11/18 演習 11/25 休講

前回 V 有限次元ベクトル空間

$\Rightarrow \exists \vec{v_1}, \cdots \vec{v_n} \in V$ があって、

(1) $\vec{v_1}, \cdots \vec{v_n}$ は1次独立.

(2) $\vec{v} \in V$ について

$\vec{v} = c_1\vec{v_1} + \cdots + c_n\vec{v_n}$ とかける

$(c_1, \cdots c_n \in \mathbb{R})$

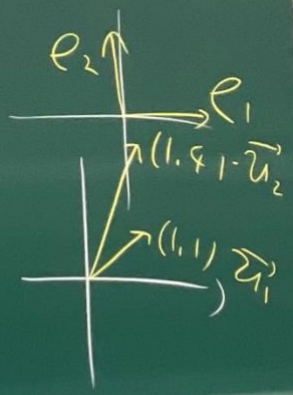
この $\vec{v_1} \cdots \vec{v_n}$ を V の基底とよび、

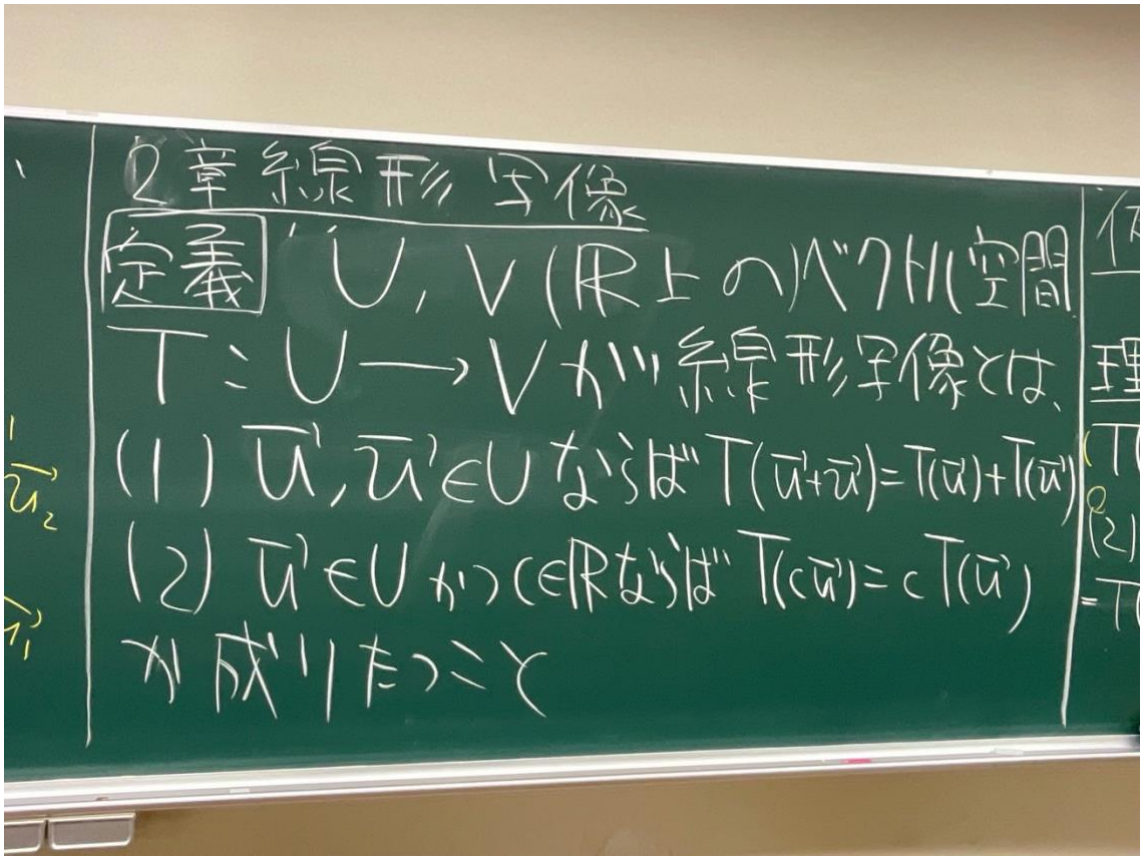
$\dim_{\mathbb{R}} V = n$ とよび V の次元という

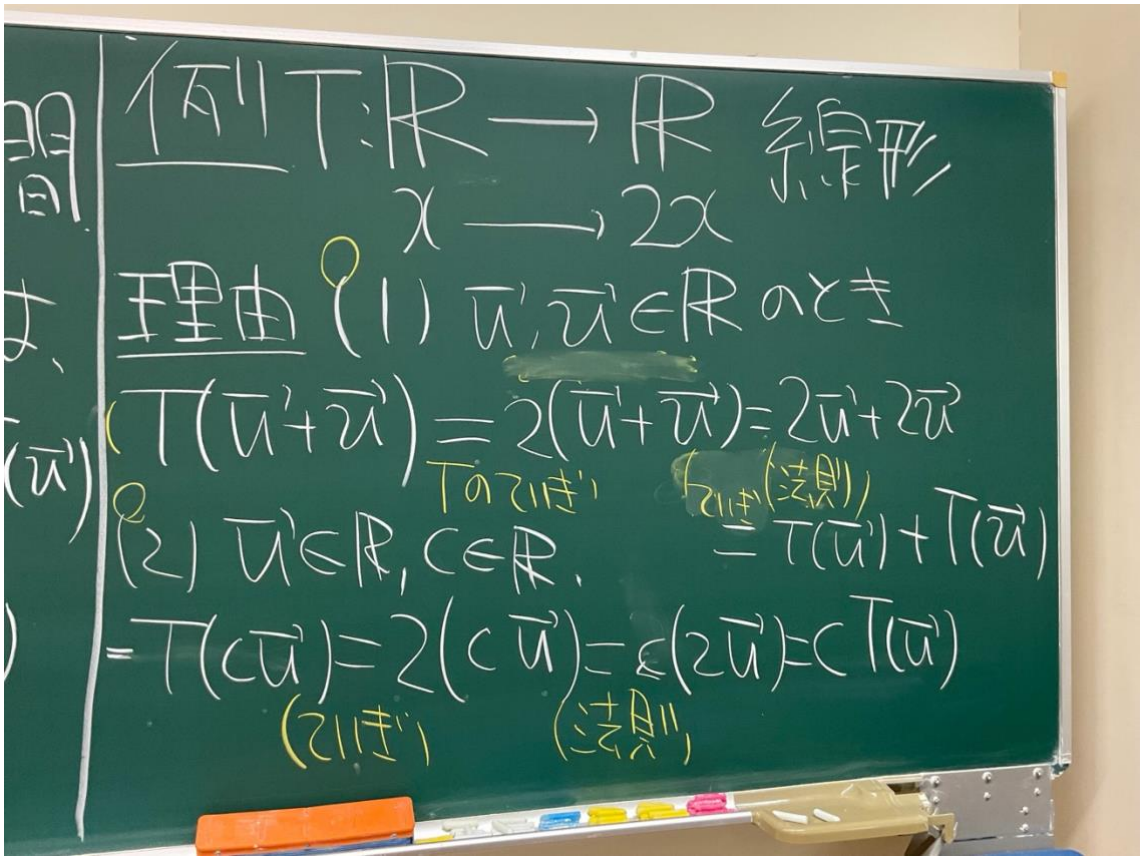
例 $\mathbb{R}^2$

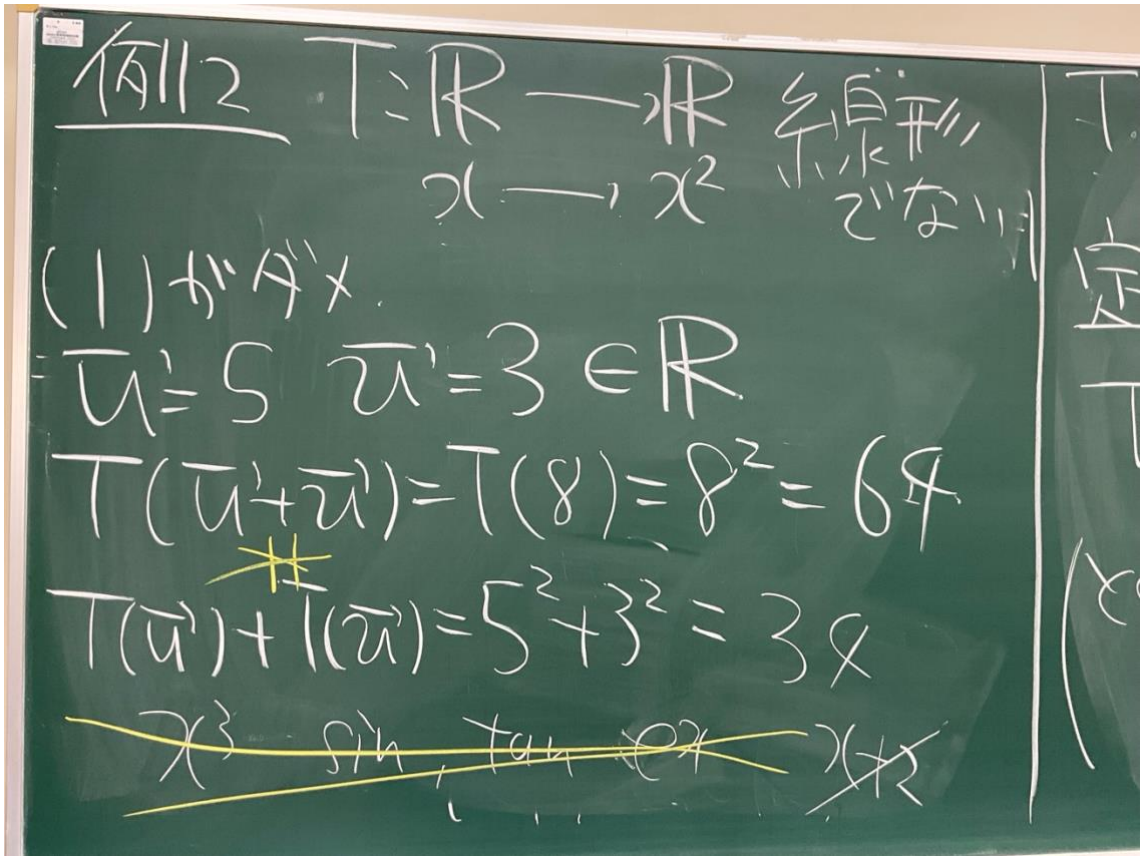
・$\vec{e_1} = (1,0)$ と $\vec{e_2} = (0,1)$

