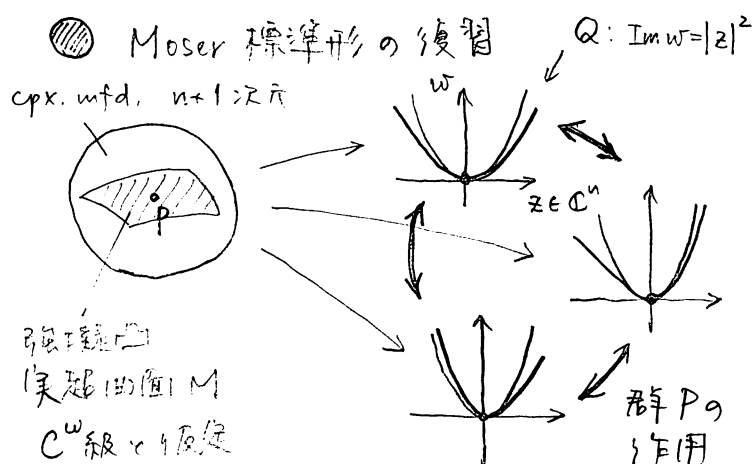


CR構造と正規 Cartan 接続

Chern-Moser (1974, Acta Math.) の解説

T=T^{2,1}:

- ① 田中昇 (1979, Hokkaido Math. J.)
による「放物型幾何の一般論」を
尊重する形に書きかえる
- ② Cartan 束 P と Moser 標準形の
関係を明示する

定理 (CM) 点 p のまわりの正則座標系 (z, w) , $w = u + iv$ があり M は

$$v = |z|^2 + F(z, \bar{z}, u), \quad F = \sum_{k, l \geq 2} F_{kl}$$

 z について (k, l) 次

$$\Delta_z F_{22} = 0, \quad \Delta_z^2 F_{32} = 0, \quad \Delta_z^3 F_{33} = 0.$$

Moser 座標系の全群は P の作用がある

単純推移的

● 関係する群 G と $P = G_0 \ltimes P_+$

$$SU(n+1, 1) = \left\{ g \in GL(n+2, \mathbb{C}) \mid g^* I_{n+1,1} g = I_{n+1,1} \right\}$$

$$I_{n+1,1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & I_n \end{pmatrix}$$

を採用 $\frac{1}{n+2}$ 乗

$$G := PSU(n+1, 1) = SU(n+1, 1) / \mathbb{Z}_{n+2}$$

幾何学的意味 G は $\mathbb{CP}^{n+2, 1}$ 上の

$$N = \left\{ \zeta^0 \bar{\zeta}^{n+1} + \bar{\zeta}^0 \zeta^{n+1} + \sum_{\alpha=1}^n |\zeta^\alpha|^2 = 0 \right\}$$

の射影的 PN を保つ. $\zeta^0 \neq 0$ と置

$$z^\alpha = \frac{\zeta^\alpha}{\zeta^0}, \quad w = \frac{-2i\zeta^{n+1}}{\zeta^0} \quad \text{として } v = |z|^2.$$

 $\therefore PN$ は Q の一点コンパクト化 $\hat{Q}$ G は $\hat{Q}$ 上推移的. $\hat{Q} \cong G/P$ (原点の固定部分群)

$$P = G_0 \ltimes P_+ \quad T=T^2,1$$

$$G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & U & \\ & & \bar{\lambda}^{-1} \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{C}^*, U \in U(n), \lambda \bar{\lambda}^{-1} \det U = 1 \right\}$$

$$P_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t & -\frac{1}{2}|t|^2 + is \\ & I_n & -t^* \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid t \in (\mathbb{C}^n)^*, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G_0 \cong \mathbb{R}_+ \times U(n) (= CU(n) \text{ 共形ユークリッド群})$$

● Cartan 接続とは何ぞ

一般に「等質空間を(無限小)局所モデルと
する幾何学的空間」の概念を与える枠組み.T=T^{2,1}: 局所近似の無限小変化をモデル空間における z と対応づける

方法も与える.

