappa(Y, D), \quad d = \kappa(F) \leq \kappa(Y_{\bar{\eta}}, D|_{Y_{\bar{\eta}}}) \leq \dim Y_{\bar{\eta}} = d$$

となり、 $D|_{Y_{\bar{\eta}}}$ はbigである。以後の双有理変更ではcrepant境界の正部分を取り、有効例外因子を加えてこの比較を保つ。

Proposition 6.4, Lemmas 6.5–6.6 · pp. 20–22

第4節では元の底への q とperiod底への p を同時に使う。切断単射は最後に下界を元の X へ戻すために保持する。

PH, Proposition 6.4 · §7.3 · pp. 20–21, 25–26

4. Theorem 1.1 — 二つの底と補間

証明対象：Theorem 1.1 · p. 2 仮定 · 結論を参照する。

$\kappa(F) = -\infty$ または $\kappa(Z) = -\infty$ なら、Theorem 1.1の不等式は規約により自動的に成立する。以下では両者が非負の場合を扱う。

$\kappa(Z) \geq 0$ とする。Theorem 1.2で $M = p^*L$ と書いても、 $p: Y \rightarrow S$ と $q: Y \rightarrow Z$ の間に因子化は仮定できない。 S が点なら一般型ファイバーの劣加法性を q に直接適用する。以下は $\dim S > 0$ の場合である。

01 二つの底を分ける

$$q: Y \rightarrow Z, \quad p: Y \rightarrow S, \quad D = K_Y + B + M, \quad M \sim_{\mathbb{Q}} p^*L, \\ \kappa(Z) \geq 0, \quad D|_{Y_{\bar{\eta}}} \text{ big}, \quad K_S + jL \text{ big} \quad (j \gg 0).$$

Z の形式を収縮して W_s へ移す。 $Y_s \rightarrow W_s$ の一般ファイバーは $\log$ 一般型なので、既知の劣加法性を適用できる。

Lemma 7.3, pp. 23–24 [Has] Thm. 2.11, p. 5

02 積写像を使い、周期ファイバーで非消滅を得る

$$Y \rightarrow W \rightarrow S \times Z, \quad \kappa(W_s) \geq 0, \\ \kappa(Y_s, K_{Y_s} + B|_{Y_s}) \geq 0.$$

正の rank の相対 $\log$ 多重標準直像に弱正值性を適用。
対称冪を掛け合わせ、例外的な極を押し下げる。

Lemma 7.4; (7.6), pp. 24–26 [Fuj] Thm. 1.1, pp. 1–2

03 弱正值性から有効因子を作る

$$P_0 = K_S + jL - H \text{ big}, \quad E_1 = K_Y + B + jM - p^*H \sim_{\mathbb{Q}} E \geq 0.$$

big cone の開性で v を選び、 A_S の豊富性から一般の Γ を取る。
 q の一般ファイバーで E_2 は big、 $(Y, B + \Gamma)$ は klt。

(7.5)–(7.7), p. 26

04 係数を補間し、有効 klt 対に戻す

$$0 < v < 1, \quad \lambda = \frac{1-v}{j-v}, \quad A_S = vL + \frac{\lambda}{1-\lambda}H, \\ E_2 = K_Y + B + p^*A_S \sim_{\mathbb{Q}} K_Y + B + \Gamma, \quad D \sim_{\mathbb{Q}} \lambda E_1 + (1-\lambda)E_2.$$

q に劣加法性を適用し、 E_1 の切断を掛ける。
幾何学的一般ファイバーも含め、小平次元は基礎体変更で不変。

[Has] Thm. 2.11, p. 5 §7.3; Lemma 7.5, pp. 26–27

END 劣加法性と切断移送、標数 0 への変更

$$\kappa(X) \geq \kappa(Y, D) \geq \kappa(Y, E_2) \geq \kappa(F) + \kappa(Z), \\ H^0(V, nK_V) \otimes_K K' \simeq H^0(V_{K'}, nK_{V_{K'}}).$$

積写像による非消滅、弱正值性、正確な係数補間、基礎体変更

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 積写像から周期ファイバーの非消滅を得る

(p, q) の像の Stein 分解と解消を $Y \rightarrow W \rightarrow S \times Z$ とする。一般の W_s は Z の像に一般有限で、全体として $W \rightarrow Z$ は支配的である。底方向の外積因子で収縮した標準形式は、 Z の多重標準切断から W_s の非零切断を与える。 $Y_s \rightarrow W_s$ の一般ファイバーでは M が消え、 D の bigness が $\log$ canonical class の bigness になる。一般型ファイバーの劣加法性をここで一度用い、 p の幾何学的一般ファイバーの $\log$ 非消滅を得る。

Lemma 7.3 · pp. 23–24 · Has, Theorem 2.11 · p. 5

2. 弱正值性から底の豊富な捻りを差し引いた有効因子を作る

$K_S + jL - H$ がbigとなる $j > 1$ と豊富な有理因子 H を取る。前段の非消滅により相対log多重標準直像は正のrankをもち、弱正值性を適用できる。対称冪の切断を掛け合わせ、flattening後に生じる例外的な極を押し下げると

$$E_1 := K_Y + B + jM - p^*H \sim_{\mathbb{Q}} \text{有効因子}$$

を得る。Lemma 7.4の延長・押し下げが、一般点での生成から全空間の有効性への接続である。

Theorem 7.2, Lemma 7.4, (7.6) · pp. 23–26 · Fuj, Theorem 1.1 · pp. 1–2

3. 係数を合わせ、有効klt対へ帰着する

big coneの開性により $0 < v < 1$ で $(K_Y + B + vM)|_{Y_{\bar{\eta}}}$ をbigに保つ。次の選択で M の係数と H の捻りを同時に合わせる。

$$\lambda = \frac{1-v}{j-v}, \quad A_S = vL + \frac{\lambda}{1-\lambda}H, \quad E_2 = K_Y + B + p^*A_S, \quad D \sim_{\mathbb{Q}} \lambda E_1 + (1-\lambda)E_2.$$