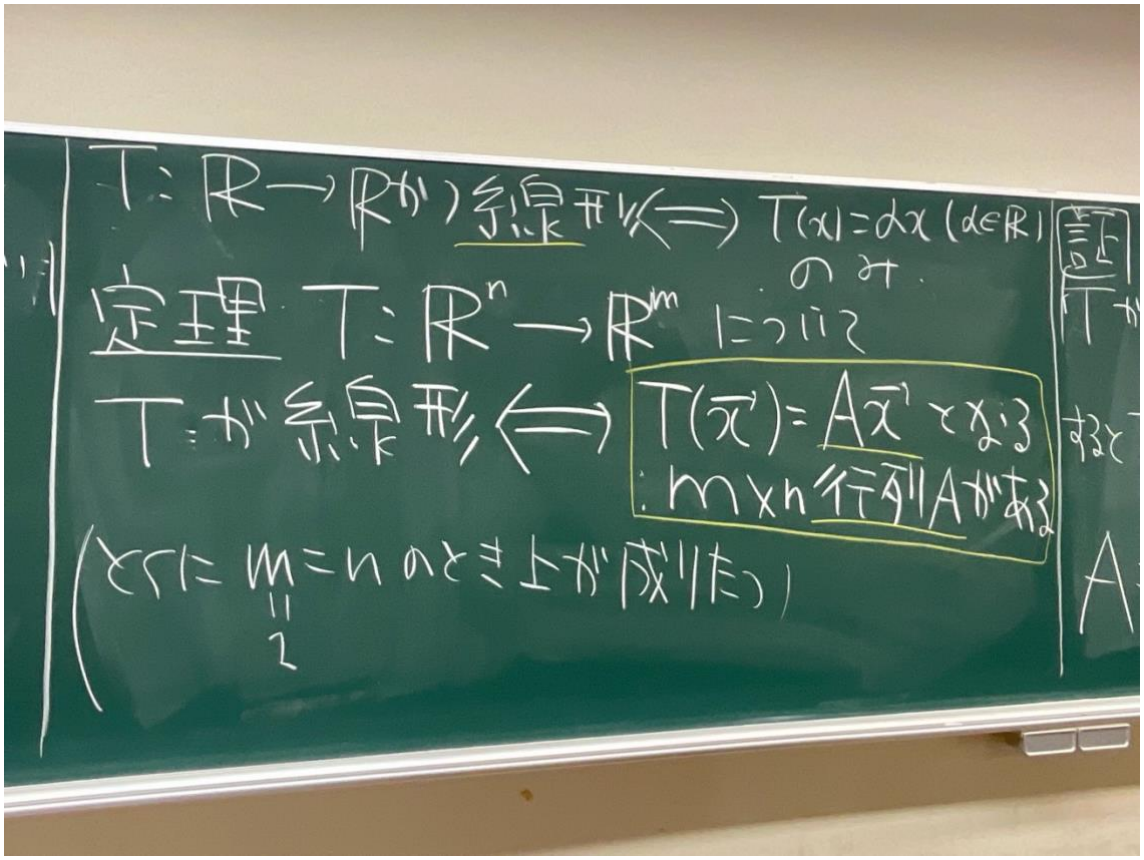
・$\vec{v_1} = (1,1)$ と $\vec{v_2} = (1,4)$

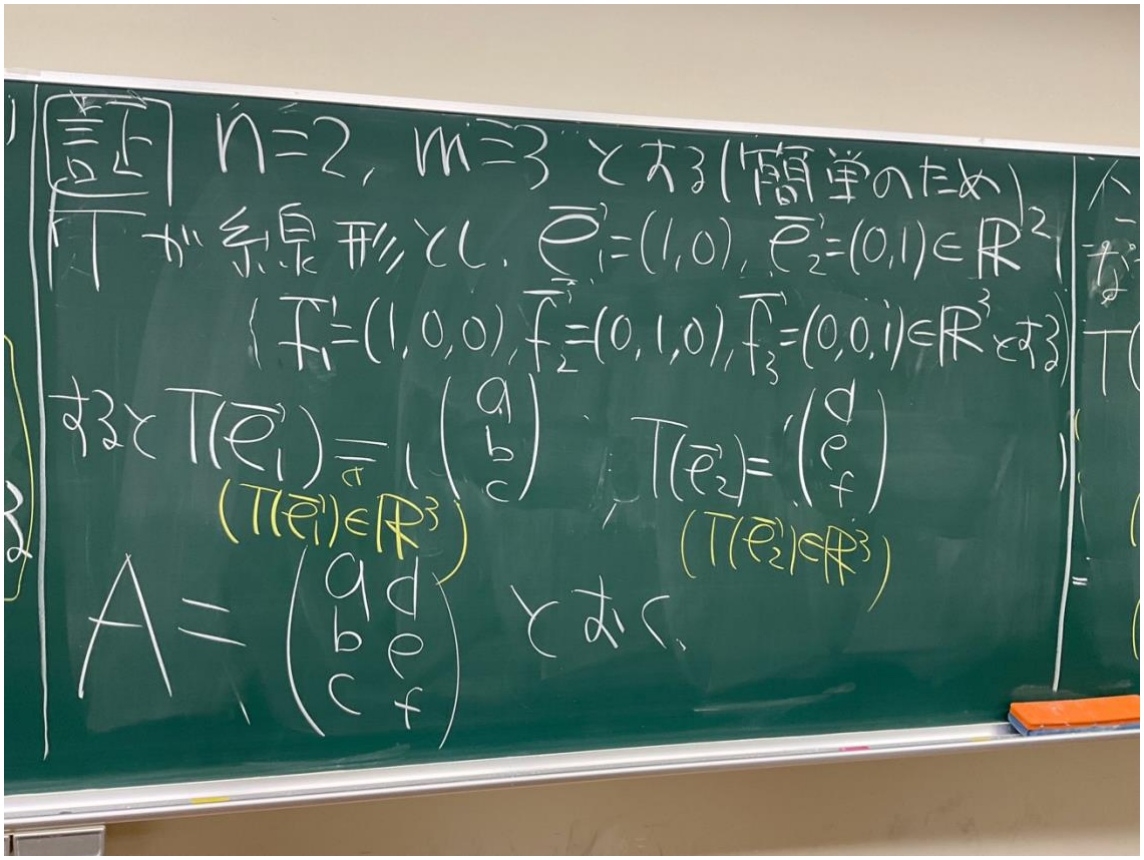


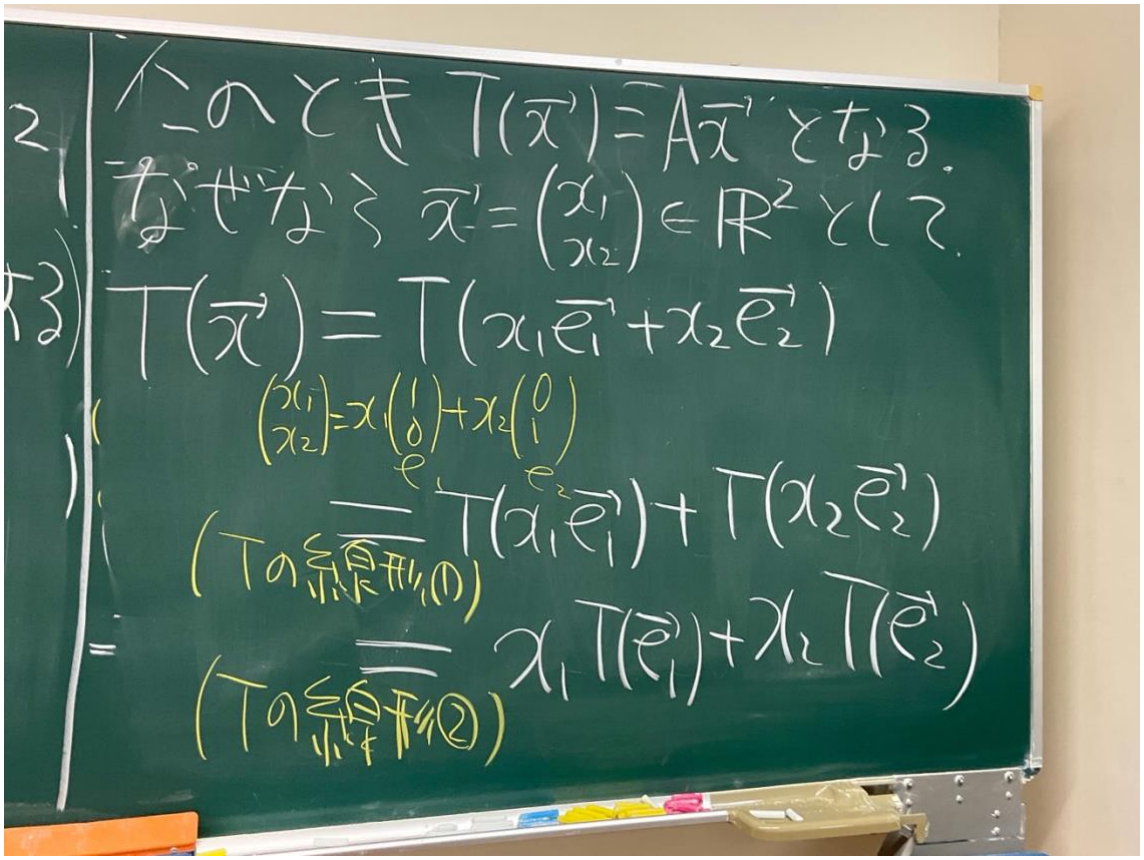

2章 線形写像
定義 U, V (R上のベクトル空間
T: U → V が線形写像とは、
(1) u, u' ∈ U ならば T(u+u') = T(u) + T(u')
(2) u ∈ U かつ c ∈ R ならば T(cu) = cT(u)
が成りたつこと

