Heisenberg解析への誘い

竹内有哉(筑波大)

(参考文献)

- Folland-Stein 1974, Estimates for the $\bar{\partial}_b$-complex and analysis on the Heisenberg group
- Fischer-Ruzhansky 2016, Quantization on nilpotent Lie groups
- Ponge 2008, Heisenberg calculus and spectral theory of hypoelliptic operators on Heisenberg manifolds

(宣伝)

- CR多様体の埋め込み可能性
- CR多様体に関する個人的諸問題

§0 Introduction

代表的な linear PDO

(Riemannian / conformal geometry)

Δ, $L = \Delta + \frac{n-1}{4(n-2)} R$

Paneitz op, GJMS op

elliptic

(CR geometry)

Δ_b, $\Box_b$, $L = \Delta_b + \frac{n}{2(n+1)} R$,

CR Paneitz op, CR GJMS op

not elliptic

$\rightsquigarrow$ 解決策: Heisenberg calculus

(theory of $H\Psi DO$)

§1 Analysis on the Heisenberg group

Heisenberg group : $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \ni (z, t)$

group str : $(z,t)\cdot(z',t')$

$$= (z+z',\ t+t'+2\,\mathrm{Im}(z\cdot\overline{z'}))$$

dilation : $\delta_r(z,t) = (rz, r^2t) \quad (r>0)$

: group hom

$$\theta := dt + i\sum_{j=1}^{n}(z_j\, d\overline{z}_j - \overline{z}_j\, dz_j)$$

: left-inv contact form

$T = \frac{\partial}{\partial t}$: Reeb v.f. (bi-inv)

$Z_j := \frac{\partial}{\partial z_j} + i\overline{z}_j\frac{\partial}{\partial t}$: left-inv v.f.

$T^{1,0}\mathbb{H}^n := \mathrm{Span}\{Z_1, \cdots, Z_n\}$

: strictly pseudoconvex CR str on $\mathbb{H}^n$

$$\mathcal{L}_\alpha := -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(Z_j\overline{Z_j}+\overline{Z_j}Z_j)+i\alpha T$$

: Folland-Stein op $(\alpha\in\mathbb{R})$

この op に関する可解性は

基本解 $(\mathcal{L}_\alpha\Phi_\alpha=\delta)$ と結びついている.

$\rho(z,t):=|z|^2-it$: CR hol, hom of deg 2

$$\varphi_\alpha=\rho^{-\frac{1}{2}(n+\alpha)}\,\overline{\rho}^{-\frac{1}{2}(n+\alpha)}$$

$\in L^1_{loc}\cap C^\infty(\mathbb{H}^n\setminus\{(0,0)\})$

: hom of deg $-2n$

このとき $\mathcal{L}_\alpha\varphi_\alpha=c_\alpha\delta$, ただし

$$c_\alpha=\frac{2^{2-n}\pi^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}=\text{“}\int_{\mathbb{H}^n}\mathcal{L}_\alpha\varphi_\alpha\,d\mu\text{”}$$

(ρ を $\rho+\varepsilon^2$ としたものを $\varphi_{\alpha,\varepsilon}$ とすると,
$\mathcal{L}_\alpha\varphi_{\alpha,\varepsilon}\to\mathcal{L}_\alpha\varphi_\alpha$, $\operatorname{supp}\mathcal{L}_\alpha\varphi_\alpha=\{(0,0)\}$,
$c_\alpha=\int_{\mathbb{H}^n}\mathcal{L}_\alpha\varphi_{\alpha,\varepsilon}\,d\mu$: indep of ε.)

特に $c_\alpha=0$ となるのは $\alpha\in\pm(n+2\mathbb{Z}_{\geq 0})$.