A_S は豊富なので、十分割り切れる一般の切断から $\Gamma \sim_{\mathbb{Q}} p^*A_S$ を取り、 $(Y, B + \Gamma)$ をkltにできる。 E_2 はこの有効対のlog canonical classで、 q の一般ファイバー上でbigである。劣加法性を再び適用し、 E_1 の切断を掛けて

$$\kappa(X) \geq \kappa(Y, D) \geq \kappa(Y, E_2) \geq d + \kappa(Z)$$

を得る。最後にデータを有限生成体 $K/\mathbb{Q}$ へ降ろし $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ を選ぶ。各次数の H^0 の平坦基底変更を、幾何学的な一般ファイバーにも適用し、標数0の任意の代数閉体へ戻す。

§7.3, (7.5)–(7.7) · pp. 25–26; Lemma 7.5, §7.4 · p. 27

通常劣加法性Theorem 1.1を得る。WVが挙げる代替の随伴比較は§8の別結果であり、この主定理をWVの必須入力に置き換えない。

PH, Theorem 1.1 · p. 2; Theorem 8.1 · p. 28 · WV, Remark 3.17 · p. 25

5. どの論文が、どの段階を担うか

入力

BBT arXiv:1811.12230v3, Theorem 1.1 / Lemma 6.17 (pp. 1, 43–44)

使用箇所と役割

§5の周期像、§3のnefnessと数値的rank

今回の照合

入力記述と適用箇所を照合

入力

BC arXiv:1707.01327v1, Theorem 1.1 (p. 1)

使用箇所と役割

§5 p.15で $K_T + D_N$ をbigにする

今回の照合

入力記述とimmersivity・境界の選択を照合

入力

FM JDG 56 (2000), Theorem 4.5 (PDF pp. 11–12、誌面pp. 177–178)

使用箇所と役割

Theorem 6.1の残余因子・切断比較

今回の照合

定理記述と境界0での利用を照合。全モデル構成は未検証

入力

Amb arXiv:math/0210271v1, Theorem 4.4, Lemma 5.2(4)–(5), Proposition 5.5 (pp. 12–15, 17–18)

使用箇所と役割

Theorem 6.1、(6.4)のHodge eigensheafとpullback

今回の照合

関連記述を照合。引用群全体・基底変更の全証明は未検証

入力

Fuj 2015-06-30, v0.54, Theorem 1.1 (pp. 1–2)

使用箇所と役割

Theorem 7.2 → Lemma 7.4の有効性

今回の照合

入力記述と射影的klt対への適用を照合

入力

Has arXiv:1902.10923v2, Theorem 2.11 (p. 5)

使用箇所と役割

Lemma 7.3と§7.3の加法性

今回の照合

入力記述を照合。底のcanonical classのabundanceは要しない

これらは主経路の直接入力である。固定部分定理、モノドロミー正規性、nilpotent-orbit・延長理論については本稿の使用箇所を読んだが、各外部原典の全照合は未了である。033内では、WV, Remark 3.17・p. 25が本稿Lemma 8.4 / Theorem 8.1を別の随伴比較として挙げる。WV自身の証明は直接比較を使うと明記されており、この関係はalternativeである。OIとの通常劣加法性の関係も別証明として扱い、PH→OIの直接辺は作らない。他の関係は未調査である。

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.2・p. 2 — 最高lineの仮定、nefな降下、随伴bignessの結論を区別する
- Proposition 6.4・pp. 20–21 — 残余因子の例外性とHodge同定を保つ標準束帰着を読む
- Theorem 1.1・p. 2 — 主定理の仮定・結論を確認し、下記の証明箇所と対応させる
- §§2–5・pp. 5–16：有理最小化、接方向の極限、二種類のrank loss、商の降下、体積評価。
- §6・pp. 16–22：最小指数root cover、境界を含むHodge同定、残余因子による切断比較。
- §7・pp. 22–27：積写像、弱正值性からの有効化、係数補間、基礎体変更。
- §§8–9・pp. 27–39：integral tensor replacementとThom形式による別の境界評価。主経路とは区別する。

今回はTheorems 1.1–1.2、Lemmas 2.1–2.3 / 3.4、Theorem 4.1、§5の降下と体積評価、§§6–7の核心の証明を読んだ。第5節の入力は記述と使用箇所を照合した範囲を示す。Theorem 8.1 / Lemma 8.4は記述のみを読み、WVの比較箇所を確認した。境界のmixed Hodge構造の同定・多変数の延長、全補助定理の証明、§§8–9の別証明、全外部文献の証明は独立検証していない。本記事は著者の論証をたどるAI生成の概説であり、原稿全体の正しさの認定や専門家査読ではない。原稿は2026-09-27版、40ページ、参照commitはfd4aeeb2ee4fc729c18d98444fed42fd0529eeebに固定する。