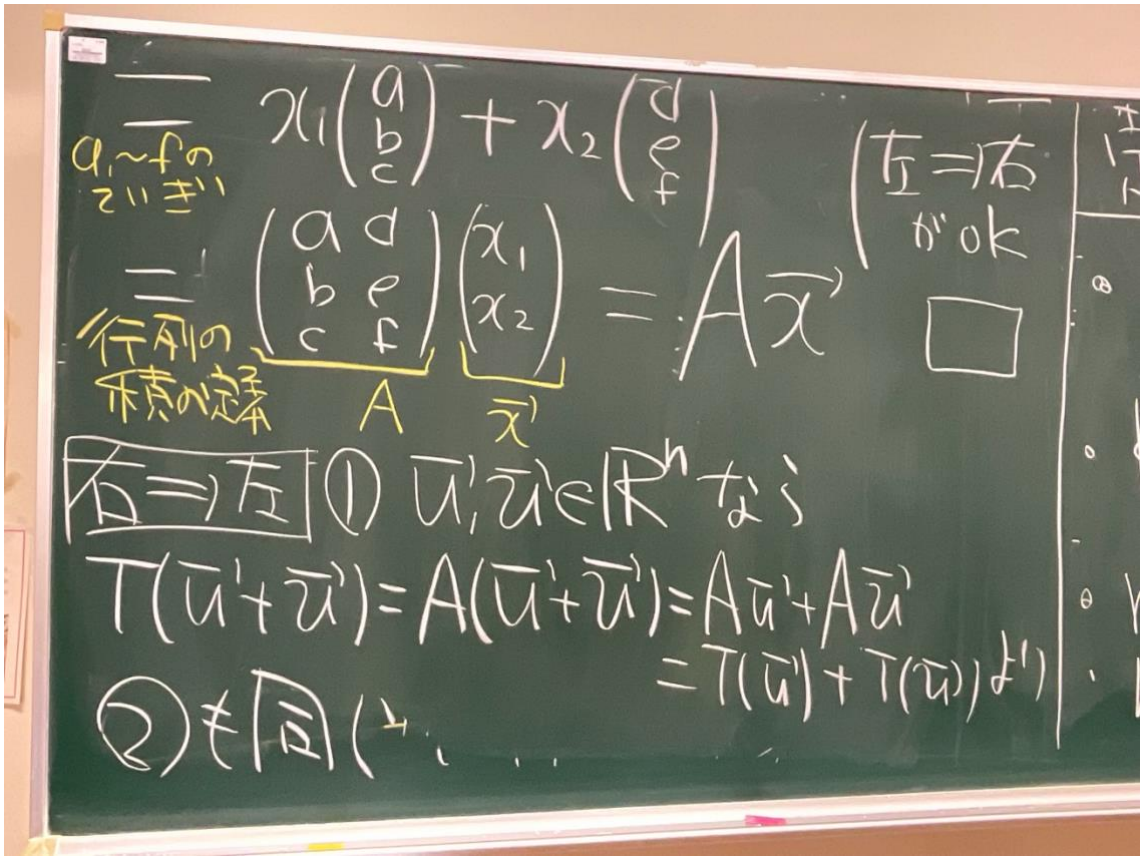

例 T: R → R 線形
x → 2x
理由 (1) u, u' ∈ R のとき
T(u+u') = 2(u+u') = 2u + 2u'
Tのていぎ
= T(u) + T(u')
(2) u ∈ R, c ∈ R.
T(cu) = 2(cu) = c(2u) = cT(u)
(ていぎ)
(法則)

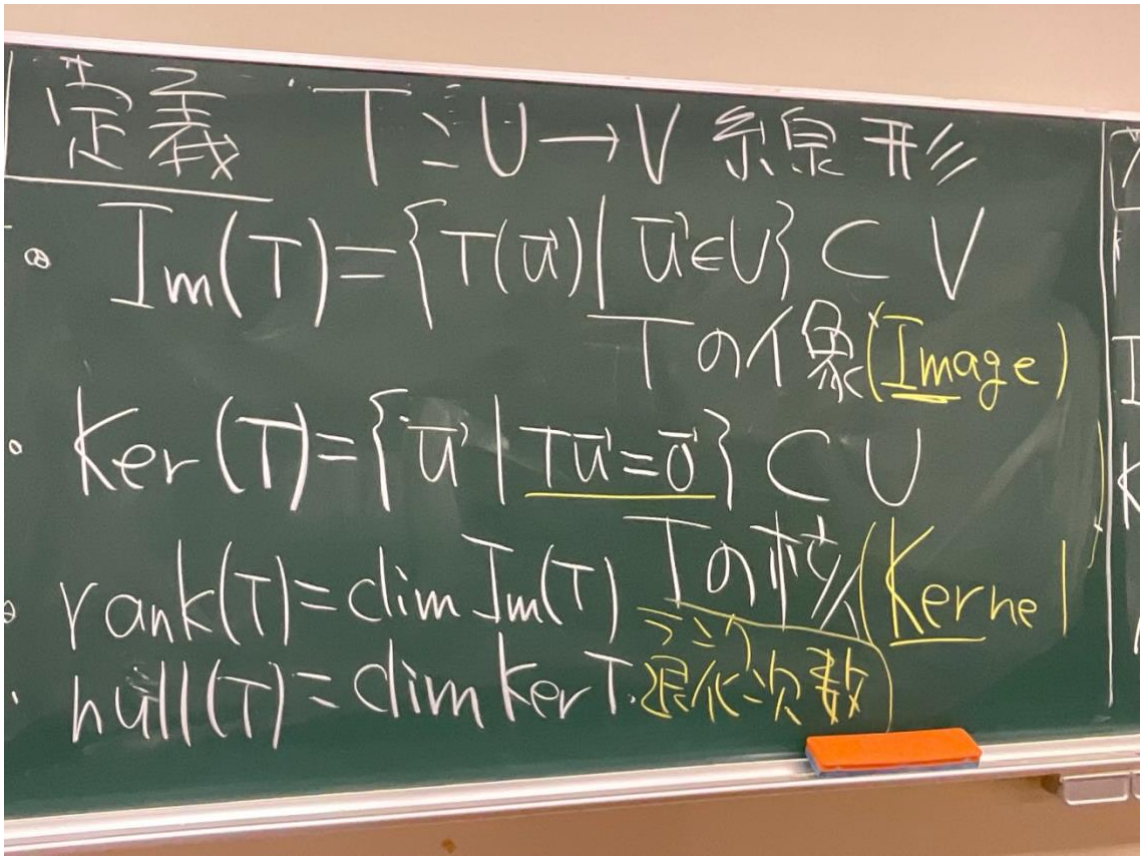

例12 $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\longmapsto x^2$ 線形でない
(1)が ダメ
$\vec{u}=5$ $\vec{v}=3\in\mathbb{R}$
$T(\vec{u}+\vec{v})=T(8)=8^2=64$
$T(\vec{u})+T(\vec{v})=5^2+3^2=34$

