

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 004

$\mathbb{Q}$ 上のHilbertの 第10問題

総括・論文間のつながりと2篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-15

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

総括に続き、公式カタログ順で全2篇の解説を収録しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00・カタログ004 総括	3
01・Hilbert's tenth problem over the rational numbers	8
02・A pointwise 2-converse for elliptic curves with rational two-torsion	19

原論文の参照版: 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a

[カタログ004・総括](#)[Web版を読む ↗](#)

CATALOGUE 004

有理数体上のヒルベルト第10問題

Hilbert's tenth problem over $\mathbb{Q}$

カタログ004は、有理零点の決定不能性を扱う原稿と、その局所条件の構成に使う楕円曲線の点別2-converseを収録する。論理の終点は整数零点問題から有理零点問題へのTuring帰着であり、整数の存在量化的定義を結論するものではない。

1. 公式順の記事一覧

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

[カタログ 004・2026-10-15 確認の固定参照版](#)

#

01

論文・概説

[Hilbert's tenth problem over the rational numbers →](#)

図中の略称: Hilbert's tenth problem over the rational numbers

October 6, 2026 · 62 ページ

[原論文 \(GitHub\) ↗](#)

主に何を主張するか

変数数を入力に含む整数係数多項式の有理零点の有無は決定不能。問題のTuring次数は $0'$ で、次数4以下および二次式の平方和への制限でも同じ。

[Theorem 1.1 · p. 3; Corollary 7.1 · pp. 56–57 ↗](#)

議論の役割・概説

再帰的な有限有理テストから整数零点を回収する。楕円曲線の添字比較・極の偶奇・五点接触の高さ評価を合流させ、整数零点探索と失敗テスト探索を並走させる。

[証明概説を読む →](#)

#

02

論文・概説

A pointwise 2-converse for elliptic curves with rational two-torsion →

図中の略称: A pointwise 2-converse for elliptic curves with rational two-torsion

October 7, 2026 · 91 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

$E/\mathbb{Q}$ に非零の有理2-torsionがあり、full 2^∞ -Selmer群の $\mathbb{Z}_2$ -corankが0または1なら、解析的rankとMordell–Weil rankはそのcorankに等しく、 $\text{Sha}(E/\mathbb{Q})$ は有限。2での還元型は任意。

Theorem 1.1 · p. 2 ↗

議論の役割・概説

有限twist族の非零addressから固定曲線の中心値・導関数を整数的補間で回収する。先行原稿のLemma 3.4では、そのうちSha有限性を所定の平方類の有理点を得るために使う。

証明概説を読む →

図の矢印に付した引用

本案内では各原稿の結果を次のキーで区別する。原稿間の直接入力と、一つの原稿内での後続段階への利用を図の中で区別する。

- **OpenAI26H** : OpenAI, Hilbert’s tenth problem over the rational numbers, October 6, 2026。有限有理テスト、極の偶奇、五点接触の高さ評価と決定不能性を扱う。

[OpenAI26H, Theorem 1.1, p. 3]

- **OpenAI26P** : OpenAI, A pointwise 2-converse for elliptic curves with rational two-torsion, October 7, 2026。full 2^∞ -Selmer corankが0または1の場合の解析的rank・Mordell–Weil rank・Sha有限性を供給する。

[OpenAI26P, Theorem 1.1, p. 2]

引用のページは誌面とPDF位置が一致する。GitHubの閲覧ページでは指定ページへの自動移動を前提としない。

2. 点別2-converseから有限テストへの接続



点別2-converseによる有理点の実現と、高さ・局所比較が有限有理テストに合流する経路

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. Selmer類を所定の有理点へ移す

有理2-torsionを持つ曲線への点別2-converseは、Hilbert原稿のLemma 3.4へ直接入力される。対象は $E_l : y^2 = x(x-l)(x+3l)$ であり、2-descentで得た

$$r + \dim_{\mathbf{F}_2} \text{Sha}(E_l/\mathbf{Q})[2] = 1$$

から、まずfull 2^∞ -Selmer corankが高々1であることを確かめる。その後に2-converseのSha有限性を用いる。有限な2-primary群上のCassels–Tate pairingの交代性によって $\dim \text{Sha}[2]$ が偶数となり、 $r = 1$ と $\text{Sha}[2] = 0$ が従う。これにより選ばれたSelmer類 $\gamma = (\beta, 1)$ が有理点で実現される。

[OpenAI26H, Lemma 3.4, pp. 23–24]

Lemma 3.6は二つのtwistに同じパラメータを用意する。上の有理点を両方に適用して、整数では常に成立する正の存在量化的条件 Φ を得る。 Φ は有限個の例外素数以外で奇数位数の極を排除するが、偶数位数の極は許す。この片側条件を $\mathbf{Z}$ の定義と読み替えてはならない。詳しくはHilbert原稿の記事と2-converseの記事を参照。

[OpenAI26H, Proposition 2.8, p. 12]

[OpenAI26H, §3.4, pp. 24–26]

2. 局所比較と高さを同じモデルへ集める

有限テストをすべて通ると、compactnessにより有理数体の初等拡大内に根を持つ環 R が得られる。楕円点の添字写像 $\eta: R \hookrightarrow {}^*\mathbf{Z}$ は加法的であり、乗法的とはまだ分からない。極の偶奇条件は接触素数で適切な局所分岐を選ぶために使われ、対になった楕円局所テストが環の値と添字の合同を与える。

[OpenAI26H, Lemma 2.10; Proposition 2.11, pp. 14–15]

この合同を固定した根座標へ適用することで、各斜率の接触素数積の K 乗が同一の $\delta = f(\eta(a))$ を割る。五点接触の高さ評価 $h(s) \leq HM(s)^c$ と合わせ、 $\delta \neq 0$ の場合には環全体の値の高さに一様な上界を得る。楕円点の標準高さの二次増大と比較すると根の添字は通常の有限区間に入り、加法性と単射性で通常の整数根に戻る。素数パターンの構成は、逆方向である「整数根があれば全テストを通る」ための通常モデルを供給する。

[OpenAI26H, Theorem 2.4, p. 9]

[OpenAI26H, §2.4; Proposition 2.12, pp. 12–17]

3. 決定手続きの仮定を矛盾へ変える

有理零点の判定器があると仮定する。各有限テストは有限回の有理零点問い合わせで判定できるため、整数根の列挙と失敗テストの探索を並走させれば整数零点の有無を決定できる。固定された有限個の算術データをプログラムへ組み込むことと、それらを入力多項式ごとに計算することは区別されている。帰着の詳細と次数4以下への正規化はHilbert原稿の記事で扱う。

[OpenAI26H, Corollary 7.1, pp. 56–57]

3. 直接入力と、その先の利用

供給する結果

Pointwise 2-converse, Theorem 1.1

使用先

Hilbert, Lemma 3.4

使用内容・条件

非零有理2-torsionとfull Selmer corank ≤ 1 を先に確認し、Sha有限性を使う

確認範囲

両原典の主張と適用箇所を照合

この直接辺からProposition 2.8、局所分岐の選択、有限テストへ続く経路はHilbert原稿内の推移的な利用である。2-converseだけで高さ評価や有限テストの有効性が得られるわけではない。Hilbert原稿 Remark 3.5は有理2-torsionを仮定しない別のconverseでも置換できると記すが、その別経路の証明は本案内では照合していない。

[OpenAI26H, Lemma 3.4, pp. 23–24]

4. 原典への入口と確認範囲

公式分野は **Number theory**（数論）、番号範囲は001–031。本項004は OpenAI Research Catalog のp.2にあり、掲載順は上表の通りである。参照する公式リポジトリはcommit 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a。論文本文の版はそれぞれOctober 6, 2026とOctober 7, 2026。

OpenAI Research Catalog · Catalogue 004 · p. 2

- Hilbert原稿：§2.4–2.7で有限テストの構成から整数根への帰還、§3.3–3.4で点別2-converseの適用と二つのtwistへの同時実現、§7でTuring次数と正規化を読む。
- Pointwise原稿：Theorem 1.1のfull Selmer条件を確認してから、§9でcorank zeroの補間、奇側の一様な正規化、固定された負twistを使うcorank oneの帰還を追う。