B-semiampleness for compact log-smooth Kähler fibrations

閾値とHodge延長の一致から、積分分解を介した大域生成へ

本稿は、係数1の境界を許すコンパクトlog-smooth Kähler fibrationについて、moduli b-lineの安定化と半豊富性を主張する。証明の核心は、局所的なroot eigenlineの延長次数をlog canonical thresholdと一致させ、別途構成するコンパクトな補助底上の積分分解から、指定された正則線束の大域生成を降ろすことである。

原稿の著者: OpenAI · 2026-09-10 · 38 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む ↗](#)

1. 主要結果

以下は原稿の主張である。すべて複素解析的な空間・写像とし、 $\mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の等号は、共通の正整数倍を取った正則線束の同型を意味する。

$f: Y \rightarrow X$ を滑らかなコンパクト連結Kähler多様体間の、連結ファイバーをもつ全射正則写像とする。 Δ は有効有理SNC因子で、係数は $[0, 1]$ に属し、

$$K_Y + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} f^*L, \quad L \in \mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{Q}}$$

を仮定する。滑らかなコンパクトKähler modification $\mu: X' \rightarrow X$ に対し、主成分の解消 $f': Y' \rightarrow X'$ 、 $h: Y' \rightarrow Y$ を取り、 $\Delta' = h^*\Delta - K_{Y'/Y}$ とする。 X' の素因子 P に対して

$$t_P = \inf_{E \rightarrow P} \frac{a(E; Y', \Delta')}{\mathrm{ord}_E((f')^*P)}, \quad B_{X'} = \sum_P (1 - t_P)P, \quad M_{X'} = \mu^*L - K_{X'} - B_{X'}$$

と定める。分母が正で、 P を支配するすべての因子的付値を走らせ、 a はlog discrepancyを表す。例外成分上の Δ' は負になり得る。これは閾値によるdiscriminantであり、orbifold基底のinf-multiplicity divisorとは異なる。

§1.1, (1.1)–(1.3) · pp. 2–3

Theorem 1.1 — 安定化と大域生成

上の仮定のもとで、滑らかなコンパクト Kähler modification $\mu_0 : S \rightarrow X$ が存在し、次の二つが成り立つ。

(a) 任意の滑らかなコンパクト Kähler modification $\nu : S_1 \rightarrow S$ に対し、

$$M_{S_1} = \nu^* M_S \quad \text{in } \text{Pic}(S_1)_{\mathbb{Q}}.$$

(b) ある正整数 m に対して、 mM_S を表す実際の正則線束が大域生成される。

点を底とする場合と相対次元 0 も含む。 f, X, Y の射影性は仮定しない。

Theorem 1.1 · p. 3

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [B-semiampleness for compact log-smooth Kähler fibrations](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [FF](#) Osamu Fujino; Taro Fujisawa — Variation of mixed Hodge structure and its applications : Hodge 延長と相対対数最高形式の比較。arXiv:2304.00672v3 (2025-03-11)。
- [MWWZ](#) Shin-ichi Matsumura; Juanyong Wang; Xiaojun Wu; Qimin Zhang — Compact Kähler manifolds with nef anti-canonical bundle : klt log Calabi–Yau ファイバーの有限étale 積分解。arXiv:2506.23218v1 (2025-06-29)。
- [Toma](#) Matei Toma — Bounded sets of sheaves on Kähler manifolds : 固定 Kähler 空間上の Douady 成分のコンパクト性。arXiv:1103.5835v3。
- [BFMT](#) Benjamin Bakker; Stefano Filipazzi; Mirko Mauri; Jacob Tsimerman — Baily–Borel compactifications of period images and the b-semiampleness conjecture : Hodge/moduli 同定と射影的半豊富性。使用する定理と未確認範囲は本文で区別。arXiv:2508.19215v2 (2025-12-18)。
- [BB](#) Walter L. Baily, Jr.; Armand Borel — Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains : 算術商の代数性。外部原典は未照合。Annals of Mathematics 84 (1966), 442–528。
- [Fujiki](#) Akira Fujiki — Countability of the Douady space of a complex space : Douady 成分の可算性。外部原典は未照合。Japanese Journal of Mathematics 5 (1979), 431–447。
- [Vil](#) Mads Bach Villadsen — Hodge modules and Kähler morphisms : period 商または有限被覆のコンパクト化。記事末尾の照合範囲を参照。arXiv:2401.09544v1 (2024-01-17)。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号と PDF 内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHub の閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1の全体像

証明対象：Theorem 1.1 · p. 3 仮定・結論を参照する。

証明の道筋。 まず閾値と延長次数の比較でTheorem 1.1(a)の安定化を得る。(b)では、積分解を族にする、各因子の半豊富性を得る、指定した同型を延長して大域生成を降ろすという順に進む。

(a)で安定化する実際のmoduli lineを最後まで保持し、(b)の大域生成を全点で得る。閾値計算と、補助底 P 上での積分解・ノルムの比較が二つの主要部分である。

root eigenline の延長次数を閾値と比較する

$$\text{ord}_{\text{Hdg}} \tau = t_P - 1, \quad B_S = \sum_P (1 - t_P) P$$

混合 Hodge 延長、留数、全高次モデル上の次数比較
[\[BS\] Thm. 4.4 / Cor. 4.5, pp. 15–17](#); [\[FF\] Thm. 1.1, p. 2](#)