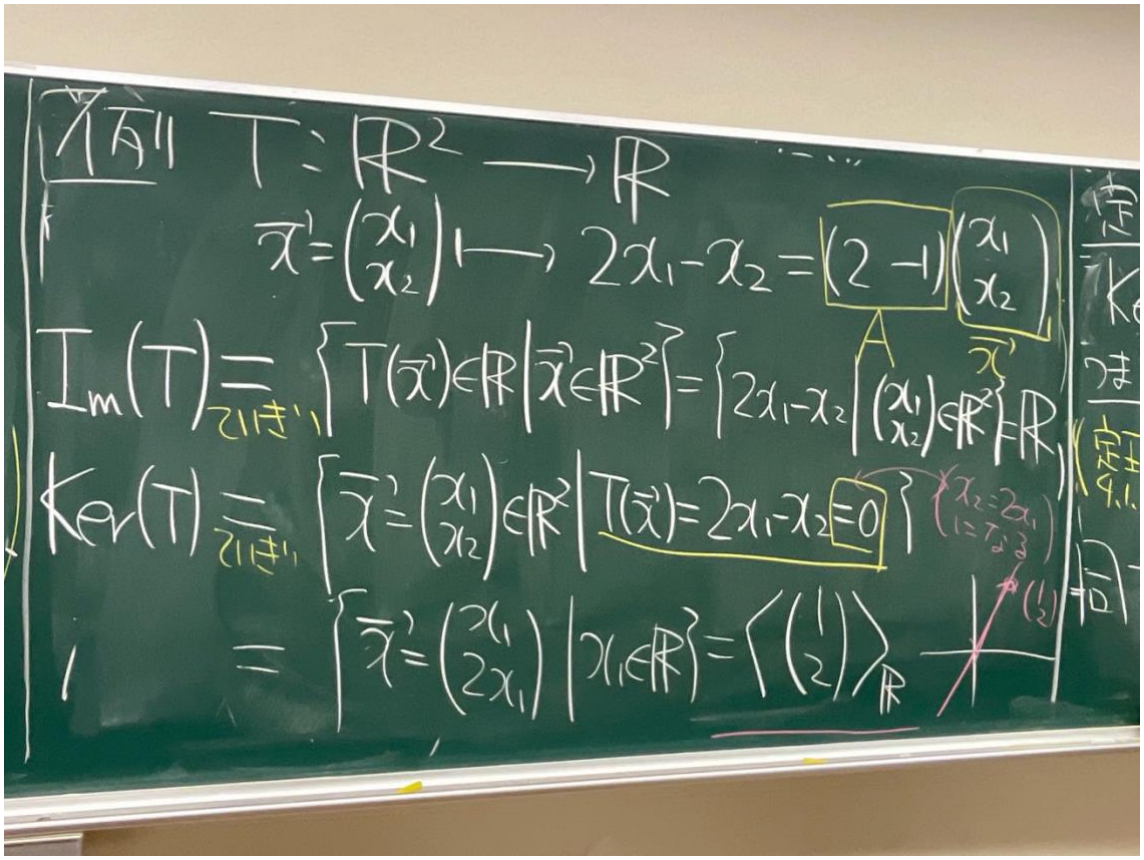

$T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$が線形 $\Longleftrightarrow$ $T(x)=ax$ $(a\in\mathbb{R})$ のみ
定理 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ について
Tが線形 $\Longleftrightarrow$ $T(\vec{x})=A\vec{x}$ となる $m\times n$ 行列Aがある
(とくに $m=n$ のとき上が成り立つ)

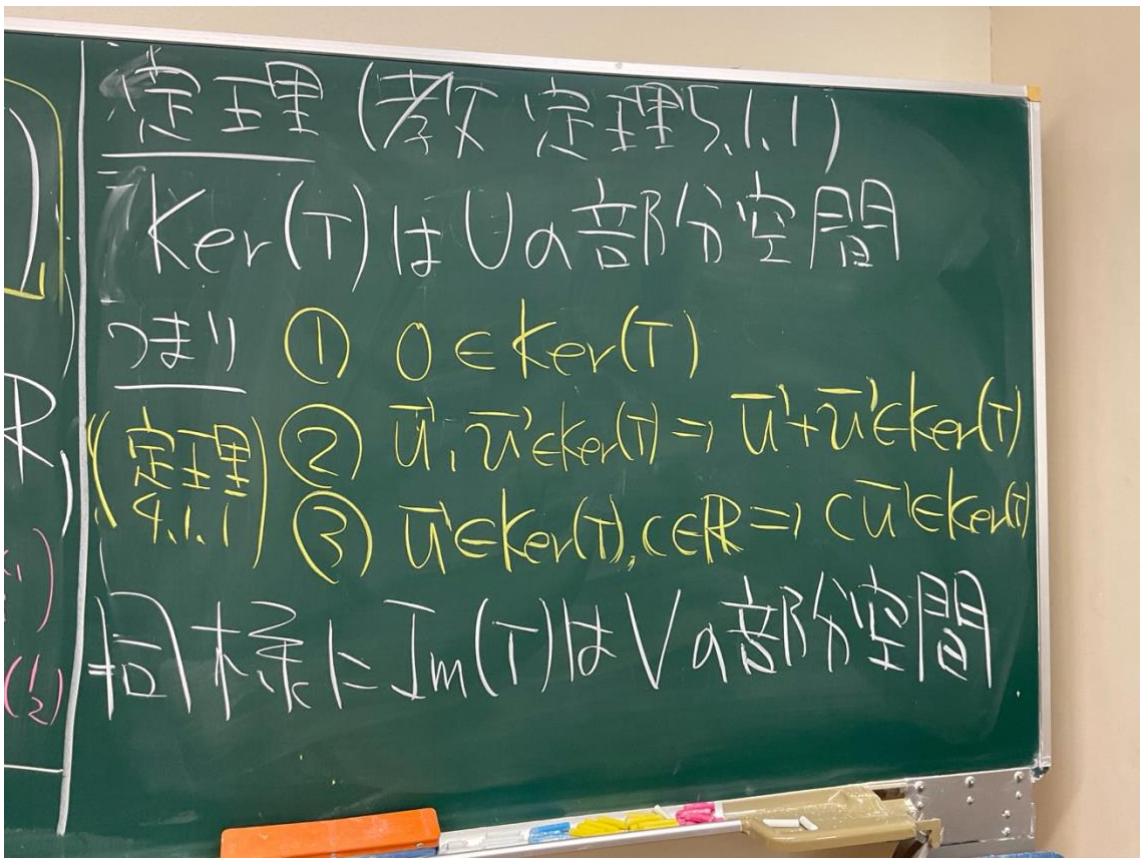

証明 $n=2$, $m=3$ とする(簡単のため)
T が線形写像とし, $\vec{e_1}=(1,0)$, $\vec{e_2}=(0,1)\in\mathbb{R}^2$
($\vec{f_1}=(1,0,0)$, $\vec{f_2}=(0,1,0)$, $\vec{f_3}=(0,0,1)\in\mathbb{R}^3$ とする)
すると $T(\vec{e_1})=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $T(\vec{e_2})=\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$
(T は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への写像)
($T(\vec{e_1})\in\mathbb{R}^3$) ($T(\vec{e_2})\in\mathbb{R}^3$)
$A=\begin{pmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{pmatrix}$ とおく.

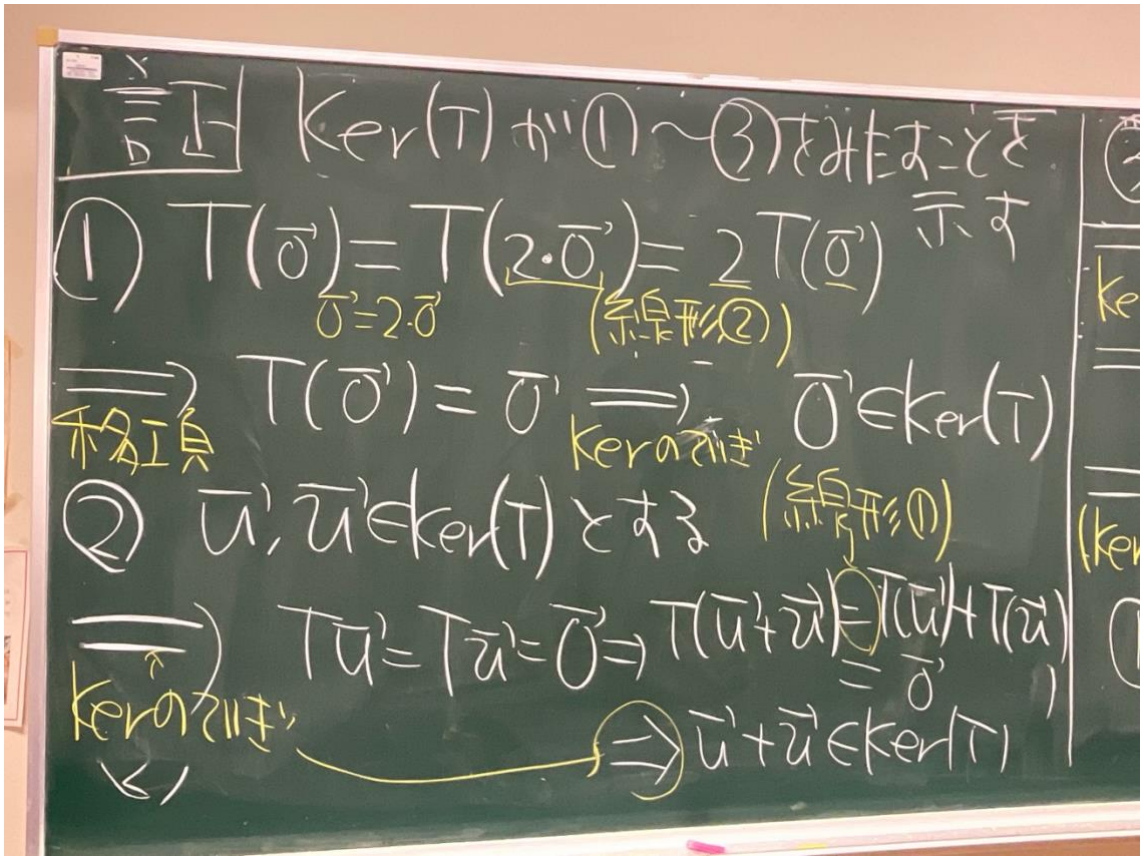

このとき $T(\vec{x})=A\vec{x}$ となる.
なぜなら $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ として
$T(\vec{x})=T(x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2})$
$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
e_1 e_2
$=T(x_1\vec{e_1})+T(x_2\vec{e_2})$
(T の線形性①)
$=x_1T(\vec{e_1})+x_2T(\vec{e_2})$
(T の線形性②)