本案内は主結果と主要な接続を原典本文で照合した解説である。Pointwise原稿の全整数的補間・一様評価、Hilbert原稿の全高さ・篩評価、外部入力的全証明を独立に検証したものではない。個別記事末尾に、読んだ箇所と未確認範囲を記す。

Hilbert's tenth problem over the rational numbers

有限の有理数テスト、加法的な楕円曲線指数、一様な高さの矛盾

本原稿は、有理数上の多項式可解性の判定不能性を、整数可解性からのTuring帰着によって主張する。整数全体の存在定義や、乗法まで保存するDiophantine modelを構成する論証ではない。以下では原稿の主張と、その直接入力・適用箇所を照合した範囲を区別する。

原稿の著者: OpenAI · October 6, 2026 · 62 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#)

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 有理数可解性の判定不能性

整数係数多項式 $f \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ を入力し、 f が $\mathbb{Q}^n$ に零点を持つかを決定するアルゴリズムは存在しない。変数の個数 n も入力の一部である。原稿はこの主張を追加の予想を仮定しない定理として述べる。

Theorem 1.1 · p. 3

Corollary 7.1 — Turing次数と四次正規形

通常の実効的符号化で、有理数零点を持つ整数係数多項式の集合 $H10(\mathbb{Q})$ のTuring次数は停止問題の次数 $0'$ に等しい。次の二つの入力制限でも同じ次数となる。

- 総次数が高々4の整数係数多項式の有理数可解性。
- 総次数が高々2の $q_1, \dots, q_s \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_N]$ の空でない有限リストを入力し、 $\sum_{i=1}^s q_i^2$ の有理数零点の存在を判定する問題。

変数数、(2)の項数、係数高さには上限を設けない。

Corollary 7.1 · p. 56

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Hilbert’s tenth problem over the rational numbers](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [OpenAI26P](#) OpenAI — A pointwise 2-converse for elliptic curves with rational two-torsion：有理2捩れと全2一次Selmer corankが0または1のときのSha有限性。Lemma 3.4への直接入力。October 7, 2026; fixed commit 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a。
- [OpenAI26F](#) OpenAI — Fontaine–Mazur modularity at the prime 2：§4.7の奇・regularな2次元2進表現のモジュラー性。残余像の条件なし。October 6, 2026; fixed commit 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a。
- [Dav73](#) Martin Davis — Hilbert’s tenth problem is unsolvable：整数問題の判定不能性と次数に使うDPRM表示定理。The American Mathematical Monthly 80(3) (1973), 233–269; source scan includes a leading JSTOR cover page。
- [PS99](#) Bjorn Poonen; Michael Stoll — The Cassels–Tate pairing on polarized abelian varieties：有限Sha上の完全交代ペアリングと有理因子による偏極の条件。Author version: November 6, 1998; minor correction August 23, 2014; published Annals of Mathematics 150 (1999), 1109–1149。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 有限テストによる二つの探索

証明対象：[Theorem 1.1](#) · p. 3

証明の道筋。 非定数 f から再帰的な有限テスト列を作り、「整数零点が存在する」と「すべてのテストが成功する」を同値にする。逆向きの算術的核心は次節のProposition 2.12である。各テストを有理数可解性のオラクルで決められれば、整数零点の列挙と失敗テストの探索を並行して整数問題を決定できる。

1 再帰的なテスト列を作る

$f \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$, 非定数.
 $T + f(a) = 0$ を Skolem 化し、閉項の有限制約と Φ を課す。
 各テストは有限個の有理数可解性質問に変換できる。

コンパクト性：有限部分の有理数証人を同時に実現する。
[Lemma 2.9 · pp. 13–14](#)

2 全テスト成功から一つのモデルへ

$R \hookrightarrow {}^*\mathbb{Q}$, $f(a) = 0$, $\Phi(\tilde{A})$ ($A \in R$).
 初等図式は存在証明でのみ使用し、アルゴリズムには入れない。

一様高さ上界と非振れ点の二次高さ増大を比較する。
[Proposition 2.12; \(2.21\)–\(2.28\) · pp. 16–17](#)

3 算術的な帰還

all tests succeed $\implies \exists \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^n : f(\mathbf{n}) = 0$.
 奇数極の排除 + 局所指数合同 + 5 点高さ評価。
 加法的指数を通常有限区間へ押し戻す（次の図）。

整数モデルで順方向も成立。DPRM の判定不能性へ矛盾。
[Proof of Theorem 1.1 · p. 17](#) [[Dav73, Theorem 8.1, 誌面 p. 264 / PDF p. 33](#)]

4 二つの探索で整数問題を決定

零点あり：整数組を列挙。零点なし：失敗テストを発見。
 $H_{10}(\mathbb{Z}) \leq_T H_{10}(\mathbb{Q}) \implies$ 有理数判定手続きは存在しない。

整数モデル、有限テスト、コンパクト性と整数零点への帰還

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 一般一階理論を有限の存在的質問へ分解する

固定した $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 、 $d = 75 - 53\sqrt{2}$ 、 $E: y^2 = x^3 - d^2x$ に対し、Proposition 2.1 は $mE(F) = \mathbb{Z}P$ となる正整数 m と非振れ点 P を供給する。理論 T は標数0整域 R に $\sqrt{2} \notin \text{Frac}(R)$ を課し、各 $a \in R$ に $T_a \in mE(\text{Frac}(R)(\sqrt{2}))$ を対応させる。 $T_0 = O, T_1 = P, T_{a+a'} = T_a + T_{a'}$ 、非零 a に対する有限・非零座標条件を課す。座標の分子・分母は六つの R 値関数で記録する。

さらに各通常整数 $K \geq 1$ と各 $A \in R$ について、 $A = (u_1 + u_2 + u_3)/v$ という三つの傾きの表示と、接触形式の因子に対する二つの局所比較を要求する。理論そのものには全称量化があり、 R を有理数の中で単一の存在式により定義してはいない。固定有限データは入力 f に依存せず、理論へ定数として組み込める。Lemma 2.7の整数モデルでは $T_a = aP$ である。

[Proposition 2.1; §2.3; Lemma 2.7 · pp. 7, 11–12](#)

$f(a) = 0$ を加えてSkolem化し、閉項を列挙する。各閉項へ有理数変数を割り当て、環演算、関数の同値な入力に対する整合性、全称公理の閉項代入、各項値の正の存在条件 Φ を有限個ずつ課す。有限部分は存在的な多項式等式・不等式のBoolean結合であり、 $g \neq 0$ を $gy = 1$ へ、連言を平方和へ変換して、有限個の整数係数多項式の有理数可解性質問にできる。 Φ の補助証人やこの逆元変数は項生成環の新しい閉項には加えない。

§2.4 · pp. 12–13

2. 成功の全体からモデルを得て、失敗探索を完備にする

整数零点があれば整数モデルの全項値が Φ を満たし、すべてのテストは成功する。逆にすべて成功すれば、コンパクト性により、算術・付値・高さ・有限積を備えた通常構造の一つの初等拡大内に $R \hookrightarrow {}^*\mathbb{Q}$ と $f(a) = 0$ を得る。ここで初等図式を使うのはモデルの存在証明のみであり、計算機が真の算術文を列挙したり照会したりするのではない。

Proposition 2.12はこのモデルから通常の整数零点を導く。したがって零点がなければ有限段階でテストが失敗する。整数零点列挙と失敗テスト探索を交互に進めると、仮定した有理数判定手続きから整数判定手続きを得てDPRMに矛盾する。定数多項式は直接処理する。

Lemma 2.9 · pp. 13–14

Proof of Theorem 1.1 · p. 17

[Dav73, Theorem 8.1, 誌面 p. 264 / PDF p. 33]