実際の moduli line を同定し安定化する

$$M_{S_1} = \nu^* M_S \quad \text{in } \text{Pic}(S_1)_{\mathbb{Q}}$$

Theorem 1.1(a) と、以後も保持する指定された line

有限被覆・Hilbert–Douady・Baire で一つの族を選ぶ
[\[BS\] Prop. 5.6, pp. 22–25](#); [\[MWWZ\] Cor. 1.3, pp. 2–3](#)
[\[Toma\] Cor. 5.3, PDF p. 19](#)

点ごとの積分分解をコンパクトな補助底上の族にする

$$r : P \rightarrow S, \quad (J, D_J) = (Q, C) \times \prod_i T_i$$

r の一般有限性を仮定しない

代数的 b-semiampleness と算術 period コンパクト化を分けて使う
[\[BS\] Prop. 6.1 / Prop. 7.5, pp. 25–28, 32–34](#)
[\[BFMT\] Thms. 1.5, 5.2, 5.5, pp. 4, 30–32](#)

因子ごとに半豊富な延長を得る

$$H_Q \text{ 射影的比較因子, } H_i \text{ torus} \cdot \text{symplectic 因子}$$

両側ノルム評価で flat twist を除き、Stein 分解後に norm を取る
[\[BS\] Lemmas 8.1, 8.3 / §9, pp. 34–37](#)

同型を延長し、全点での大域生成を降ろす

$$r^* \mathcal{O}_S(NM_S) \simeq H_Q \otimes \bigotimes_i H_i$$

M_S semiample Theorem 1.1(b)

閾値による安定化から、積分分解、半豊富な因子、同型の延長と降下までの全体図

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 安定化するlineを局所計算で固定する

root eigenlineの延長次数をlctと比較し、任意の高いモデルに対する引戻し恒等式を得る。数値類ではなく指定した正則lineを追跡する。

Theorem 4.4 · Corollary 4.5 · pp.15–17

2. 積分分解を族にし、因子ごとに半豊富性を得る

コンパクトな補助底上で射影的因子とtorus・symplectic因子へ分解する。前者は射影的比較族のb-semiampleness、後者は算術periodコンパクト化を使う。同じ指定lineと積ノルムを保持する。

Proposition 5.6 · Proposition 6.1 · Proposition 7.5 · pp.22–34

3. 指定同型を延長して全点での生成を降ろす

両側のノルム評価で同型と逆同型の極を除き、境界とflat twistを残さない。proper全射のStein分解後にnormを取り、一つの共通倍での大域生成を得る。

Lemmas 8.1, 8.3 · §9 · pp.34–37

(a)と(b)を合わせてTheorem 1.1を得る。以後の詳細図では、安定化、族の構成、因子の半豊富性、同型と切断の降下を順に展開する。

3. Theorem 1.1(a) — 閾値を延長次数として読む

証明対象：Theorem 1.1 · p. 3 仮定・結論を参照する。

$p: W \rightarrow S$ をSNC境界をもつモデルとし、 D_W をcrepant境界、 $Q_S = \mu_0^* L - K_S$ とする。十分可除な m について $\mathcal{O}_W(m(K_{W/S} + D_W)) \simeq p^* \mathcal{O}_S(mQ_S)$ を固定する。局所生成元の m 乗根から作る被覆は、非連結でもすべての成分を保持する。

1 局所 root を取り、全成分を保持する

$$K_{W/S} + D_W \sim_{\mathbb{Q}} p^* Q_S, \quad F^d \mathbb{V}_{\chi} = \mathcal{O}\tau$$

全最高空間でなく、指定された指標の固有直線

係数 1 の水平成分の最大交差数 k を用い、反復留数を取る
Prop. 3.4, Lem. 3.5, pp. 10–12

2 最深 stratum への留数で純粋な line に移す

$$F^d \mathrm{Gr}_{d+k}^W \mathbb{V}_{\chi} \simeq \text{深さ } k \text{ の klt log-volume line}$$

局所 frame ・ 次数 m の同定を保持する

disk モデルで延長可能性を両方向に判定し、 du の Jacobian を含める
Lem. 4.2–4.3, Thm. 4.4, pp. 13–16
 混合 Hodge 延長と最高直接像：[FF] Thm. 1.1, p. 2

3 閾値と延長次数を一致させる

$$t_P = \min_E \frac{1 - \delta_E}{a_E}, \quad \mathrm{ord}_{\mathrm{Hdg}} \tau = t_P - 1$$

$$a_E = \mathrm{ord}_E(t), \quad \delta_E = \mathrm{coeff}_E D_W$$

power chart で次数を消し、相対標準束の変化と閾値を相殺する
Thm. 4.4, Cor. 4.5, pp. 15–17

4 境界を補正し、すべての高いモデルへ降ろす

$$-K_{S_1/S} - B_{S_1} + \nu^* B_S = 0$$

$$M_{S_1} = \nu^* M_S \quad \text{in } \mathrm{Pic}(S_1)_{\mathbb{Q}}$$

Theorem 1.1(a)：良い開集合内を中心とする変更も含む

root eigenline、留数、閾値次数、高いモデルでの安定化

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 混合Hodge構造から使う直線だけを取り出す

tautological root τ の指標を χ とすると、 $F^d \mathbb{V}_{\chi} = \mathcal{O}\tau$ は rank one である。これは変動全体の最高空間の rank one 性ではない。良いファイバー上で係数 1 の水平成分が同時に交わる最大数を k とすると、この直線は Gr_{d+k}^W に入り、反復留数によって、Tate twist を除けば深さ k の stratum 上の klt log-volume の純粋な固有直線に移る。局所 frame とその次数 m の同定も保持される。 $k = 0$ なら留数操作は不要である。