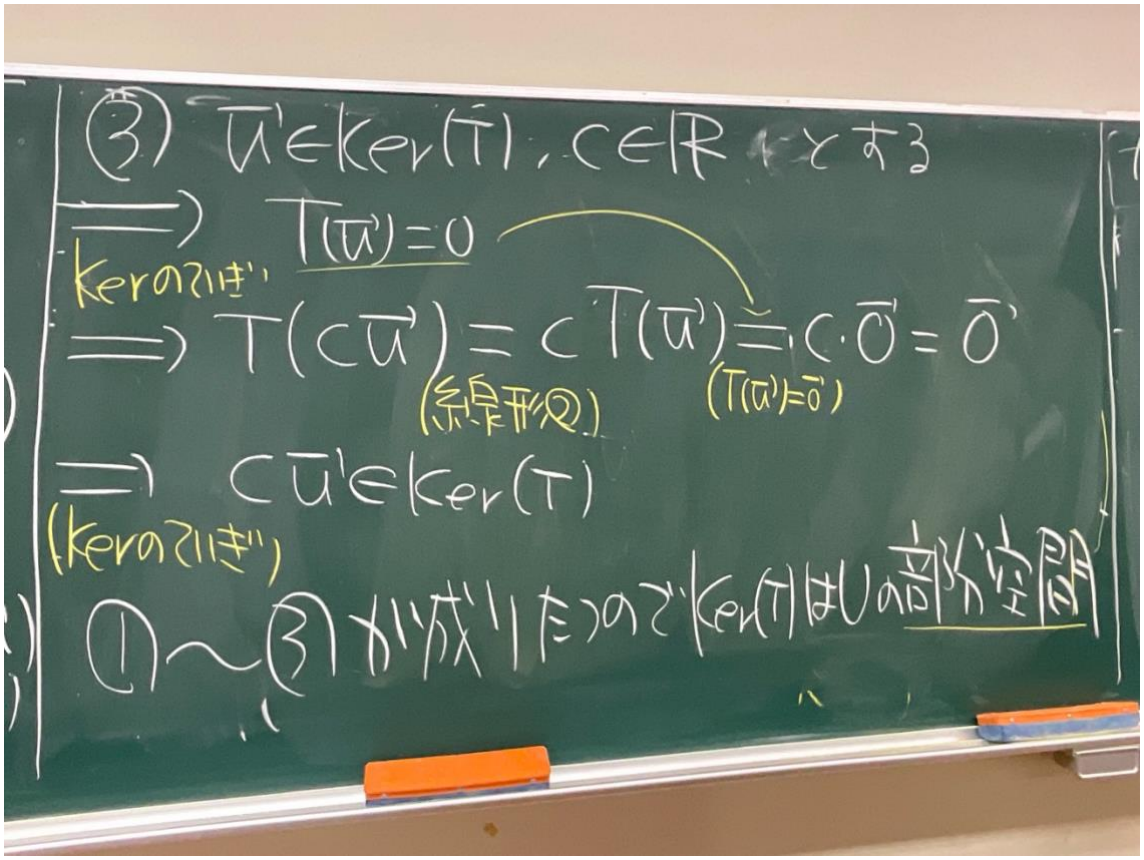

$x_1\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=A\vec{x}$
$a,\sim f$の定ぎ
行列の積の定義
A
$\vec{x}$
左=右がok
□
右=右 ① $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ なら
$T(\vec{u}+\vec{v})=A(\vec{u}+\vec{v})=A\vec{u}+A\vec{v}$
$=T(\vec{u})+T(\vec{v})$より
② も同じ

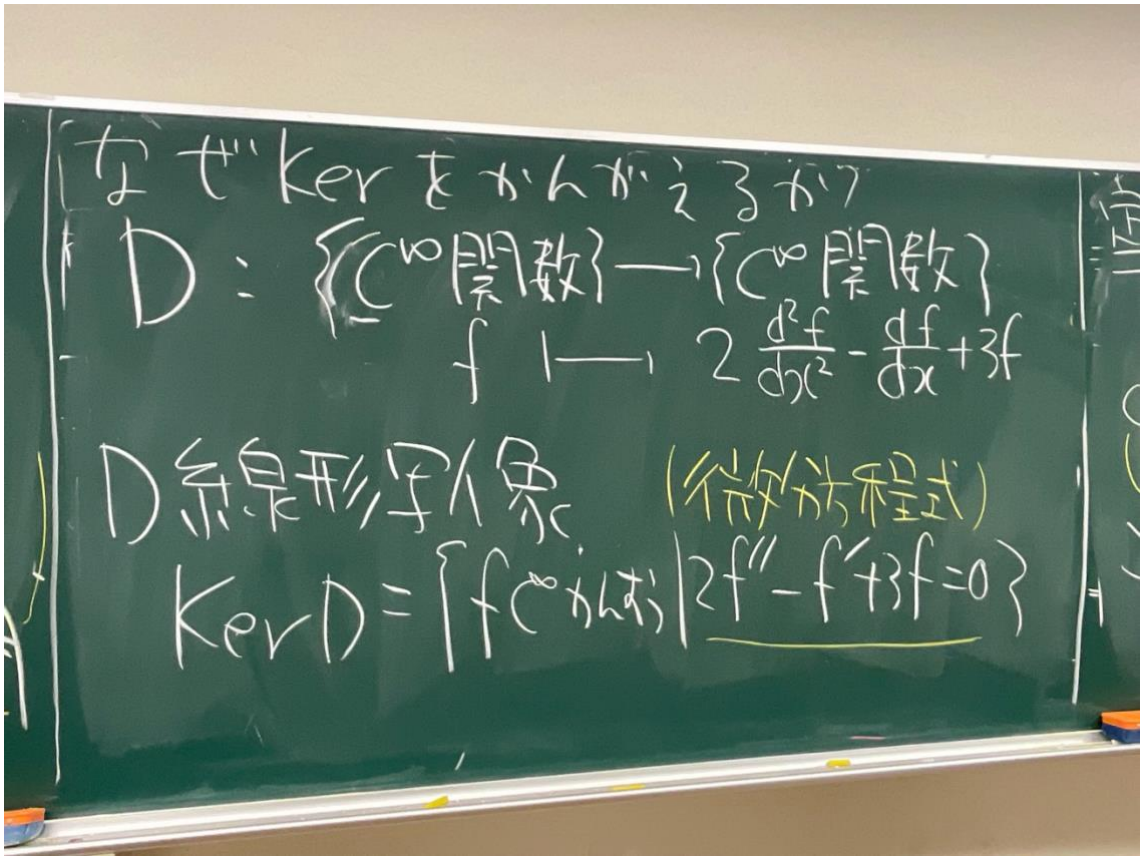

定義 $T:U\to V$ 線形写像
$\mathrm{Im}(T)=\{T(\vec{u})\mid \vec{u}\in U\}\subset V$
Tの像(Image)
$\ker(T)=\{\vec{u}\mid T\vec{u}=\vec{0}\}\subset U$
Tの核(Kernel)
$\mathrm{rank}(T)=\dim\mathrm{Im}(T)$
$\mathrm{null}(T)=\dim\ker T$ 退化次数

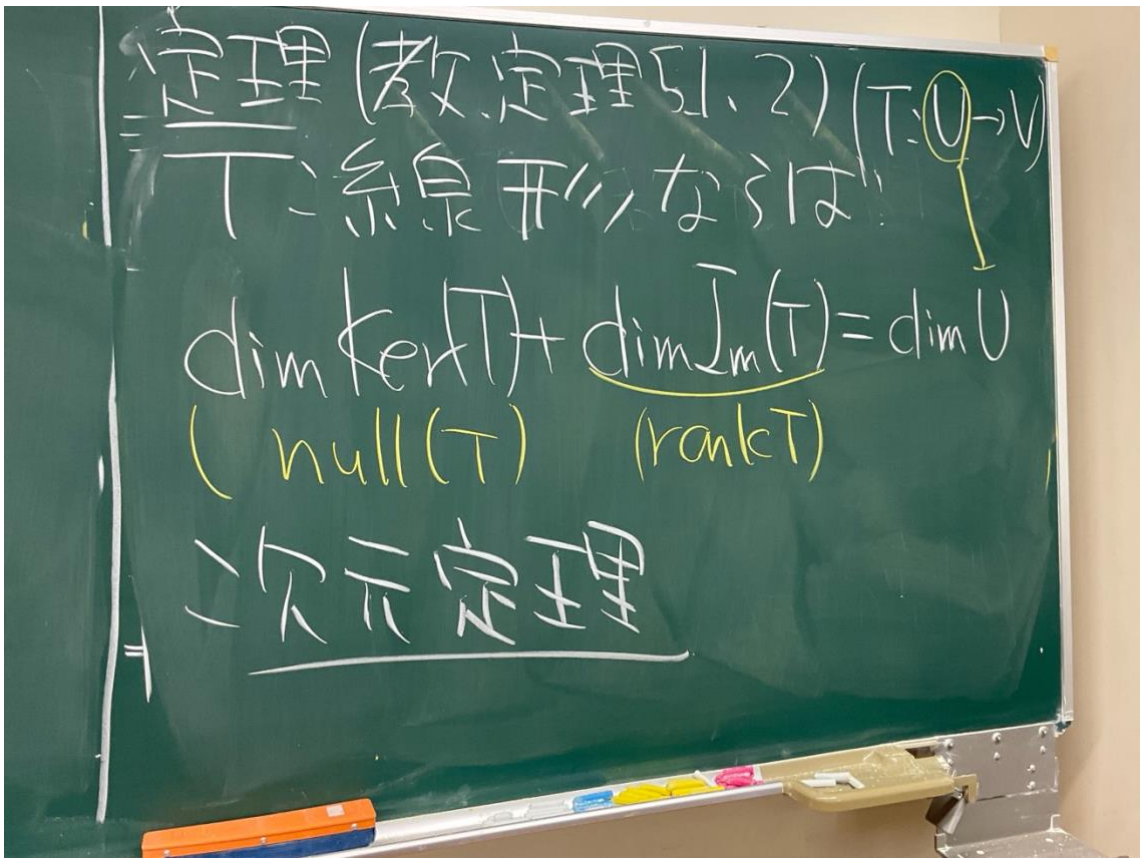

例 $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \longmapsto 2x_1-x_2=\begin{pmatrix}2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$
A
$\vec{x}$
$\mathrm{Im}(T)=\{T(\vec{x})\in\mathbb{R} \mid \vec{x}\in\mathbb{R}^2\}=\{2x_1-x_2 \mid \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\}=\mathbb{R}$
$\ker(T)=\left\{\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid T(\vec{x})=2x_1-x_2=0\right\}$
$(x_2=2x_1$ になる$)$
$=\left\{\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\2x_1\end{pmatrix} \mid x_1\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{R}}$
$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