3. Proposition 2.12 の証明 — 同じ誤差をすべての環要素に使う

証明対象 : Proposition 2.12; (2.21)–(2.28) · pp. 16–17

Proposition 2.12 — 全有限テストの成功から整数零点へ

$f \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ を非定数とする。原稿§2.4で f から構成する有理数制約のすべての有限系が可解ならば、 f は $\mathbb{Z}^n$ に零点を持つ。

Proposition 2.12; (2.21)–(2.28) · pp. 16–17

初等拡大への像にチルダを付ける。 $\tilde{T}_a = \eta(a)P$ によって得る $\eta: R \rightarrow {}^*\mathbb{Z}$ は単射・加法的で $\eta(1) = 1$ だが、乗法保存はまだ分らない。固定された根 $a = (a_j)$ に対し

$$\delta = f(\eta(a_1), \dots, \eta(a_n)), \quad B = \max(1, |\eta(a_1)|, \dots, |\eta(a_n)|), \quad D = \max(1, \deg f)$$

と置く。 $\delta = 0$ なら初等性で通常整数の零点が得られる。図は $\delta \neq 0$ の場合を示す。

1 根の誤差と精度を固定

$\delta = f(\eta(a)) \neq 0, \quad |\delta| \leq C_f B^D, \quad K \geq cD.$
 各 $A \in R$ を 3 傾きで表示: $\tilde{A} = \sum_{i=1}^3 \tilde{u}_i / \tilde{v}.$

Φ の極の偶奇制限で付値を粗くし、その中心を使う。
[Lemma 2.10; Proposition 2.11 · pp. 14–15](#)

2 奇数接触から試験枝を選ぶ

$q \mid M_K(s_i) \implies v_q(\tilde{r}) \text{ odd}.$
 負の環付値で生成される凸部分群 J の外に $v_q(\tilde{r}) > 0.$
 $r^l(R_F)_p \implies v^* \geq l.$

同じ h, j_0 が全 a に働く。乗法性は仮定しない。
[Proposition 2.2; Lemma 2.3 · pp. 8–9](#)

3 共役比較から主比較へ

$\eta(ha) \equiv 4\eta(a), \quad \eta(h) \equiv 4 \pmod{q^K}.$
 指数比は整: 切断形式対数を適用できる。
 $v_q(\tilde{a} - \eta(a)) \geq K \quad (\text{all } a \in R).$

根の座標に合同を適用し、5 点高さ評価へ渡す。
[Theorem 2.4; Corollary 2.5 · pp. 9–10](#) [Proposition 2.12; \(2.21\)–\(2.28\) · pp. 16–17](#)

4 同じ δ で全環要素を抑える

$M_K(s_i)^K \mid \delta \implies h(s_i) \leq H_K |\delta|^{c/K} \ll_f B.$
 $h(\tilde{A}) \leq \sum_{i=1}^3 h(s_i) + \log 3 \ll_f B \quad (A \in R).$

楕円座標の分子・分母も環値。 $B = 1$ は直ちに有界。
[Proposition 2.12; \(2.21\)–\(2.28\) · pp. 16–17](#)

5 二次増大で通常整数へ戻る

$h(x(\eta(a_j)P)) \ll_f B, \quad h(x(nP)) = 2\hat{h}(P)n^2 + O(1).$
 $B^2 \ll_f B + 1 \implies \eta(a_j) = n_j \in \mathbb{Z} \implies a_j = n_j.$
 η の加法性・単射性から $f(n) = 0.$

奇数接触から指数合同を得て、全環要素の高さ上界と楕円曲線の二次増大を比較する

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 奇数接触を試験済みの局所環へ接続する

Theorem 2.4は、無限遠を含む固定5点 $C \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ 、例外素数集合 S 、 $H, c > 0$ を供給する。各点で消える原始整数一次形式 L_b を選び、 $s = (u : v) \notin C$ に対し

$$M_S(s) = \prod_{q \in S : \exists b \in C, v_q(L_b(u, v)) - \min(v_q(u), v_q(v)) \text{ が奇数}} q, \quad h(s) \leq H M_S(s)^c.$$

h は対数Weil高さで、積に重複はない。例外素数を有限個追加しても指数 c は同じである。 $K \geq cD$ を一つ固定し、すべての $A \in R$ の表示をこの精度で選ぶ。接触形式の値は $\varepsilon k r$ (k は固定有限集合) であり、接触素数 q はある $\tilde{r}$ の付値を奇数にする。

Theorem 2.4; Corollary 2.5 · pp. 9–10

Φ はすべての整数で成立し、 $q \notin S_1$ での負の付値を偶数に制限するだけで、整数性そのものを定義しない。 R の各要素で Φ が成立することから、負の環付値が生成する凸部分群 $J \subset {}^*\mathbb{Z}$ に属する環付値はすべて偶数となる。したがって奇数の $v_q(\tilde{r})$ は J の外にあり、商付値で正となる。その中心は、 $R_F/rR_F \simeq (R/rR)^2$ の二つの枝の一つである。Lemma 2.10は、その試験済み局所環での r^l 倍数条件を、実際の拡大付値での $v^* \geq l$ へ移す。 R が最初から q 整であるとは仮定していない。

Lemma 2.10; Proposition 2.11 · pp. 14–15

2. 共役側の比較が指数比の整性を先に与える

選ばれた枝では、同じ非零 $h, j_0 \in R$ がすべての $a \in R$ に使える。共役曲線の形式パラメータ比較から

$$\eta(ha) - 4\eta(a) \equiv 0 \pmod{q^K}, \quad \eta(h) \equiv 4 \pmod{q^K}$$

を得る。 $q \neq 2$ なので $\eta(h)$ は単元、 $\eta(ha)/\eta(h)$ は整で $\eta(a)$ と合同である。この整性を得てから主曲線の切断形式対数 ℓ_K にProposition 2.2を適用し、試験条件と合わせて

$$v_q(\tilde{a} - \eta(a)) \geq K \quad (a \in R)$$

と $\tilde{a}$ の整性を得る。指数写像の乗法性を使って $\eta(ha) = \eta(h)\eta(a)$ と置く操作は行わない。移送するのは固定次数の多項式 ℓ_K の評価であり、初等拡大上の無限級数ではない。

Proposition 2.2; Lemma 2.3 · pp. 8–9

3. 根の誤差を固定して高さを一様に抑える

各傾き $s_i = (\tilde{u}_i : \tilde{v})$ のすべての接触素数で根の座標に上の合同を適用すると $v_q(\delta) \geq K$ 。有限積の移送から $M_K(s_i)^K \mid \delta$ となる。一方 $|\delta| \leq C_f B^D$ なので

$$h(s_i) \leq H_K |\delta|^{c/K} \ll_f B, \quad h(\tilde{A}) \leq \sum_{i=1}^3 h(s_i) + \log 3 \ll_f B \quad (A \in R).$$

この定数は A に依存せず、根の組に対しても一様である。 $x(T_{a_j}) = (x_0(a_j) + \sqrt{2}x_1(a_j))/x_2(a_j)$ の三つの環値にも適用できるため、非零 a_j について $h(x(\eta(a_j)P)) \ll_f B$ 。他方、固定非振れ点の標準高さ比較は $h(x(nP)) = 2\hat{h}(P)n^2 + O(1)$ 、 $\hat{h}(P) > 0$ を与える。 $B > 1$ なら最大指数を選んで $B^2 \ll_f B + 1$ 、 $B = 1$ なら直ちに、全指数が通常有限区間に入る。したがって $\eta(a_j) = n_j \in \mathbb{Z}$ 。加法性 $\cdot \eta(1) = 1$ ・単射性から $a_j = n_j$ となり、通常整数零点が得られる。

Proposition 2.12; (2.21)–(2.28) · pp. 16–17

4. Corollary 7.1 の証明 — オラクル帰着と演算回路

証明対象：Corollary 7.1 · p. 56

Corollary 7.1の三つの結論を順に扱う。前節の並行探索は $H10(\mathbb{Q})$ オラクルを用いる一つの機械として動く。正規形への変換では、新しい変数を増やすことを許す。