Proposition 3.4, Lemma 3.5 · pp. 10–12

2. 延長可能な次数を上下から決める

$P = (t = 0)$ の上で $a_E = \text{ord}_E(t)$ 、 $\delta_E = \text{coeff}_E D_W$ とする。SNC解消上の最小値は、すべての因子的付値で定めた閾値に一致する。原稿は、disk上の正規化rootモデルと混合Hodge延長を使い、

$$t_P = \min_E \frac{1 - \delta_E}{a_E}, \quad \text{ord}_{\text{Hdg}} \tau = \min_E \frac{l_E + 1 - a_E}{a_E} = t_P - 1, \quad l_E = -\delta_E$$

を示す。Hodge次数は基底変更の分岐指数で割った正規化次数である。 $t = u^N$ の後に $u^{-Nb}\tau$ を試すと、全形式の変換に du のJacobianが入る。各 $\alpha_E = l_E + 1 - a_E(1 + b)$ が非負なら延長し、負のものがあればその上の成分を残した被覆で極が生じるため延長しない。十分性だけでなく必要性を確保する計算である。FFの直接像同定は、全stratumが底を支配しKählerであるdiskモデルに適用される。compact-support側のlower延長を双対化してordinary cohomology側のupper最高lineを読む。

Lemmas 4.1–4.3, Theorem 4.4 · pp. 12–16 · FF, Theorem 1.1 · p. 2

3. 境界補正を実際の線束として貼り合わせる

$B_S = \sum b_i(t_i = 0)$ なら、power chart $t_i = w_i^{N_i}$ 上で $\prod_i w_i^{N_i b_i} \pi^* \tau$ は次数0になる。十分なtensor powerでroot of unitの曖昧さを消し、Hartogs延長で交差点も埋めると、指定した開集合上の同定が $\pi^* \mathcal{O}_S(amM_S) \simeq E_\chi^{\otimes am}$ へ延長する。さらに $S_1 \rightarrow S$ では $Q_{S_1} = \nu^* Q_S - K_{S_1/S}$ を保って同じ計算を行う。相対標準束の次数と新しい閾値の差が相殺され、

$$-K_{S_1/S} - B_{S_1} + \nu^* B_S = 0$$

を得る。中心が良い開集合の内部にあるmodificationも含まれ、これが(a)を与える。

Theorem 4.4, Corollary 4.5 · pp. 15–17

安定化したmoduli lineと、指定されたlog-volume lineの同定を以後も保持する。次の積分分解で比較する対象がこれで固定される。

BS, Corollaries 4.5–4.6 · pp. 16–18

4. Proposition 5.6 — 点ごとの積分分解を族にする

証明対象：Proposition 5.6 · pp. 22–25

前節の深いstratumから、良いファイバーがklt log Calabi–Yauとなる族を取り出す。 G_m は次数 m のlog-plurivolume lineである。必要なのは、ファイバーごとの分解に加えて、lineの同定とノルムを保持する一つの族である。

Proposition 5.6

Theorem 1.1の設定で、Corollary 4.6とLemma 5.1 (pp. 17–19) から得た、最深係数1 stratumの**marked klt family**を用いる。良い開集合 $U \subset S$ 、十分可除な正整数 m 、指定された次数 m のlog-volume line G_m とその留数ノルムを固定する。

滑らかなコンパクト連結多様体からのproper全射 $r : P \rightarrow S$ と、稠密開集合 $P^\circ \subseteq r^{-1}(U)$ を取ると、引き戻した族は有限étale被覆上で

$$(J, D_J) \simeq (Q, C) \times_{P^\circ} \prod_i T_i$$

と分解する。各族はproper smoothで連結ファイバーをもつ。 (Q, C) はeffective klt SNC対の射影族で、 $P^\circ \times \mathbb{P}^N$ に埋め込まれ、 P 全体から射影Hilbert schemeの固定積への正則写像により普遍marked族から引き戻される。各 T_i は固定コンパクトKähler多様体の部分多様体の族で、 $n_i = \dim T_i > 0$ 、整格子（torsionを除く）とflatな実偏極をもち、最高lineは $\lambda_i = (\pi_i)_* \omega_{T_i/P^\circ}$ である。torus型では $h^{1,0} = n_i$ かつ $\bigwedge^{n_i} F^1 R^1 \simeq \lambda_i$ 、symplectic型では n_i が偶数、 $h^{2,0} = 1$ かつ $(F^2 R^2)^{\otimes n_i/2} \simeq \lambda_i$ で、これらはcup積による。

すべてのファイバー上で $m(K_Q + C)$ と mK_{T_i} は自明である。

$G_{m,Q} = (\pi_Q)_* \mathcal{O}_Q(m(K_{Q/P^\circ} + C))$ とすると、指定された正則線束の同型とノルムの一致

$$r^* G_m \simeq G_{m,Q} \otimes \bigotimes_i \lambda_i^{\otimes m},$$

$$\|s\|_{\text{res}} = c \|s_Q\|_{Q, \text{res}} \prod_i \|\omega_i\|_{\text{Hdg}}^m.$$

