岡多様体論の現状と未来.

- §7.11 Towards Quantitative Oka Theory.
  $\notin$ 2nd edn (2017).

2nd edn 1.2.5.6.7 section

- Recent developments on Oka manifolds (Indag Math) 2023.
- ICM 2026 の予稿. arXiv: 2509.21197.
  Ell_1 に "relative ellipticity" と名が付いた.

§ 岡多様体とは何か?

岡の原理 (1939): 複素解析における h-principle

$\rightsquigarrow$ Gromov (1989): 楕円性から重要な仕事をした.

Lárusson ('04): モデル圏の観点から岡の原理を研究

Def cpx mfd X が 弱岡

$\overset{\text{def}}{\iff} \forall Z$: Stein mfd, $\mathcal{O}(Z,X) \hookrightarrow C^0(Z,X)$ 弱ホモトピー同値

つまり $\forall k \geq 0$, $\pi_k(-) \xrightarrow{\sim} \pi_k(-)$. w.r.t cpt-op. top

$\rightsquigarrow$ 特に, $\forall f_0 \in C^0(Z,X)$ は $f \in \mathcal{O}(Z,X)$ に homotopic.

(Z, X: 1-dim のときに, これがいつ成り立つかは完全に分類 Winkelmann '93).

例. ・X が正則写像 $\mathbb{C} \to X$ を通って可縮 $\Longrightarrow$ X: 弱岡
(e.g. $X = \mathbb{D}, \mathbb{C}$).

・岡 '39 : $\mathbb{C}^*$: 弱岡

○ $\mathbb{D}^*$：弱岡でない.

∵) $f_0 : \mathbb{C}^* \to \mathbb{D}^*$: conti で $\pi_1(-) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\sim)$ となるものを取る

これが正則写像に homotopic とすると nonconst.

Liouville に矛盾 □

__岩井__ 弱岡 $\Longrightarrow$ "h-principle" w/ $k=0$

cpt Kähler proj. に対して. 岡 $\Longrightarrow$ 弱岡 $\xRightarrow{\text{C-W}}$ 特殊型.

__Q.__ $\overset{?}{\Longleftarrow}$ $\overset{?}{\Longleftarrow}$

次の岡多様体を定義する性質は.

POPAI (Parametric Oka Property with Approximation & Interpolation) とよばれる.

__Def__ cpx mfd X が岡

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall Z$: Stein mfd. $\forall Z_0 \subset Z$: closed cpx subvari

$\forall K \subset Z$: cpt hol cvx $\forall P_0 \subset P$: cpt Haus ~~spaces~~

$\forall f_0 : Z \times P \to X$: conti.

s.t. ○ $\forall p \in P$, f_0 : hol on K & on Z_0.

○ $\forall p_0 \in P_0$. $f_0(-, p)$: hol on Z.

$\exists f_t : Z \times P \longrightarrow X$: homotopy $(t \in [0,1])$.

s.t. ○ $\forall p \in P$. $f_1(\cdot, p) \in \mathcal{O}(Z, X)$. 一様に近い.

○ $\forall p \in P$, $\forall t \in [0,1]$. $f_t(\cdot, p) \approx f_0(\cdot, p)$ on K

○ $\forall t \in [0,1]$. $f_t = f_0$ on $(Z \times P_0) \cup (Z_0 \times P_0)$

ex) 一番重要：$P_0 = \phi \subset \{*\} = P$, $\underset{\sim}{P}$: OPAI が B (Basic) となる.

◦ $Z_0 = \phi$ のとき，I がなくなり (POPA)

$K = \phi$ のとき A がなくなる (POPI)

(BOPI, BOPA, POP, $\underline{\text{BOP}}$, … などがある)

h-principle w/ $k=0$, surj.

Gromov ('89)：簡単な Runge 型近似定理で特徴付けられるか？

$\underline{\text{Forstnerič の岡の原理}}$ ('06, '09). X：岡 (POPAI)

$\Longleftrightarrow$ X が CAP (Convex Approximation Property) をみたす.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall K \subset \mathbb{C}^n$: cpt cvx, $\mathcal{O}(\mathbb{C}, X)|_K \subset \mathcal{O}(K, X)$ dence.

$\underline{\text{Cor}}$ POPAI, POPA, … BOPAI, BOPI, …, CAP は全て同値.

(ただし，BOP, POP は除く).

◦ 岡 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{O}(X, X) \xrightarrow{\text{弱 homotopic}} \{f \in C^0(Z, X) \mid f|_{Z_0} : \text{hol}\}$

◦ $\mathbb{C}$ の POPAI = Oka-Cartan ext + Oka-Weil approx の parametric var

◦ $\underline{\text{宮崎}}$：$\mathbb{C}$ の POPAI の有理型版.

POPAI は もう2段階，見た目を強くできる.

$\underline{1}$. Z : reduced Stein sp を取っても同値.

⚠ X に singularity をゆるすと $\underline{\text{POPAI}}$ は $\underline{\text{CAP}}$ と同値ではない

$\xrightarrow{\text{ex}}$ $P = \{*\} \supset \phi = P_0$, $Z_0 = \phi$.

$\underline{\text{内容}}$ Oka space を目指した話

理論の作り，Lárusson のモデル理論を…

2. $Z_0 (\subset Z)$: reduced とは限らない closed analytic subsp をとっても同値.

ただし. f_0 は Z_0 の nbd で hol と仮定しておく.

これは. POPAJI と呼ばれる (Gromov は Ell_∞ と呼んでいた)

Jet

POPAI の状況で f_0 を Z_0 の nbd で hol とできることは非自明.

大岩 Siu の近傍定理 と Docquier-Grauert の tube nbd Thm

を用いると可能.