1 有理数問題の Turing 次数

$$0' \leq_T H10(\mathbb{Z}) \leq_T H10(\mathbb{Q}) \leq_T 0'.$$

最後の上界：有理数組を列挙し、正確に多項式を評価。

次数の下界は DPRM + 有限テスト。回路の構成は実効的。

[Dav73, Theorem 8.1, 誌面 p. 264 / PDF p. 33] [Proof of Corollary 7.1 · pp. 56–57](#)

2 演算回路を二次式リストへ

$$Y_v - X_j, \quad Y_v - c, \quad Y_v - Y_u - Y_w, \quad Y_v - Y_u Y_w, \quad Y_{\text{out}}.$$

これらを $q_1, \dots, q_s$ とする。 $s \geq 1$, $\deg q_i \leq 2$ 。

各入力の回路値への拡張は一意。

有理数の平方は非負。平方和の総次数は高々 4。

[§7, arithmetic-circuit conversion · p. 57](#)

3 平方和で連立条件を一つにする

$$\exists x \in \mathbb{Q}^n : f(x) = 0 \iff \exists z \in \mathbb{Q}^N : \sum_i q_i(z)^2 = 0.$$

$$H10(\mathbb{Q}) \leq_m S_2 \leq_m H_{\leq 4}.$$

両制限問題も有理数組の列挙で計算枚挙可能。

[Corollary 7.1 · p. 56](#)

4 両制限問題も次数 $0'$

変数数・項数・係数高さは固定しない。

整数問題からの帰着は Turing 帰着のまま。

$\mathbb{Z}$ の存在定義や $H10(\mathbb{Q})$ の many-one 完全性は得ない。

整数可解性からの Turing 帰着と、二次方程式の平方和への many-one 帰着

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 有理数問題の次数を上下から決める

DPRMにより停止集合は正整数のDiophantine集合である。正整数証人を $1 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ へ置き換えると $0' \leq_T H10(\mathbb{Z})$ 。前節で $H10(\mathbb{Z}) \leq_T H10(\mathbb{Q})$ 、有理数組の列挙により $H10(\mathbb{Q})$ は計算枚挙可能なので逆の上界も得る。固定算術データは f ごとに選び直すのではなく、一つのオラクル機械へ組み込まれる。

[Dav73, Theorem 8.1, 誌面 p. 264 / PDF p. 33]

[Proof of Corollary 7.1 · pp. 56–57](#)

2. 各演算を二次方程式で記録する

f の演算回路の各節点に変数 Y_v を置き、入力・定数・和・積をそれぞれ $Y_v - X_j = 0$ 、 $Y_v - c = 0$ 、 $Y_v - Y_u - Y_w = 0$ 、 $Y_v - Y_u Y_w = 0$ で表す。出力には $Y_{\text{out}} = 0$ を課す。得られる非空の二次式リスト (q_i) では、入力の各有理数組に対して回路方程式の拡張は一意である。平方の非負性から

$$\exists x \in \mathbb{Q}^n : f(x) = 0 \iff \exists z \in \mathbb{Q}^N : \bigwedge_i q_i(z) = 0 \iff \exists z \in \mathbb{Q}^N : \sum_i q_i(z)^2 = 0.$$

よって $H10(\mathbb{Q}) \leq_m S_2 \leq_m H_{\leq 4}$ 。両制限問題も計算枚挙可能なので次数は $\mathbf{0}'$ 。ここで整数問題から有理数問題への矢印は依然としてTuring帰着であり、 $H10(\mathbb{Q})$ のmany-one完全性や、 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ の単一の存在定義は結論ではない。 S_2 は平方和のリストが入力される問題なので、その表示を認識する問題も生じない。

§7, arithmetic-circuit conversion · p. 57

5. どの論文が、どの段階を担うか

供給元と結果

Pointwise 2-converse：下記引用

利用箇所

Lemma 3.4、Proposition 2.8

使用内容・必要な仮定

$E_l : y^2 = x(x-l)(x+3l)$ の全有理2捩れと $s_2(E_l) \leq 1$ から全Shaの有限性

確認範囲

入力Theorem 1.1とpp. 23–24の適用を照合。入力証明の再検証は別記事

供給元と結果

Poonen–Stoll：下記引用

利用箇所

Lemma 3.4

使用内容・必要な仮定

有理因子 (O) に由来する主偏極に対する交代性。有限2一次群の完全交代ペアリングから $\dim \text{Sha}[2]$ は偶数

確認範囲

著者版§1と適用条件を照合

供給元と結果

Fontaine–Mazur at 2：下記引用

利用箇所

§4.7

使用内容・必要な仮定

連続・既約・奇・有限分岐・2でde Rhamかつ相異なる重みの2次元表現のモジュラー性

確認範囲

入力Theorem 1.1とp. 39の仮定確認を照合。残余像の仮定はない

供給元と結果

Davis：下記引用

利用箇所

Theorem 1.1の終結、Corollary 7.1

使用内容・必要な仮定

計算枚挙可能集合のDiophantine表示と整数問題の次数

確認範囲

Theorem 8.1、正整数証人と整数証人の変更を照合

[OpenAI26P, Theorem 1.1, p. 2]

[PS99, §1, p. 2]

[OpenAI26F, Theorem 1.1, p. 1]

[Dav73, Theorem 8.1, 誌面 p. 264 / PDF p. 33]

Proposition 2.8の整数側の証人は、二つのtwistに同じ平方類を実現することで作る。§3のSelmer計算は $r + \dim_{\mathbb{F}_2} \text{Sha}(E_l)[2] = 1$ を与える。可除部分のcorankを t とすると $t \leq \dim \text{Sha}[2]$ なので、有限性を先取りせず $s_2 = r + t \leq 1$ が従う。Pointwise 2-converseで有限性を得た後に完全交代ペアリングを使い、 $r = 1, \text{Sha}[2] = 0$ として選んだSelmer類を有理点へ持ち上げる。Lemma 3.6の素数・平方類の構成を両twistに適用して Φ の整数完全性を得る。一方、奇数の負付値の排除はLemma 3.1の局所計算である。一般の2-converseはRemark 3.5の代替入力で、採用経路の追加前提ではない。

Proposition 2.8; Lemmas 3.1, 3.4, 3.6 · pp. 12, 18–19, 23–26

Theorem 2.4では、5点上で分岐指数2の被覆上に四元数乗法を持つアーベル曲面族を作る。奇数接触の積 M がファイバーの分岐を制御し、CMの場合は高さを一様に抑える。非CMの場合はisogenyの降下障害を処理して2次元表現を得る。§4.7でその既約性・奇性・de Rham性を確認してFontaine–Mazurを使い、重みからweight 2かつTate twist 0とする。レベル $N \leq CM^a$ 、 $[L' : \mathbb{Q}] \leq CM$ 、 $J_1(N) \sim_{L'} A \times D_0$ 、Jacobian高さと定量的isogeny評価を経て $h_F(A) \leq CM^C$ を得る。底の高さとの比較が必要な $h(s) \leq HM^c$ を与える。この節の全外部定理・定数評価は本記事で独立検証していない。

§4.7; Lemma 4.8; completion of Theorem 2.4 · pp. 39, 42–44

整数モデルの表示はLemma 6.1の素数パターンとCorollary 6.2から来る。還元群の位数 d_1, d_2 に対する $\gcd(d_1, d_2) \mid 4$ と $r \nmid d_1 d_2$ が、 $h \equiv 0 \pmod{d_1}$ 、 $h \equiv 4 \pmod{d_2 r^K}$ を両立させ、同じ $h, j_0 = d_2$ を全整数 a に使える理由となる。素数パターンの下界と悪い素数を除く一様篩の全証明は確認範囲外である。