を得る。被覆次数を e とすると、整合する体積規約では $c = e^{-m/2} > 0$ である。このノルムは十分可除な $r^*(mM_S)$ の冪の生成元と双対に両側の対数増大評価を与える。さらにsmooth compactな補助底変更後も良い開集合上で保持される。 r の一般有限性や P のKähler性は仮定しない。

Proposition 5.6 · pp. 22–25

1 section をもつ klt log-volume 族を取り出す

$$\Sigma \longrightarrow S, \quad m(K_F + D_F) \sim 0, \quad (F, D_F) \text{ klt}$$

最深 stratum の Stein 分解と対角 section

ファイバーの積分分解と、固定指数の部分群の有限性を組み合わせる

Lem. 5.1, 5.3–5.4, pp. 18–21

積分分解の入力: [MWWZ] Cor. 1.3, pp. 2–3

2 有限 étale 積分分解を族として列挙する

$$(J, D_J) = (Q, C) \times \prod_i T_i$$

Q は射影的、 T_i は torus または既約 symplectic 因子

graph 条件・境界の一致を構成可能条件にし、可算個の閉包に Baire を適用

Lem. 5.5, Prop. 5.6, pp. 22–25

Douady 成分のコンパクト性: [Toma] Cor. 5.3, p. 19

3 コンパクトな parameter space から支配する成分を選ぶ

$$K = B \times \text{Hilb} \times \prod_i \text{Douady}_i \times \text{Douady}_{\text{graph}}$$

$$r: P \longrightarrow S \text{ proper 全射}$$

P は滑らかなコンパクト複素多様体

族の積分分解に log-volume 同型と留数積分の比較を付随させる

Prop. 5.6, (5.5)–(5.6), pp. 22–25

4 指定した line と積ノルムを保持する

$$r^* G_m \simeq G_{m,Q} \otimes \bigotimes_i \lambda_i^{\otimes m} \quad \text{on } P^\circ$$

$$\|s\|_{\text{res}} = c \|s_Q\|_{Q,\text{res}} \prod_i \|\omega_i\|_{\text{Hdg}}^m, \quad c > 0$$

P の Kähler 性・射影性・一般有限性は仮定しない

有限被覆とcompact parameter spaceから積分分解の族を構成する

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 積分分解を有限被覆の族として列挙する

最深stratumのStein分解とgraphの解消を用いて、対角sectionをもつ族を作る。各kltファイバーはMWWZの有限étale積分分解をもち、射影的な因子をまとめた (Q, C) とtorus・既約holomorphic symplectic因子 T_i に分かれる。境界は Q 側に集まり、 Q が点の場合も許す。sectionにより基本群を半直積として記述でき、有限生成なファイバー基本群の固定指数部分群が有限個であることから、有限底被覆の後に各有限étale被覆を族へ広げる。

Lemmas 5.1, 5.3–5.4 · pp. 18–21 · MWWZ, Corollary 1.3 · pp. 2–3

2. コンパクトなparameter spaceとBaireで一つの族を選ぶ

射影的因子はHilbert schemeで、 T_i と分解のgraphは固定コンパクトKähler空間のDouady成分で記録する。積のgraph・étale性・境界の一致を解析的構成可能条件として課す。Hodge数とcup積のrankで指定するtorus/symplectic型は、正しい一点を含むstratum上で維持する。可算個のコンパクトな閉包の像が良い底を覆うため、Baireによって一つが支配し、その解消からproper全射 $r : P \rightarrow S$ を得る。 P は滑らかなコンパクト複素多様体だが、Kähler・射影的・ S 上一般有限とは仮定しない。

Lemma 5.5, Proposition 5.6 · pp. 22–25 · Toma, Corollary 5.3 · PDF p. 19

3. 分解とともに指定したlineとノルムを運ぶ

稠密開集合 P° 上で、選んだ有限étale被覆は族として

$$(J, D_J) = (Q, C) \times_{P^\circ} \prod_i T_i, \quad r^* G_m \simeq G_{m,Q} \otimes \bigotimes_i \lambda_i^{\otimes m}$$

を満たす。ここで λ_i は各因子の最高lineである。留数積分で定めたノルムは、被覆次数だけから来る正定数を除いて右辺の積ノルムと一致する。この特定の同型とノルムを次節以降へ渡すことが、数値類や不特定のflat twistを残す比較との違いである。

Corollary 4.6 · pp. 17–18; Proposition 5.6, (5.5)–(5.6) · pp. 22–25

同じ補助底 P 上の積分解と積ノルムを、射影的因子とtorus・symplectic因子の個別処理へ渡す。

BS, Proposition 5.6 · §§6–7 · pp. 22–34

5. Proposition 6.1 / Proposition 7.5 — 各因子の半豊富な延長

証明対象：Proposition 6.1 · pp. 25–28

射影的な (Q, C) と、非射影的でもよい T_i には異なる入力を使う。以下では有限被覆・graphの解消・共通tensor powerを取った後の補助底も P と書く。

Proposition 6.1

Proposition 5.6の $P^\circ \subset P$ と射影因子 (Q, C) 、そのline $G_{m,Q}$ を用いる。proper modification $\pi : P' \rightarrow P$ (P' はsmooth compact) と良い開集合の縮小の後、正整数 a 、大域生成される正則線束 H_Q 、指定同型

$$H_Q|_{\pi^{-1}(P^\circ)} \simeq (\pi^* G_{m,Q})^{\otimes a}|_{\pi^{-1}(P^\circ)}$$