定義 G : Lie 群, H : 閉部分群 M は多様体 $\dim M = \dim G/H$ $P \rightarrow M$ 主 H 束. π のとき $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ の Cartan 接続(i) $\forall u \in P$ ω_u は線型同型

$$(ii) R_h^* \omega = \text{Ad}(h^{-1}) \omega \quad (iii) \omega(\zeta_X) = X$$

($\forall h \in H$) ($\forall X \in \mathfrak{g}_H$)

強擬凸実超曲面 Σ であり $\Gamma=1$ なる:

$\hat{Q} = G/p$ をモデルとする (P, ω) を canonical につくり次を実現する.

- $(P, \omega) \cong (P', \omega')$ は底空間の同型 $M \cong M'$ による descend する
- 逆に底空間の同型は $(P, \omega) \cong (P', \omega')$ による lift する

これを"できる"と何かにいえるか

- ① Spherical は ($\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 各点の近傍で Q と同型な) M の特異点について.
曲率 $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \in \Omega^2(P; \omega)$ が"ゼロ".
- ② Killing ベクトル場の空間の次元 $\leq \dim G$.
- ③ Distinguished curves の概念.

- ④ Canonical は接続をもつベクトル束を系統的にうつす (tractor bundles): G の表現 (特に $(\mathfrak{g}, H)$ 表現) W に対して $W := P \times_H W$.

$\Gamma=1$ ならば $W = \mathfrak{g}$ adjoint representation

- ⑤ G が半単純, H が双曲型部分群 P による (curved) BGG 作用素 (線型微分作用素の系列)

Chern による P の構成 Step 1

Recall 各点 $p \in M$ で $H_p \subset T_p M$
 $\nwarrow$ $2n$ 次元

$$\mathbb{C}H_p = \underbrace{T_p^{1,0}M}_{\text{Hermite 内積の共形類を定める}} \oplus T_p^{0,1}M$$

記号 $E = \bigsqcup_{p \in M} E_p$ $E_p = \{ \text{"正の"} H_p^\perp \text{ の } \pi \}$
 $\subset T_p^* M$
主 $\mathbb{R}_+$ 束 the bundle of contact forms

自然なフレーム束

$$\mathcal{F}_P = \{ T_p^{1,0}M \text{ の 共形正規直交基底} \}$$

これは主 G_0 束. $\Gamma \subset G_0$ の作用は

$$g_0 = \left[\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda}^{-1} \end{pmatrix} \right] \quad (\text{対角})$$

$$(Z_1, \dots, Z_n) \cdot g_0 = \lambda^{-1} (Z_1, \dots, Z_n) \cup$$

双対的記述

$$\mathcal{F}_P = \{ (T_p^{1,0}M)^* \text{ の基底 } \{ \theta^\alpha \} \}$$

ある $\theta \in E_P$ について

$$d\theta \equiv i \sum_{\alpha=1}^n \theta^\alpha \wedge \overline{\theta^\alpha} \pmod{\theta}$$

$\Gamma \subset G_0$ の作用:

$$\begin{pmatrix} \theta^1 \\ \vdots \\ \theta^n \end{pmatrix} \cdot g_0 = \lambda U^* \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \vdots \\ \theta^n \end{pmatrix} \quad \{ \theta^\alpha \} \text{ を } (\theta, \{ \theta^\alpha \}) \text{ と同一視}$$

Step 2

主 G_0 束 $\mathcal{F}$ から主 $P = G_0 \ltimes P_+$ 束をつくり $\Gamma=1$

ひとまず主 P_+ 束 $P \rightarrow \mathcal{F}$ としてつくる

予備的観察 $\mathcal{F}$ には tautological

forms がある. 点 $(\theta, \{ \theta^\alpha \})$ での接ベクトルを射影して θ で evaluate できる $\tilde{\theta}$
 θ^α での " $\tilde{\theta}^\alpha$

点 $f = (\theta, \{ \theta^\alpha \}) \in \mathcal{F}$ で π をみたす $(\eta, \{ \eta^\alpha \}, \phi)$ をとる