Lemma 6.1; Corollary 6.2 · pp. 47–48

6. 原典を読む入口と確認範囲

- §2.4 · pp. 12–13 — 有限テストの実効性と証人変数の範囲。
- Proposition 2.2; Lemma 2.3 · pp. 8–9 — 共役比較が指数比の整性を先に与える箇所。
- Lemma 2.10; Proposition 2.11 · pp. 14–15 — 奇数付値と粗い付値の中心で試験枝を選ぶ。
- Proposition 2.12; (2.21)–(2.28) · pp. 16–17 — 同じ誤差 δ を全環要素へ使い、二次高さ増大と比較する。
- Proposition 2.8; Lemmas 3.1, 3.4, 3.6 · pp. 12, 18–19, 23–26 — 存在条件の整数完全性と奇数極排除を分ける。
- §4.7; Lemma 4.8; completion of Theorem 2.4 · pp. 39, 42–44 — モジュラー性・レベル・isogeny・底高さの接続。
- Lemma 6.1; Corollary 6.2 · pp. 47–48 — 全整数に同時に働く局所証人のCRT構成。

- Proof of Corollary 7.1 · pp. 56–57 — Turing帰着とmany-one帰着の出発点の違い。

確認したのは、主結果の仮定と全結論、§2の有限テスト・コンパクト性・局所枝の選択・指数合同・高さ矛盾の本文、§3の2-converse適用前のcorank評価、§4.7のモジュラー性への接続、§5のrank-one計算と形式対数、§6の同時局所証人、§7の各帰着方向である。Pointwise 2-converse、Fontaine–Mazur、Davis、Poonen–Stollの上記入力記述を参照原典で照合した。

§3の全Selmer行列計算、§4の被覆・降下・導手・高さ評価の全外部結果と定数、§6の素数パターンと一様篩の全証明、および標準高さ比較を含むSilverman等の教科書入力の原典再照合は未完了である。外部定理の証明全体の検証、専門家査読、形式検証は行っていない。したがって本記事は原稿の論証と確認範囲を案内するもので、主張の正しさを独立に認定した表示ではない。

A pointwise 2-converse for elliptic curves with rational two-torsion

二進立方体の欠けた頂点を、整係数補間で回収する

原稿は、有理2捩れ点を持つ個々の楕円曲線について、低い 2^∞ -Selmer corank から解析的rankを決定する。中心となるのは、補助二次捩れの非消滅をすべての非零頂点で同時に実現し、その正規化された付値を一様に抑えて、指定された曲線へ戻す構成である。以下は原稿の論証と直接入力 of 接続を整理した概説であり、新しい整係数構成全体の独立検証を意味しない。

原稿の著者: OpenAI · October 7, 2026 · 91 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 有理2捩れを持つ曲線の点ごとの2-converse

$E/\mathbb{Q}$ を $E(\mathbb{Q})[2] \neq 0$ を満たす楕円曲線とする。すべての場所で通常のKummer局所条件を課した full Selmer群について

$$s_2(E) = \text{corank}_{\mathbb{Z}_2} \text{Sel}_{2^\infty}(E/\mathbb{Q}) \in \{0, 1\}$$

と仮定すると、原稿は

$$\text{ord}_{s=1} L(E, s) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q}) = s_2(E), \quad \text{Sha}(E/\mathbb{Q}) \text{ は有限}$$

を示す。2での還元型に制約はなく、有理2捩れが1本の場合と全2捩れが有理な場合、CMの場合も含む。先頭係数のBSD公式は結論に含まれない。

Theorem 1.1 · p. 2

$\text{rank } E(\mathbb{Q}) \leq 1$ や有限2-Selmer群の次元を、この仮定へ置き換えることはできない。Kummer完全列により

$$s_2(E) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q}) + \text{corank}_{\mathbb{Z}_2} \text{Sha}(E/\mathbb{Q})[2^\infty].$$

特にcorank 1は非振れ有理点の存在を先取りしない。corank 0から初めに得られる有限性は $\text{Sha}[2^\infty]$ のものであり、全群の有限性は解析的rankを決めた後に得る。

Lemma 2.1; §2 · pp. 4–6

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [A pointwise 2-converse for elliptic curves with rational two-torsion](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

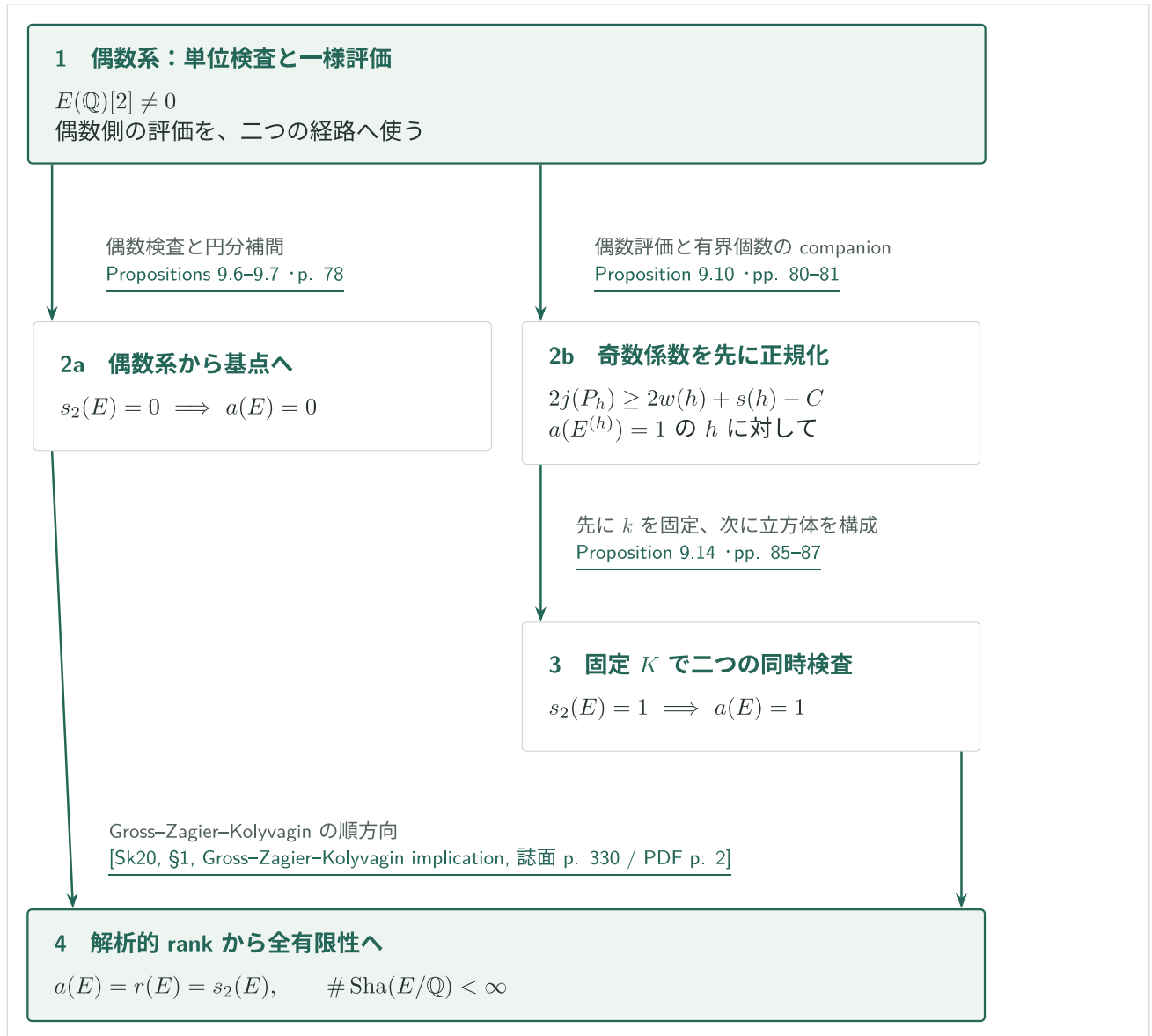
- [Kat04](#) Kazuya Kato — p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms : 固定固有形式の格子へのtrace、明示相互法則、2を反転したdivisibility。Astérisque 295 (2004), pp. 117–290; NUMDAM scan with cover.
- [BT25](#) Ashay A. Burungale; Ye Tian — A rank zero p-converse to a theorem of Gross–Zagier, Kolyvagin and Rubin : CM新形式の全素数での有理主予想。整係数版ではない。arXiv:2506.03465v1, 4 June 2025 (numbering cited by the manuscript).
- [CST14](#) Li Cai; Jie Shu; Ye Tian — Explicit Gross–Zagier and Waldspurger formulae : 分裂Heegner条件下の高さ公式と導手因子の比較。Algebra & Number Theory 8(10) (2014), pp. 2523–2572; publisher PDF with cover.
- [Sk20](#) Christopher Skinner — A converse to a theorem of Gross, Zagier, and Kolyvagin : 序論に記された Gross–Zagier–Kolyvaginの順方向。逆方向の定理は使わない。Annals of Mathematics 191(2) (2020), pp. 329–354; published version.