が存在する。 $N_{m,Q}(s) = (\int_{Q_x} |s|^{2/m})^{m/2}$ の a 乗を左辺へ移すと、穿孔diskが良い開集合内にある任意の正則disk上で、局所生成元とその双対のノルムが $1 + |\log |t||$ の冪で抑えられる。必要なら有限power substitutionを行う。

Proposition 6.1 · pp. 25–28

Proposition 7.5

Proposition 5.6の $r : P \rightarrow S$ と $T_i \rightarrow P^\circ$ について、 $\mathcal{H}_i = F^{n_i}(R^{n_i}(t_i)_* \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{P^\circ}) = \lambda_i$ とする。良い開集合の有限étale被覆を延長・解消して得るproper generically finite全射 $\pi : P' \rightarrow P$ の後、smooth compactな P' 上に半豊富な正則線束 H_i が存在し、良い開集合への制限を指定された $\pi^* \mathcal{H}_i$ と同定できる。

境界はSNCにできる。穿孔diskが良い開集合内にある任意のdisk上で、 H_i の生成元と逆生成元には体積ノルム(7.4)および双対の対数冪増大評価がある。積体積同型で使う冪を含め、すべての正の冪でもこの評価を保つ。

Proposition 7.5 · pp. 33–34



射影的比較とtorus \cdot symplecticの周期写像を別々に処理する

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 射影的因子にだけ代数的b-semiamplenessを適用する

P からHilbert schemeへの像はコンパクトであり、Chowの定理により射影的である。その射影的モデル R 上の普遍族から、generic kltでgeneric boundaryが有効なprojective lc-trivial fibrationを作る。rational frameから定める補助境界の垂直成分は負でもよい。BFMTの代数的b-semiamplenessで得たlineを引き戻し、本稿の局所閾値計算を再適用して、元の指定されたlog-volume lineとの同定と両側のノルム評価を回復する。原来の非射影的空間に大域的有理frameを仮定する手順ではない。

Proposition 6.1 \cdot pp. 25–28 \quad \cdot \text{BFMT, Theorem 1.5, Definition 6.18, Theorem 6.28} \cdot \text{pp. 4, 42, 44}

2. 実偏極を有理偏極へ移して周期商に写す

T_i は固定コンパクトKähler空間内の部分多様体なので、固定Kähler類からflatな実偏極を得る。本稿Lemma 7.1は、近い有理モノドロミー不変形式と可換な実自己同型を用い、同じ格子をもつ別のfiltrationへ移す。元の各ファイバーが有理偏極されるという主張ではないが、実同型によって正則

Hodge束とその延長を比較できる。torusにはweight 1、symplectic因子には $h^{2,0} = 1$ のweight 2を用い、neat levelでSiegel / type IVの算術商へ写す。解析的period mapの境界延長とGriffiths lineの同定を使って、コンパクト化上のample lineの切断を引き戻す。

Lemmas 7.1–7.4 · pp. 28–32 · BFMT, Theorems 5.2, 5.5 · pp. 30–32

3. Griffiths lineから必要な最高lineへ戻す

torusでは $\lambda_i \simeq \det F^1 R^1$ である。symplectic因子の次元を $2k_i$ 、 $\ell_i = F^2 R^2$ とすると、cup積により $\lambda_i \simeq \ell_i^{\otimes k_i}$ となる。weight 2のGriffiths lineは $\det E \otimes \ell_i^{\otimes 2}$ なので、この平方と $\det E$ の有限位数を処理してから ℓ_i の半豊富性を得る。共通有限被覆で全因子のモノドロミーを処理し、延長のtensor/cup積との整合性を使うと、指定したlineに半豊富な延長 H_Q, H_i が得られる。

Lemma 7.3, §7.4, Proposition 7.5, (7.5) · pp. 30, 32–34

得た半豊富な延長をテンソル積にし、指定された同型を境界を越えて延長するための両側ノルム評価とともに次節へ渡す。

BS, Lemma 8.1 · §9 · pp. 34–37

6. Theorem 1.1(b) — 指定した同型を延長して切断を降ろす

証明対象：Theorem 1.1 · p. 3 仮定・結論を参照する。

前節までの同型は P° 上で与えられている。これを境界の捻りを残さずに延長する段階と、proper全射から大域生成を降ろす段階を分ける。

1 比較同型と逆同型の係数を評価する

$$g : r^* \mathcal{O}_S(NM_S)|_{P^\circ} \simeq (H_Q \otimes \bigotimes_i H_i)|_{P^\circ}$$

$$|g|, |g^{-1}| \leq C(1 + |\log |t||)^b \quad \text{横断 disk 上}$$

両側の評価で負の Laurent 係数を消し、Hartogs で交差点を埋める
 Lem. 8.1, pp. 34–35; §9, pp. 36–37

2 指定した同型を境界全体へ延長する

$$r^* \mathcal{O}_S(NM_S) \simeq H_Q \otimes \bigotimes_i H_i \quad \text{on } P$$