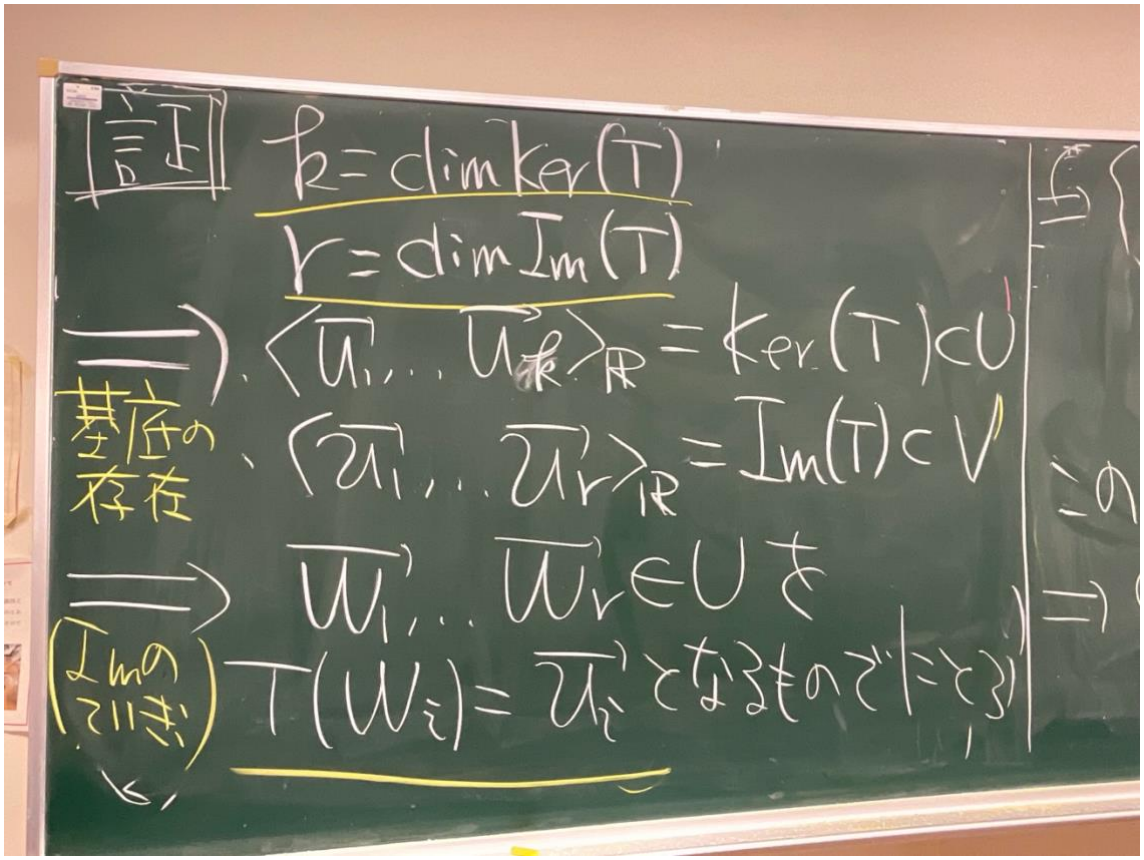

定理 (教定理5.1.1)
$\ker(T)$ は V の部分空間
つまり ① $0\in\ker(T)$
(証明) ② $\vec{u},\vec{v}\in\ker(T) \Rightarrow \vec{u}+\vec{v}\in\ker(T)$
5.1.1 ③ $\vec{u}\in\ker(T), c\in\mathbb{R} \Rightarrow c\vec{u}\in\ker(T)$
同様に $\mathrm{Im}(T)$ は V の部分空間

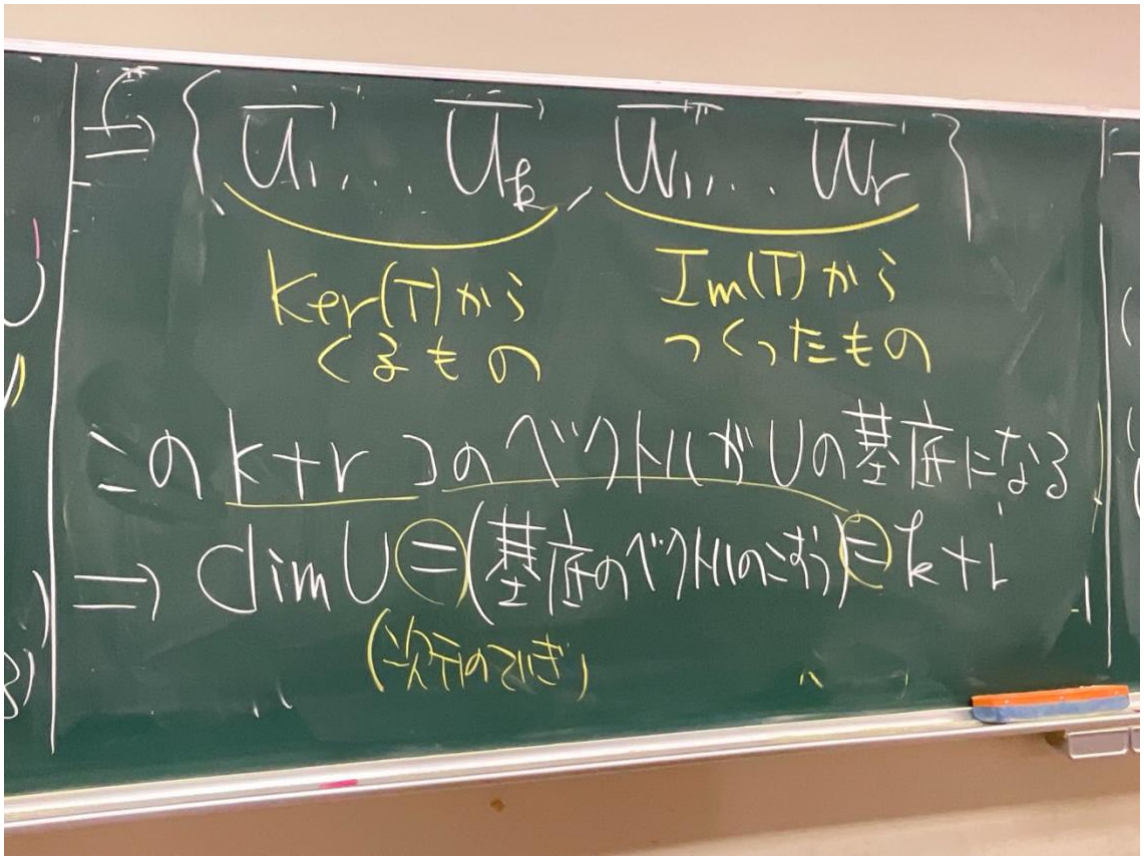

証明 $\ker(T)$ が①～③をみたすことを示す
① $T(\vec{0}) = T(2\cdot\vec{0}) = 2T(\vec{0})$
$\vec{0}=2\cdot\vec{0}$ (線形性②)
$\Longrightarrow$ $T(\vec{0})=\vec{0}$ $\Longrightarrow$ $\vec{0}\in\ker(T)$
(不等式負) (kerのていぎ)
② $\vec{u},\vec{u}\in\ker(T)$ とする (線形性①)
$\Longrightarrow$ $T\vec{u}=T\vec{u}=\vec{0}\Rightarrow T(\vec{u}+\vec{u})=T(\vec{u})+T(\vec{u})=\vec{0}$
(kerのていぎ) $\Rightarrow \vec{u}+\vec{u}\in\ker(T)$