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 — 主定理の証明概略

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · p. 2

証明の道筋。 偶数符号の係数系からcorank 0の場合と一様な中心値評価を先に得る。後者を使って奇数符号のHeegner点検出器を正規化し、固定した虚二次体上の補間へ進む。図の $\alpha(E)$ は解析的rank、 $r(E)$ はMordell–Weil rankである。



偶数側から奇数側の正規化へ分岐し、二つの解析的rankの結論から全Sha有限性へ合流する

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 偶数側の構成が二つの仕事を担う

二次振れを $h_x = h_0 \prod_q (q^*)^{\lambda_q(x)}$ 、 $x \in \mathbb{F}_2^b$ で配置し、 λ_q を線形形式とする。 $q^* = (-1/q)q$ 、新しい素数は固定有限集合の外にあり、符号と固定場所の平方類は全頂点で同じにする。係数の最小正規化深さから得る二値検査と有限素数ネットワークにより、 $x \neq 0$ のすべてで非消滅と付値の一樣上界を得る。Theorem 3.2がこれを基点へ戻す。Proposition 9.7は $h_0 = 1, s_2(E) = 0$ を処理し、Proposition 9.6は後の奇数側に使う、適切な分割証明を持つ振れに対する一様評価を与える。

Propositions 9.6–9.7 · p. 78

2. 奇数側では補助判別式を選ぶ順序が重要になる

固定 h_* は Heegner 点検出器 P_h の定義に使う。変動する $k'(h)$ は、素因数数を一様に制限して P_h の可除性の下界を証明するためだけに使う。その後、別の k を一度固定し、 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{k})$ 上で最終補間を行う。 h_* 、 $k'(h)$ 、 k を同じ役割の「補助捩れ」とまとめると、奇数係数の正規化に必要な評価を循環的に使うことになる。詳細は Proposition 9.10 の節と Proposition 9.14 の節で説明する。

Proposition 9.10 · pp. 80–81

3. rank の一致と全 Shafarevich–Tate 群の有限性

二つの場合の補間がまず $a(E) = s_2(E) \in \{0, 1\}$ を与える。ここで既知の Gross–Zagier–Kolyvagin の順方向を適用し、 $r(E) = a(E)$ と全 $\text{Sha}(E/\mathbb{Q})$ の有限性を得る。Skinner の序論に記された順方向は、この適用に追加の還元仮定を課さない。同論文の逆方向の定理に付く半安定性等の条件を、ここへ持ち込まない。

[Sk20, §1, Gross–Zagier–Kolyvagin implication, 誌面 p. 330 / PDF p. 2]

Proof of Theorem 1.1; Remark 9.15 · pp. 87–88

3. Theorem 3.2 — 円分補間による中心値の回収

証明対象：Theorem 3.2 · p. 7

Theorem 3.2 — 欠けた頂点への移送

E と $2N$ での局所平方類・実符号を固定する。 h は異なる良い奇素数の q^* の積とし、

$$t_q = \dim_{\mathbb{F}_2} E[2]^{\text{Fr}_q}, \quad w(h) = \frac{1}{2} \sum_{q|h} t_q, \quad L^*(h) = \frac{\sqrt{|h|} L(E^{(h)}, 1)}{\Omega_E^{\text{sgn}(h)}}.$$

$s(h) = \text{length}_{\mathbb{Z}_2} \text{Sha}(E^{(h)}/\mathbb{Q})[2^\infty]$ は有限な場合の長さであり、 s_2 と区別する。 $v(2) = 1$ とし、非消滅時に $D(h) = v(L^*(h)) - 2w(h) - s(h)$ と置く。許された h_0 が $s_2(E^{(h_0)}) = 0$ を満たすとする。任意に大きい b に対し、相異なる $q \nmid 2Nh_0$ と線形形式 λ_q による上記の族が存在し、全頂点が固定局所類・符号を保ち、族によらない B に対して

$$L(E^{(h_x)}, 1) \neq 0, \quad D(h_x) \leq B \quad (x \neq 0)$$

ならば $L(E^{(h_0)}, 1) \neq 0$ かつ $D(h_0) \leq B + C_E$ 。 C_E は h_0 、素数集合、 b に依存しない。必要な次元の閾値は試す精度に依存してよい。

Theorem 3.2 · p. 7

1 固定格子の Kato 類と有理 divisibility

$u_x \in \Lambda[1/2], \quad 2^{C_{\text{int}}}u \in \mathcal{O}[G]$
CM 成分は有理主予想を入力する

指標別の有理性と一様整性を合わせる
Lemmas 3.3–3.4 · pp. 7–8

2 群基底で整性を回収

$\mathcal{O} \cap \Lambda[1/2] = \Lambda \implies 2^{C_{\text{int}}}u \in \Lambda[G]$

整係数の定数項へ二進合同を適用
§3.6 · p. 16

3 基点と同じ有限桁を持つ非零頂点

$b > 2^M - 1 \implies v(u_x(0) - u_0(0)) \geq M - C_{\text{int}}$
 $x \neq 0, \quad v(u_x(0)) \leq B + C_{\text{loc}}$

$M - C_{\text{int}} > B + C_{\text{loc}}$ を固定して矛盾を得る
Theorem 3.2 · p. 7

4 基点の非消滅と付値上界

$L(E^{(h_0)}, 1) \neq 0, \quad D(h_0) \leq B + C_E$

固定格子のKato類から整係数族を作り、二進合同で基点の中心値を回収する

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 有理divisibilityと一様な整性を別々に確保する

$\Lambda = \mathbb{Z}_2[[t]]$ 、 $\mathcal{O} = \widehat{\Lambda_{(2)}}$ 、 $G = (\mathbb{Z}/2)^b$ とする。原稿は正の大域複体のdeterminant内で、実場所の類とKato類の外積を u と書く。固定した重さ2の固有形式の格子へtraceを戻すことで、補助素数の個数によらない $2^{C_{\text{int}}}u \in \mathcal{O}[G]$ を構成する。ここは変動する捩れ固有形式の整格子を一律に同一視する議論ではない。

KatoのTheorem 12.5(3)は2を反転した高さ1のdivisibilityに使い、CMの場合はBurungale–TianのTheorem 2.6を使う。固定悪素数での補正も含めて、各指標成分で $u_x \in \Lambda[1/2]$ を得る。Katoの、 $p \neq 2$ と像条件を要する強い整係数版12.5(4)は使わない。最後に $\mathcal{O} \cap \Lambda[1/2] = \Lambda$ というLemma 3.3を群基底の各係数へ適用し、 $|G|$ による損失を増やさず

$$2^{C_{\text{int}}}u \in \Lambda[G]$$

を得る。局所化完備環 $\mathcal{O}$ 全体に $t = 0$ の評価を定義するのではなく、中心評価は $\Lambda[1/2]$ 上で先に行う。

[Kat04, §§8.9–8.12, 誌面 pp. 185–186 / PDF pp. 70–71]

[Kat04, Theorem 12.5(3)–(4), 誌面 p. 222 / PDF p. 107]

[BT25, Theorem 2.6; Remark 2.7, p. 5]