• η は $\tilde{\theta}_f$ の別名 (任意性なし)

• $\eta^\alpha \in \mathbb{C}T_f^* \mathcal{F}$ は $\tilde{\theta}_f^\alpha$ の延長に因っており

$\pi: \mathcal{F} \rightarrow M$ に関する垂直ベクトルを

annihilate する. 任意性: $+it^\alpha \eta$ の形

• ϕ は

$$d\eta = i \sum_{\alpha=1}^n \eta^\alpha \wedge \overline{\eta^\alpha} + \eta \wedge \phi \quad \text{on } \mathbb{C}P^n.$$

適当な値の正定値: η のスカラー倍

$$\mathcal{P}_f := \{ \text{上記のよう} \eta (\eta, \{\eta^\alpha\}, \phi) \}$$

これは $\mathcal{F}$ 上の主 P_+ 束.

定理 $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow M$ は M 上の主 P 束.

[証明] $\mathcal{P}$ は右 P_+ 作用をもつ.

右 G_0 作用は次で定める:

$$(\eta, \{\eta^\alpha\}, \phi) \cdot g_0 = (\eta, \{\hat{\eta}^\alpha\}, \hat{\phi}) \quad \text{とすると}$$

$$R_{g_0}^* \begin{pmatrix} \hat{\eta}^1 \\ \vdots \\ \hat{\eta}^n \end{pmatrix} = \lambda U^* \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}, \quad R_{g_0}^* \hat{\phi} = \phi.$$

これらの作用が $G_0 \curvearrowright P_+$ adj. と整合的. $\square$

● 正規 Cartan 接続 ω の構成の概要

$$\eta = \begin{pmatrix} \alpha & Z & \bar{Z} \\ X & A & Z^* \\ iX & -X^* & \alpha \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} x, z \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{C}^n, Z \in (\mathbb{C}^n)^*, \\ \alpha \in \mathbb{C}, A \in \mathfrak{u}(n), \\ \alpha + \text{tr} A - \bar{\alpha} = 0 \end{array} \right.$$

grading: $\eta_{-2} \eta_{-1} \eta_0$

$\mathcal{P}$ 上の tautological forms $\tilde{\eta}, \tilde{\eta}^\alpha, \tilde{\phi}$ を

ω の η_{-2} 成分, η_{-1} 成分, η_0 のスカラー成分とすると,

残りの成分は?

ω の曲率 $d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]$ の

いくつかの成分に 線型 T2 条件を課す.

線型型代数学 で一意的存在がわかる.

田中 (1979) の formulation: 「曲率関数」

$\kappa: \mathcal{P} \rightarrow \wedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathfrak{g}$ が $\ker \partial^*$ -valued.

● Moser 座標系 η の可束として

$$\text{Moser 標準形} \quad \omega = |\zeta|^2 + \sum_{k,l \geq 2} F_{kl}$$

$$\Delta_\zeta F_{22} = 0, \quad \Delta_\zeta^2 F_{32} = 0, \quad \Delta_\zeta^3 F_{33} = 0$$

この座標系から特定の $\mathcal{P}$ の元がとれる (CM §6).

定理 この対応は右 P 作用とも整合的.

$\therefore \mathcal{P}$ は Moser 座標系 η の可束と理解してよい.

● わかりにくいこと

Q Fetterman の アーレント 計量による $(\mathcal{P}, \omega)$ の再構成: できる

しかし 局所埋め込みが正しいときはどうか? ($n=1$ のとき) 丸鹿の方法?

M が "partially integrable" な 複素 CR 構造をもつときは?

Q 一般の 放物型幾何でも

$\mathcal{P}$ は モデルによる $\langle \text{最良近似} \rangle$ の全体として理解できるか?

Q CR BGG 作用素の系列は

アーレント計量 / Cheng-Yau 計量のことでつくられるか?

* 共形幾何では Biquard-Graham がアタラシスしているが未発表.

Čap-Slovák-Souček のものとはおけること.