$\alpha \notin \pm(n+2\mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき、

$\Phi_\alpha := c_\alpha^{-1} \varphi_\alpha$ は $\mathcal{L}_\alpha \Phi_\alpha = \delta_0$ をみたす。

これを用いると、$f \in C_c^\infty$ に対して

$\mathcal{L}_\alpha (f * \Phi_\alpha) = f * \delta_0 = f$ が分かる。

<u>Thm</u> (FS, Proposition 7.5)

$\mathcal{L}_\alpha$: hypoelliptic $\iff \alpha \notin \pm(n+2\mathbb{Z}_{\geq 0})$

$\because$ $\alpha \in \pm(n+2\mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき、

$\varphi_\alpha \notin C^\infty$ だが $\mathcal{L}_\alpha \varphi_\alpha = 0$ である。

$\alpha \notin \pm(n+2\mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき、

$\Phi_\alpha \in C^\infty(\mathbb{H}^n \setminus \{(0,0)\})$ であることから

$\mathcal{L}_\alpha$: hypoelliptic がしたがう。 $\square$

(c.f. Folland, Intro to PDE, Thm 1.58)

§2 Relation to representation theory

$\lambda \in \mathbb{R}^\times$ に対して, Schrödinger 表現

$\pi_\lambda : \mathbb{H}^n \longrightarrow U(L^2(\mathbb{R}^n))$ が

$(\pi_\lambda(x+iy, t)u)(\xi)$

$= e^{i\lambda(t+2x\cdot y+2y\cdot\xi)} u(\xi+2y)$

で定まる. このとき

$$d\pi_\lambda(\mathcal{L}_\alpha) = \underline{\Delta + \lambda^2|\xi|^2} - \alpha\lambda$$

Hamiltonian of QHO

$$\operatorname{Spec} d\pi_\lambda(\mathcal{L}_\alpha) = \{\, |\lambda|(n+2k) - \alpha\lambda \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}$$

特に

$\alpha \notin \pm(n+2\mathbb{Z}_{\geq 0})$

$\Longleftrightarrow {}^\forall \lambda \in \mathbb{R}^\times, {}^\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n),$

$d\pi_\lambda(\mathcal{L}_\alpha)u = 0 \Rightarrow u = 0$

(Rockland condition)

(Group Fourier transform)

$f \in \mathcal{S}$ に対して,

$$\hat{f}(\lambda) := \int_{\mathbb{H}^n} f(z,t)\, \pi_\lambda(z,t)^* \, d\mu$$

$$\in B_2(L^2(\mathbb{R}^n)) \leftarrow \text{sp of HS op's}$$

このとき

- $\widehat{f_1 * f_2}(\lambda) = \hat{f_2}(\lambda)\hat{f_1}(\lambda)$
- $\widehat{\mathcal{L}_\alpha f}(\lambda) = d\pi_\lambda(\mathcal{L}_\alpha)\hat{f}(\lambda)$
- $f(z,t) = \dfrac{2^{n-1}}{\pi^{n+1}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^\times} \mathrm{tr}(\pi_\lambda(z,t)\hat{f}(\lambda)) |\lambda|^n d\lambda$

(inversion formula)

これを踏まえて, 基本解 Φ_α は

$$\Phi_\alpha(z,t)$$

$$= \frac{2^{n-1}}{\pi^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^\times} \mathrm{tr}(\pi_\lambda(z,t)\, d\pi_\lambda(\mathcal{L}_\alpha)^{-1}) |\lambda|^n d\lambda$$

であることが分かる.

§3 Introduction to Heisenberg calculus

P: linear PDO on $(M^{2n+1}, T^{1,0}M)$

$^\forall a \in M$, $^\exists P_a$: hom left-inv linear PDO
"principal part of P at a"

$\rightsquigarrow d\pi_\lambda(P_a)$: "principal symbol"

<u>Thm</u> (P, Theorem 3.3.18)

$^\exists Q$: HΨDO s.t. $PQ \sim QP \sim I$

$\Longleftrightarrow$ $^\forall a \in M$, P_aとP_a^*はRockland条件をみたす

$\Longleftrightarrow$ $^\forall a \in M$, $^\forall \lambda \in \mathbb{R}^\times$, $^\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$d\pi_\lambda(P_a^*)u = 0 \Rightarrow u = 0$$

(Application)

$\alpha \notin \pm(n + 2\mathbb{Z}_{\geq 0})$のとき、$\Delta_b + i\alpha T$の

スペクトルの挙動はellipticのときと同じ.

($\because$ principal partは$\mathcal{L}_\alpha$である.)