§§3.3–3.5; Proposition 3.7 · pp. 10–15

2. 任意に大きい立方体は、基点と同じ有限桁を持つ別頂点を含む

corank 0の成分ではProposition 3.7が $u_x(0)$ と $L^*(h_x)$ の同時消滅および $|v(u_x(0)) - D(h_x)| \leq C_{\text{loc}}$ を与える。 $x \neq 0$ は既知の解析的rank 0からcorank 0となり、基点は仮定による。 $M - C_{\text{int}} > B + C_{\text{loc}}$ を固定し、Lemma 3.4を $2^{C_{\text{int}}}u$ の定数項へ適用する。 $b > 2^M - 1$ なら、ある $x \neq 0$ で

$$v(u_x(0) - u_0(0)) \geq M - C_{\text{int}}.$$

$u_0(0) = 0$ 、またはその付値が上界を超えるなら、 $v(u_x(0)) \leq B + C_{\text{loc}}$ と矛盾する。従って基点も非消滅となる。一様性を担うのは $C_{\text{int}}, C_{\text{loc}}, B$ であり、素数の大きさや族の実現に要る精度ではない。

Lemmas 3.3–3.4 · pp. 7–8

§3.6 · p. 16

3. すべての非零頂点で上界を作る

Proposition 7.1の中心値と重さ $3/2$ の係数の平方比較、Theorem 3.1の下界から、最小正規化深さを固定できる。単位検査は $L^*(h) \neq 0$ と $v(L^*(h)) \leq 2w(h) + C$ を与える。Propositions 7.9、Theorem 8.3の有限ネットワークは、辺の二次剰余記号の差分を素数ラベルの縮約に変換し、各非零アドレスの検査を1にする。 $s(h_x) \geq 0$ を引けば必要な $D(h_x)$ の上界となる。これは特定の曲線を密度0の例外へ除外する議論ではない。

Proposition 7.1 · pp. 53–54; Lemma 7.5 · pp. 60–61

Theorem 8.3 · pp. 68–69

4. Proposition 9.10 — 奇数検出器を正規化する一様下界

証明対象 : Proposition 9.10 · pp. 80–81

Proposition 9.10 — Heegner点の2可除性

Lemma 9.8の準備済み正の奇数符号filterを固定する。これは係数系・類群の有限supportを含み、 $L(E^{(h_*)}, 1) \neq 0$ を満たす負のgenus partner h_* を固定してその素因数を除外したものである。 P_h は $\mathbb{Q}(\sqrt{hh_*})$ 上の導手1のgenus-character Heegner和、 $j(P_h)$ は対応する自由rank 1格子での2進指数とする。 h およびその素因数数によらない定数 C が存在し、このfilterの解析的rank 1のすべての h に対して

$$2j(P_h) \geq 2w(h) + s(h) - C.$$

特に $j(P_h) \geq w(h) - C'$ が一様に成立する。

Proposition 9.10 · pp. 80–81

1 既知の単純零点に有界個数の companion

$$a(E^{(h)}) = 1, \quad \omega(k'(h)) \leq A, \quad L(E^{(hk')}, 1) \neq 0$$

$$v(L^*(hk')) \leq 2w(hk') + s(hk') + C$$

k' は $2Nh$ で平方、素因数数は一様
Corollary 4.1 · p. 17

2 ring-class 和の指数を下から評価

$$2J_h(k') \geq 4w(h) + s(h) + s(hk') - C$$

二つの高さ公式で導関数と regulator を消去
Lemma 9.9 · p. 80

[CST14, Theorem 1.1 and Heegner hypotheses, 誌面 pp. 2524–2525 / PDF pp. 3–4]

3 固定 genus partner の検出器へ比較

$$2J_h(k') - 2j(P_h) = v(L^*(hk')) + O(1)$$

偶数評価を代入し、 $s(hk')$ を消す
Proposition 9.10 · pp. 80–81
Proposition 7.4; Lemma 7.5 · pp. 59–61

4 下界を証明してから奇数最小深さを固定

$$2j(P_h) \geq 2w(h) + s(h) - C', \quad w(k') \leq A$$

単位検査: $a(E^{(h)}) = 1, j(P_h) \leq w(h) + C$

有界個数の素因数を持つ変動companionから二つの指数を比較し、奇数検出器の下界を得る

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 変動するcompanionで、既に非消滅な中心値を用意する

Lemma 9.8は、既に解析的rank 1と分かっている各 h に対して、負の奇基本判別式 $k' = k'(h)$ を選ぶ。 $(k', 2Nh) = 1$ 、 k' は $2Nh$ の各場所で平方、 $\mathbb{Q}(\sqrt{k'})$ は余分な単数を持つ体および E のCM体ではなく、 $\omega(k') \leq A$ とする。 Proposition 6.2のbounded-factor completionと有限のラベル準備がこの素因数数を制御する。非消滅を確保した hk' にProposition 9.6を使い、

$$v(L^*(hk')) \leq 2w(hk') + s(hk') + C$$

を得る。素数の実際の大きさは h に依存してよい。原稿はこの段階に奇数係数の最小深さを使っていない。

Lemma 9.8 · pp. 79–80; Proposition 6.2 · p. 48

2. 高さ比較で余分なSha項を消す

$J_h(k')$ を $\mathbb{Q}(\sqrt{k'})$ 上、導手 $|h|$ の ring-class 和の指数と書く。Corollary 4.1 と Lemma 9.9 は

$$2J_h(k') \geq 4w(h) + s(h) + s(hk') - C,$$

$$2J_h(k') - 2j(P_h) = v(L^*(hk')) + O(1)$$

を与える。後者はCai–Shu–TianのTheorem 1.1を二つの和へ適用して高さを比較するもの。レベル素数は分裂し、導手とレベルは互いに素であり、原典公式の $c\sqrt{|D|}$ が、導手 $|h|$ の場合と導手1の場合で正確に異なる。導関数と共通rank 1のregulatorを消去すると、残る可変因子は $L^*(hk')$ の正規化に入る。余分な単数の体を除くことで単数因子も固定される。

上の3式を合わせ、 $w(hk') = w(h) + w(k')$ と $w(k') \leq A$ を使えば

$$2j(P_h) \geq 2w(h) + s(h) - 2w(k') - C \geq 2w(h) + s(h) - C'.$$

この下界を得てからLemma 7.5を適用する。奇数検出器の単位は、解析的rank 1と $j(P_h) \leq w(h) + C$ を同時に検出する。

Corollary 4.1 · p. 17

Lemma 9.9 · p. 80

[CST14, Theorem 1.1 and Heegner hypotheses, 誌面 pp. 2524–2525 / PDF pp. 3–4]

Proposition 7.4; Lemma 7.5 · pp. 59–61

5. Proposition 9.14 — 固定した虚二次体からcorank 1の基点へ戻る

証明対象：Proposition 9.14 · pp. 85–87

Proposition 9.14 — 奇数側の元の曲線

$E/\mathbb{Q}$ は $E(\mathbb{Q})[2] \neq 0$ を満たし、 $s_2(E) = 1$ とする。このとき $a(E) = 1$ 。ここでのSelmer群も全場所のKummer局所条件を用い、基点のMordell–Weil rank 1やSha有限性は仮定しない。

Proposition 9.14 · pp. 85–87

1 最終 companion を一度固定

$$L(E^{(k)}, 1) \neq 0, \quad K = \mathbb{Q}(\sqrt{k}), \quad s_2(E/K) = 1$$

別々の非零多項式から共通の単位割当を作る
Theorem 8.3 · pp. 68–69

2 非零頂点で二つの検査を同時に 1 へ

$$a(E^{(h_x)}) = 1, \quad a(E^{(h_x k)}) = 0 \quad (x \neq 0)$$

新しい素数はすべて K で分裂、 $h_0 = 1$

奇数・偶数の単位上界を高さ比較に入力
Lemma 9.9 · p. 80
Proposition 9.14 · pp. 85–87

3 固定 K で指数の上界を得る

$$2J_{h_x}(k) - 4w(h_x) - s(h_x) - s(h_x k) \leq C$$

C は立方体次元・新素数集合によらない

full Selmer corank 1 と有界分母消去因子で移送
Theorem 4.2 · p. 17
Propositions 5.14–5.15; Lemmas 5.16–5.17; proof of Theorem 4.2 · pp. 45–47