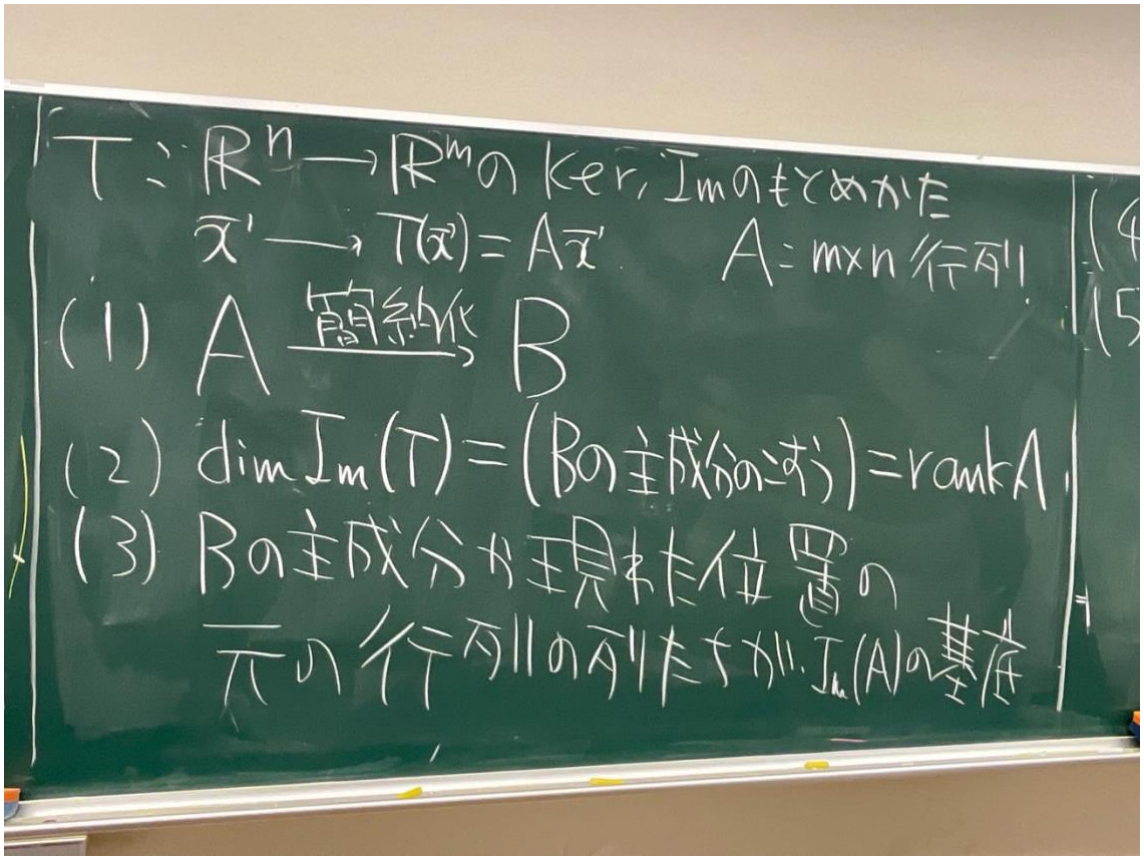

③ $\vec{u}\in\ker(T)$, $c\in\mathbb{R}$ とする
$\Longrightarrow$ $T(\vec{u})=0$
(kerのていぎ)
$\Longrightarrow T(c\vec{u}) = cT(\vec{u}) = c\cdot\vec{0}=\vec{0}$
(線形性②) ($T(\vec{u})=\vec{0}$)
$\Rightarrow c\vec{u}\in\ker(T)$
(kerのていぎ)
①～③が成りたつので $\ker(T)$ はUの部分空間

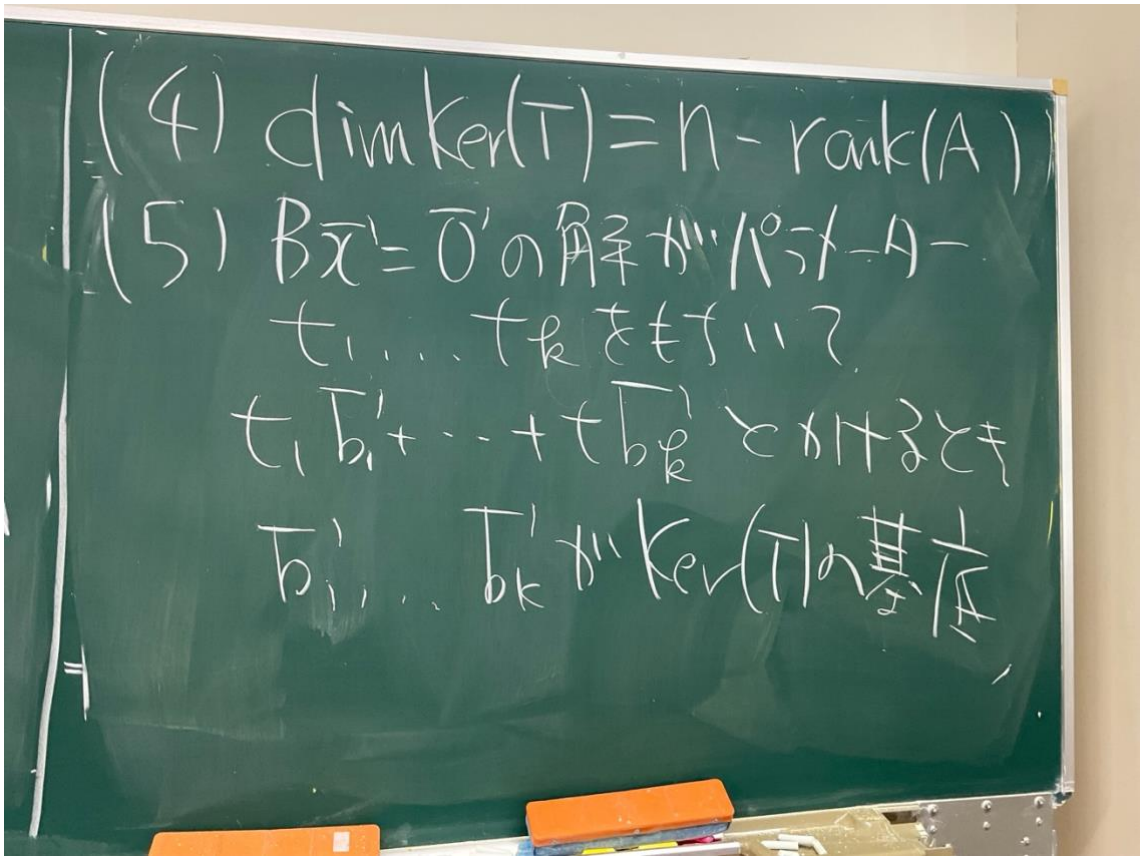

なぜkerをかんがえるか?
D: {C^∞関数} → {C^∞関数}
f ↦ 2d²f/dx² − df/dx + 3f
D線形写像
(微分方程式)
kerD = {f(かんすう) | 2f'' − f' + 3f = 0}

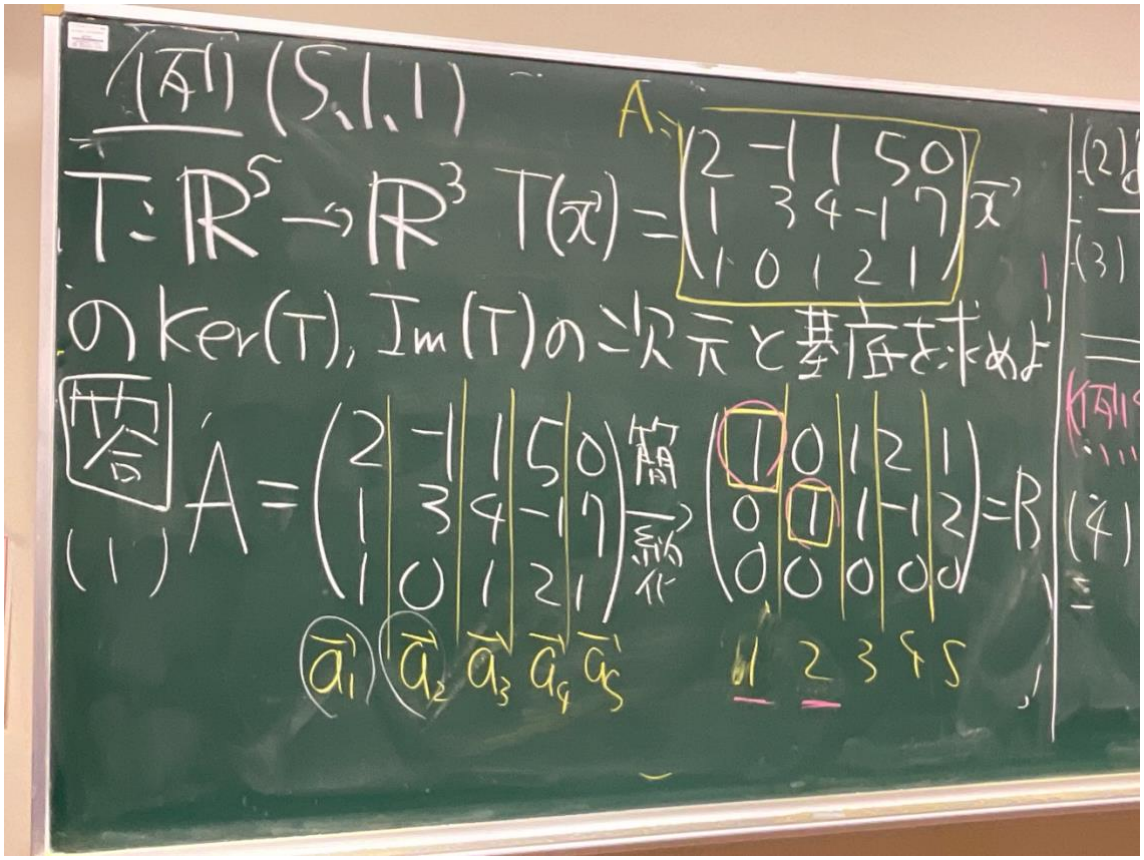

定理(教.定理5.1.2) (T: U → V)
Tが線形ならば
dim kerT + dim Im(T) = dim U
(null(T)) (rank(T))
次元定理