右辺は半豊富、境界の捻り・flat twist を残さない

連結ファイバーで切断を降ろし、各有限ファイバーで同時に非零な切断を取る
 Lem. 8.3, pp. 35–36

3 Stein 分解して有限射の norm を使う

$$P \xrightarrow{h} T \xrightarrow{q} S, \quad h_* \mathcal{O}_P = \mathcal{O}_T, \quad \deg q = d$$

$$q^* A^{\otimes n} \text{ 大域生成} \implies A^{\otimes nd} \text{ 大域生成}$$

全点で同じ指数を使う。 $P \rightarrow S$ の一般有限性は不要
 Lem. 8.3; §9, pp. 35–37

4 moduli line の大域生成を得る

$$A = \mathcal{O}_S(NM_S), \quad \boxed{\mathcal{O}_S(ndNM_S) \text{ 大域生成}}$$

Theorem 1.1(b) : 実際の正則線束の結論

両側のノルム評価による同型の延長とStein分解後のnorm降下

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 同型と逆同型の両方から極を排除する

Corollary 4.6、Proposition 6.1、Proposition 7.5は、局所frameとその双対にlogの冪によるノルム評価を与える。積ノルムの一致により、比較同型の係数 g と g^{-1} は境界に横断的なdisk上でともにlogの冪で抑えられる。Laurent展開の負の係数は消え、両者が正則に延びる。横方向の正則性とHartogs延長により交差点も処理され、共通の十分可除な $N > 0$ について

$$r^* \mathcal{O}_S(NM_S) \simeq H_Q \otimes \bigotimes_i H_i$$

という実際の正則線束の同型になる。右辺には必要な共通tensor powerを吸収した。開集合上の指定した同型を延ばすため、見えないflat twistも残らない。

Lemma 8.1 · pp. 34–35; §9 · pp. 36–37

2. 一般有限性を仮定せずnormで大域生成を降ろす

r のStein分解を $P \xrightarrow{h} T \xrightarrow{q} S$ 、 $\deg q = d$ とする。 $h_*\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_T$ により、引き戻しlineの切断は T へ降りる。 $q^*A^{\otimes n}$ が大域生成なら、任意の $s \in S$ に対して有限集合 $q^{-1}(s)$ のすべてで非零な一つの切断を選ぶ。そのnormは $A^{\otimes nd}$ の切断となり s で非零である。 q がflatでなくても、一般点での積を正規性により延長できる。同じ n, d が全点で使えるので、 A は半豊富となる。 $A = \mathcal{O}_S(NM_S)$ に適用して(b)が従う。

Lemma 8.3 · pp. 35–36; §9 · pp. 36–37

ある一つの共通倍が S の全点で生成され、(a)の引戻し安定性と合わせてmoduli b-lineの半豊富性を得る。他の033稿への直接依存はこの結論から推定しない。

BS, Theorem 1.1 · §9 · pp. 3, 36–37

7. どの論文が、どの段階を担うか

入力

FF, Theorem 1.1、v3、p. 2

使用箇所と役割

§3、Lemma 4.2 : Kähler stratumをもつSNC族の混合Hodge延長と最高直接像

今回の照合

定理文・適用モデルを照合

入力

MWWZ, Corollary 1.3、v1、pp. 2–3

使用箇所と役割

Lemma 5.3 : 数値的に自明なlog canonical classをもつeffective kltファイバーの有限étale積分分解

今回の照合

定理文・仮定を照合

入力

Toma, Corollary 5.3、v3、PDF p. 19

使用箇所と役割

Proposition 5.6：固定コンパクトKähler空間のDouady成分のコンパクト性

今回の照合

記述・使用箇所を照合

入力

BFMT, Theorem 1.5 / Definition 6.18 / Theorem 6.28、v2、pp. 4, 42, 44

使用箇所と役割

Proposition 6.1：射影的比較族の半豊富性とHodge/threshold moduliの比較

今回の照合

generic effectivity・rank条件・用途を照合

入力

BFMT, Theorems 5.2, 5.5、v2、pp. 30–32

使用箇所と役割

Lemma 7.4：ample Griffiths延長を算術商から解析的に引き戻す

今回の照合

定理文・局所liftabilityを照合

これらは本稿の補助結果に対する直接入力である。外部定理の証明全体は検証していない。Baily–Borelの算術商の代数性、Fujikiの可算性、有限被覆のコンパクト化、純Hodge延長の一般理論については、本稿内の用途を読んだが外部原典の該当箇所の照合を残した。本稿p. 3の「Campana orbifold Iitaka theoremを使わない」という記述から、他の外部依存まで排除しない。カタログ033の他稿および034との直接依存は未調査である。

8. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1・p. 3 — 主定理の仮定・結論を確認し、下記の証明箇所と対応させる
- Proposition 5.6・pp. 22–25 — 積分分解だけでなく指定line・cup積・積ノルムを同時に運ぶ構成を読む

- Proposition 6.1 · pp. 25–28 — 射影的比較因子から指定lineの大域生成と両側ノルム評価を得る

原典はOpenAI、2026年9月10日稿、全38ページ。上記BSはcommit

fd4aeeb2ee4fc729c18d98444fed42fd0529eeebの固定版である。§§3–4 · pp. 6–18で固有直線と閾値の接続、Proposition 5.6 · pp. 22–25で族の構成、§§6–9 · pp. 25–37で因子の半豊富性から降下までを辿れる。

編集側ではTheorem 1.1の設定・二つの結論、上記の証明箇所、外部入力の記述と適用箇所を読んで照合した。これは原稿の全証明が数学的に正しいと認証するものではない。混合Hodge延長の構成、Hilbert–Douadyによる全parameter-space構成の細部、実偏極の変更と全延長の整合性は独立した証明検証をしていない。外部原典を未照合とした接続は保留し、定理の著者の主張と区別する。