4 欠けた基点の導関数を回収

$$\text{ord}_{s=1}(L(E, s)L(E^{(k)}, s)) = 1 \implies a(E) = 1$$

固定 K で奇数・偶数検査を同時に1にし、ring-class transferによって基点の単純零点を得る

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 最終companionを立方体次元より先に固定する

準備済み奇数検出器が基点を検出すれば終わる。それ以外では非空の最小seedを取り、独立した偶数検査により負の判別式 k を $L(E^{(k)}, 1) \neq 0$ となるように選ぶ。 k は $2N$ で平方で、既存supportや必要な振れ分岐を避け、例外的虚二次体を避ける。以後 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{k})$ を固定する。新しい h の素数はすべて K で分裂させる。順方向の定理から $s_2(E^{(k)}) = 0$ となるので、二次体上のcorank恒等式が

$$s_2(E/K) = s_2(E) + s_2(E^{(k)}) = 1$$

を与える。これはSelmer群の整係数直和分解を主張する式ではない。

Lemma 2.2 · p. 5

2. 別々の非零多項式を、同じ頂点で同時に単位にする

偶数検査は hk 、奇数検査は h を読む。各アドレスでそれぞれ非零多項式と分かるだけでは、同じ剰余記号の割当て両方が非零とはいえない。Theorem 8.3は新しいprimary素数ネットワークを加え、共通の有限グラフ上で両検査を同時に1へする。 $x = 0$ では新しい素数を活性化しない。

有理2振れが1本の二次残余体の場合、2-isogenyの両側の体を使ってgood simple素数とdonorを用意する。全2振れが有理な場合は別処理が必要で、Lemma 9.12は K -分裂素数に制限した偶数検査に非空witnessを確保し、Lemma 9.13は向きの総和を補正する。これらを省いて「一般的な素数選択」で済ませない。

b とネットワークを選んだ後に、その有限weight範囲の検査表と精度条件を満たす実際の奇数係数の段階を選ぶ。動く検出素数 ℓ と精度は変わってよいが、最小正規化深さ、固定 k 、付値上界は変えない。全次元に同じ一段階を使う必要はない。

Theorem 8.3 · pp. 68–69

Lemmas 9.12–9.13 · pp. 82–85

§§9.5–9.7 · pp. 81–87

3. 指数上界をring-class補間へ入力する

全非零頂点で $a(E^{(h)}) = 1$ 、 $a(E^{(hk)}) = 0$ を得る。二つの単位上界と固定 k での高さ比較から

$$2J_h(k) \leq 4w(h) + C,$$

従って有限で非負な $s(h), s(hk)$ を引いても $2J_h(k) - 4w(h) - s(h) - s(hk) \leq C$ 。これはTheorem 4.2の入力である。同定理は、固定された非例外的 K が $2N$ でsplit Heegner条件を満たし、基点のfull Selmer corankが1、任意に大きい立方体の全非零頂点で積の単純零点とこの一様上界があるとき、基点の積 $L(E, s)L(E^{(k)}, s)$ の単純零点を与える。

補間の機構は、full Kummer条件を保った複体と実際のGalois cochainへの写像から、 $f_x u_x = d_x$ という有界な分母消去因子付きの整係数族を作ることにある。Proposition 5.14は $f_0(0) \neq 0$ の付値と有限精度での負のLaurent次数を一様に制御する。Lemma 5.17で有限個の係数桁を基点に一致させると、基点の導関数が0なら $u_0(0) = 0$ となり、既知の非零頂点の付値上界に矛盾する。一般的なSelmer双対性やGross–Zagier公式だけで、この同時整係数族が得られるとは原稿も述べていない。

最後に $L(E^{(k)}, 1) \neq 0$ を用いて $a(E) = 1$ を得る。全Sha有限性への接続は主定理の最終段階である。

Theorem 4.2 · p. 17

Propositions 5.14–5.15; Lemmas 5.16–5.17; proof of Theorem 4.2 · pp. 45–47

6. 直接入力と、その使用範囲

供給元

Katoの固定格子のtrace、明示相互法則、有理divisibility

利用箇所

§§3.3–3.5

使用内容・適用条件

重さ2、 $r = r' = 1$ 。補助levelのtraceを固定固有形式へ戻す。有理版12.5(3)と整係数版12.5(4)を区別

今回の照合

§§8.9–8.12、Theorem 9.7、12.5(3)–(4)の記述と原稿の使用を照合。可変support全体の整性は本原稿の追加構成

供給元

Burungale–Tian

利用箇所

§3.4

使用内容・適用条件

CM新形式に対する、全素数での $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ 上の主予想。 $p = 2$ を含む

今回の照合

Theorem 2.6、Remark 2.7を照合。整係数版はここから引用しない

供給元

Cai–Shu–Tian

利用箇所

Lemma 9.9、Theorem 4.2の証明

使用内容・適用条件

primitive ring-class character、 $(c, N) = 1$ 、レベル素数の分裂、 $\pi(\infty) = 0$ 。指数比較と基点導関数の消滅判定

今回の照合

Theorem 1.1の公式・前提を照合。全局所比較の独立検証は未実施

供給元

Gross–Zagier–Kolyvagin (Skinner §1の統合記述)

利用箇所

Lemma 2.1、主定理の最後

使用内容・適用条件

解析的rank 0または1からrank一致と全Sha有限性

今回の照合

順方向の主張と用途を照合。証明の再帰的検証は未実施

[Kat04, Theorem 9.7, 誌面 p. 189 / PDF p. 74]

[BT25, Theorem 2.6; Remark 2.7, p. 5]

[CST14, Theorem 1.1 and Heegner hypotheses, 誌面 pp. 2524–2525 / PDF pp. 3–4]

[Sk20, §1, Gross–Zagier–Kolyvagin implication, 誌面 p. 330 / PDF p. 2]

本原稿は、より広い Goldfeld’s analytic density conjecture and the 2-converse for elliptic curves を背景として挙げるが、そのconverseは本証明の入力ではないと明記する。カタログ004の別論文からの直接依存は、今回読んだ主要経路・参考文献では確認していない。この記録を、すべての潜在的関係の調査済みという意味には用いない。

7. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1 · p. 2 — 仮定はfull Selmer corankであり、結論は全Sha有限性まで含む
- §§3.3–3.5; Proposition 3.7 · pp. 10–15 — 有理divisibilityと一様整性の二つの経路を区別する
- §3.6 · p. 16 — 有限桁の合同が基点の非消滅を強制する箇所
- Propositions 5.14–5.15; Lemmas 5.16–5.17; proof of Theorem 4.2 · pp. 45–47 — 同時算術構成と有界分母消去がtransferへ入る箇所
- Lemma 9.8 · pp. 79–80; Proposition 6.2 · p. 48 — 素因数数は一様、素数の大きさは可変という量化を確認する
- Lemma 9.9 · p. 80 — 導手 l と導手 $|h|$ の高さ比を確認する
- §§9.5–9.7 · pp. 81–87 — oddの正規化後に固定 K を選び、同時検査から戻す
- Proof of Theorem 1.1; Remark 9.15 · pp. 87–88 — 二つの解析的rankの場合からrank一致と全有限性へ進む

October 7, 2026版の主要結果、§§2-3の補間経路、§§4-5の入出力と最終transfer、§7の係数正規化条件、§8のaddress lemmaの記述とforest構成、§9の組立てを読んだ。付値の定義、3種類のcompanion、fixed/variableの順序、CMと全有理2捩れの扱い、最終的な有限性の範囲を照合した。

未確認として、§§4-5の全cochain極限・同時評価写像・determinant switchの独立構成、§6の一樣moment誤差とsieveの全評価、§7の全theta重み・局所trace恒等式、§8の全ネットワーク係数計算を残す。Ferrero–Washingtonによる残余円分cohomology、Monskyのparity、Nekovářの双対性、Waldspurger等の係数入力原稿内の引用・用途を確認した範囲であり、今回は各外部原典の該当箇所まで再照合していない。従って本稿は、これらの接続を含む全証明の正しさを認定するものではない。