→ q-complete でも成立

Q. q-complete 上の岡の原理?

$H^q(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\sim} H^q(X, \mathcal{C}^*)$ を層係数論の

↑ conti

枠組で理解できるか?

§ Gromov の楕円性 ⇒ 岡

Def $f: X \to Y$: cpx mfds.

(1)
$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "s"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$
: f 上の(正則)スプレー

⇕ def.

- $E \xrightarrow{p} X$: hol vect bdl.
- 次が可換.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dr, "s"] & \\ X \arrow[ur, "0_E"] \arrow[rr, "f"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "\circlearrowright"] & & Y \end{tikzcd}$$

$f = \mathrm{id}_X$ のときに

X 上のスプレーという.

(2) $\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "s"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$: 支配的 $\Longleftrightarrow$ $(p,s): E \to X\times Y$ が E の zero section の nbd で submersion

$\Longleftrightarrow$ $\forall x \in X,\ s|_{E_x}: E_x \to Y$: submersion at 0_x.

Def X : cpx mfd (elliptic)

(1) X : (Gromov) 楕円的 $\Longleftrightarrow$ $\exists$ 支配的スプレー$/X$.

(2) X : 相対楕円的 $\Longleftrightarrow$ $\forall Z$: Stein mfd, $\forall f \in \mathcal{O}(Z, X)$
(Gromov : Ell_1) $\exists$ 支配的スプレー$/f$.

(3) X : 凸相対楕円的 $\Longleftrightarrow$ $\forall K \subset \mathbb{C}^n\ (\forall n \in \mathbb{N})$: cpt cvx
(Convex Relative Ellipticity) $\forall f \in \mathcal{O}(K, X)$, $\exists$ 支配的スプレー$/f$.

CAP.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : $\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r, "s"] \arrow[d, "p"] & X \\ Z \arrow[r, "f"] & X & \end{tikzcd}$ f上の〜

id_X 上の支配的.

Gromovの岡の原理 ('89) $\begin{tikzcd} \text{Gromov楕円的} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{岡} \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[l, Rightarrow, bend right, "\text{Gromov予想}"'] \\ \text{凸楕円的} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{CAP} \end{tikzcd}$

Gromov問題 $\cancel{\Longleftarrow}$?

例 G : cpx Lie grp $\curvearrowright X$: hol transitive $\Longrightarrow$ X : 楕円的.

$\because)$ $s : X \times \mathfrak{g} \to X$, $s(x, v) = \exp(v)\cdot x$.

スプレーは exp map の一般化という見方.

Prop (Forstnerič). 自明束からスプレーで elliptic な $\sim$ homogeneous

$\mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^2$: not homogeneous & elliptic

Thm (Gromov予想, K'21) 凸相対的 elliptic $\Longleftrightarrow$ 岡

特に、 rel ell も同値

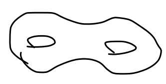
$\uparrow$

Oka

Cor (局所化定理) $\longrightarrow$ Zariski loc Oka $\Longrightarrow$ Oka

Q dense Zariski open Oka を含むなら Oka か？

(内本: $\forall$ sm toric var is Oka)



$\downarrow$

$\mathbb{P}^1$

上から下へ Oka ← ?

下から上へ Oka ← ∃反例

Oka × Oka = Oka

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow \text{hol fib bdl w/} \\ & & B \end{array}$$

E: Oka $\Longleftrightarrow$ B: Oka

$Bl_D \mathbb{C}^2$: non-Oka

($\exists D \subset \mathbb{C}^2$: discreate)

$\mathbb{P}^n \supset H$: degree $\gg 0$ general $\xRightarrow{\text{生駒}}$ $\mathbb{P}^n \setminus H$: Kobayashi hyp.

Thm (K. 26?) Gromov 楕円性に関しては一般に局所化定理が不成立.

Q. 弱岡 $\Longleftrightarrow$ ∃? 楕円性

Q. (小森大地) Gromov 楕円性 $\Longleftrightarrow$ ∃? 逆数論的条件

(解析接続?)

鈴木 Gromov の岡の原理 $\leadsto$ Forster予想の部分的解決

Stein $X^n \longrightarrow \mathbb{C}^{N}$

最良次元

§ 三大問題の候補とその周辺.

・ 双対Levi問題　閉領域 $\Omega \subset X^{\text{cpx mfd}}$ を $\partial\Omega$ で特徴付けよ.

・ Forstnerič-Ritter　$\Omega \subset X$, $\partial\Omega \in C^2$.

Ω : Oka $\Longrightarrow$ $\nexists$ 強ギ凸 bdary pt $\in \partial\Omega$.

Thm (K'24) $\forall n \geq 2$, $\forall K \subset \mathbb{C}^n$: cpt hol cvx, $\mathbb{C}^n \setminus K$: Oka.

これは Varolin の density property を用いず

生駒

Stein mfd 内の complement に一般化できる.

$\overset{\text{Cor}}{\leadsto}$ $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\mathbb{B}^n}$ $(n \geq 3)$: non-ell Oka

Thm (K'26?) $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\mathbb{D}^n}$ $(n \geq 2)$: non-ell Oka.

Forstnerič-Lárusson '26? Every proj Oka mfd is ell.

Q cpt Kähler Oka $\Longrightarrow$ ell ?

ex) ホップの blow-up
$\Downarrow$
cpt non-ell Oka
(non Kähler).

・ 有理型写像の問題

宮崎, 杉山 psh の近似

Q psh の閉の原理

・ 増大度条件の問題.

$X \subset \mathbb{C}^n$, $Z \to X$: L^2-hol.

Q. Oh-T ext Thm for Oka mfd.