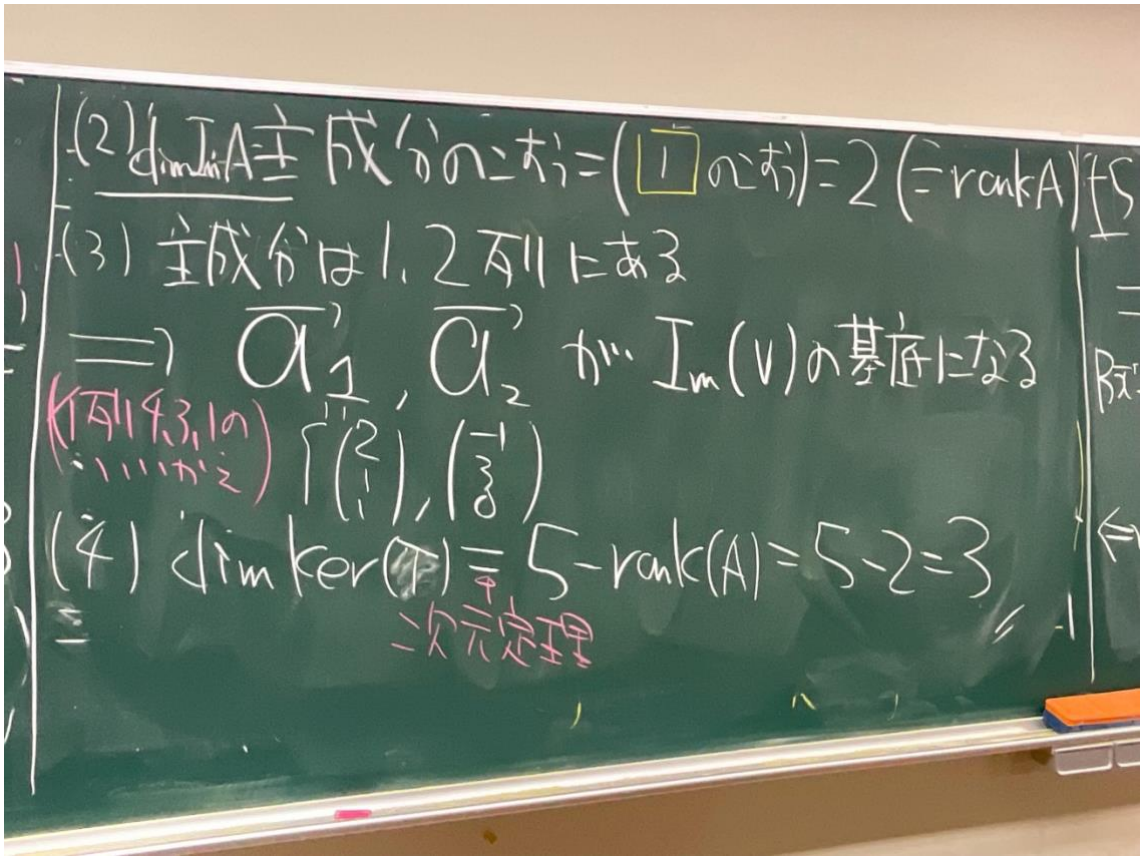

[証]
$k=\dim\ker(T)$
$r=\dim \mathrm{Im}(T)$
$\Rightarrow \langle \vec{u}_1 \cdots \vec{u}_k \rangle_{\mathbb{R}} = \ker(T) \subset U$
基底の存在
$\langle \vec{v}_1 \cdots \vec{v}_r \rangle_{\mathbb{R}} = \mathrm{Im}(T) \subset V$
$\Rightarrow \vec{w}_1 \cdots \vec{w}_r \in U$ を
(Imの定義より)
$T(\vec{w}_i) = \vec{v}_i$ となるものでとる

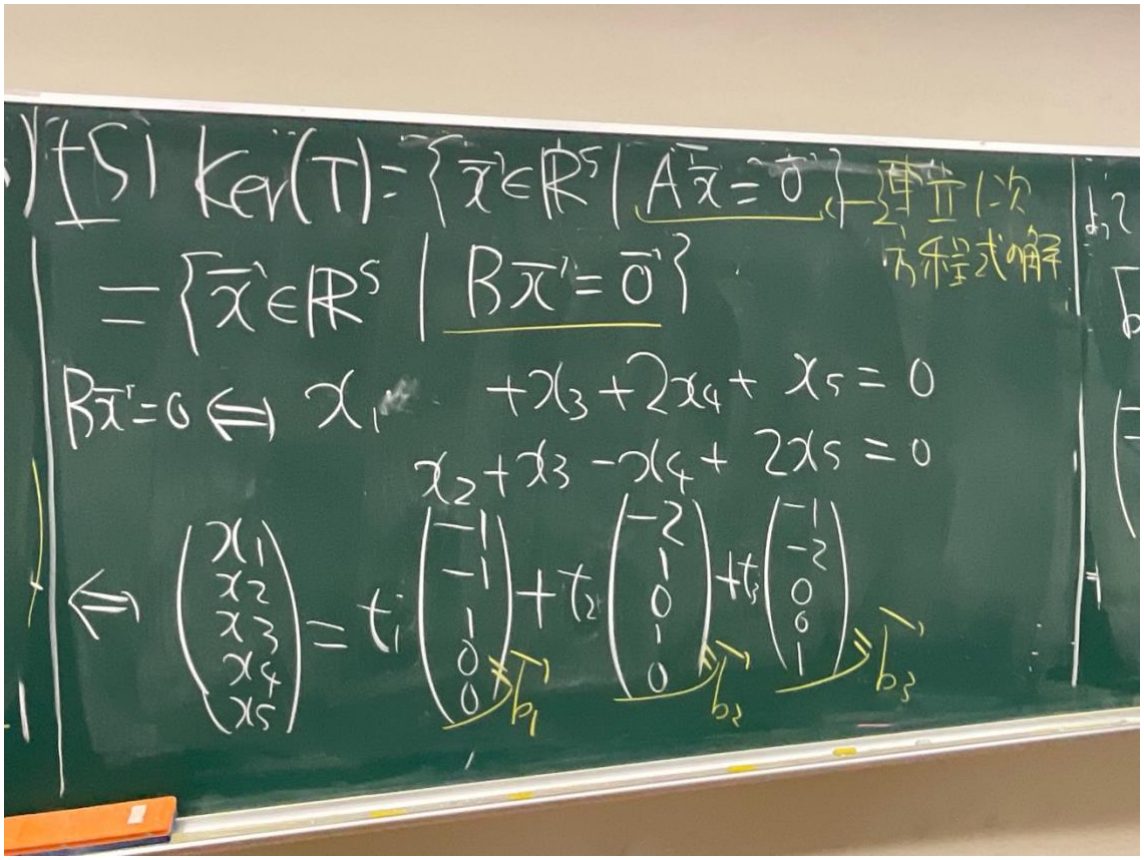

$\{\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_k, \vec{w}_1 \cdots \vec{w}_r\}$
$\ker(T)$から
くるもの
$\mathrm{Im}(T)$から
つくったもの
この $k+r$ コのベクトルがUの基底になる
$\Rightarrow \dim U = (\text{基底のベクトルの個数}) = k+r$
(次元の定義)

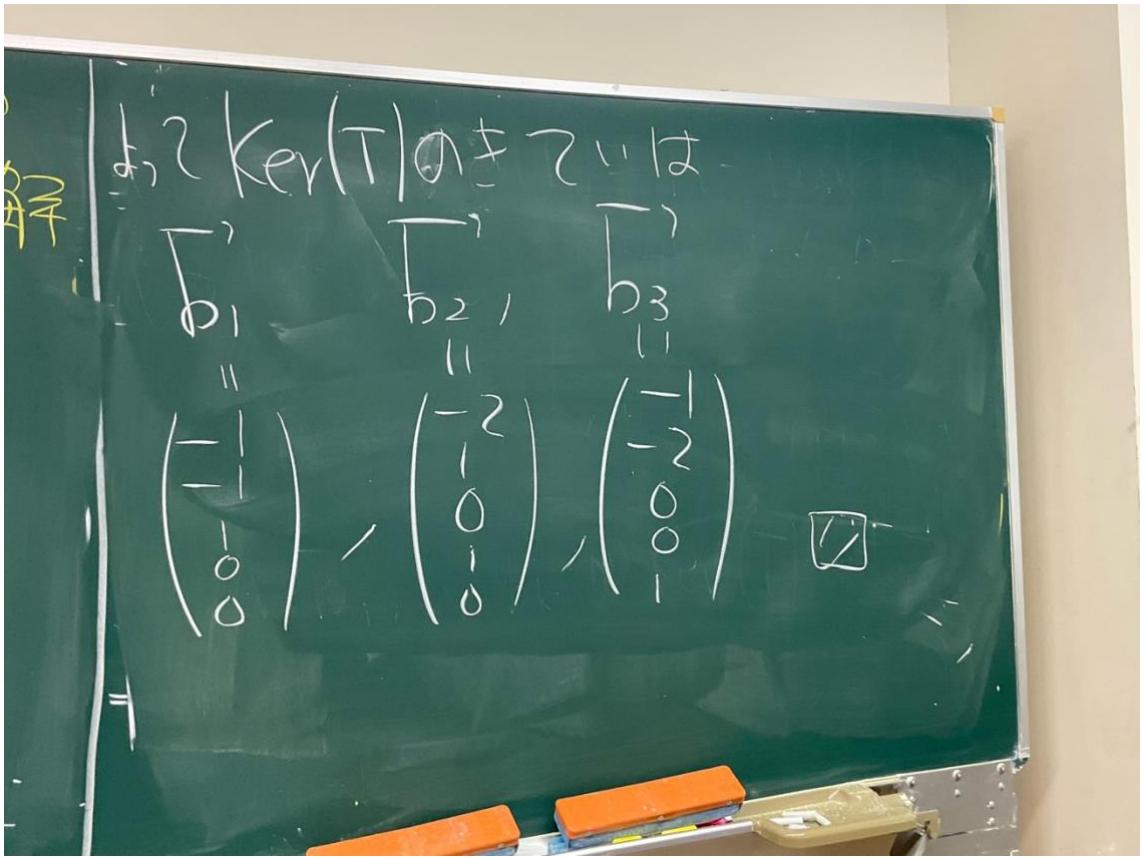

T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の ker, Im のもとめかた
$\vec{x} \longrightarrow T(\vec{x}) = A\vec{x}$ A: m×n 行列
(1) A 簡約化 B
(2) $\dim \mathrm{Im}(T)$ = (Bの主成分の数) = rank A
(3) Bの主成分が現れた位置の
元の行列の列たちが $\mathrm{Im}(A)$ の基底


(4) $\dim \ker(T) = n - \mathrm{rank}(A)$
(5) $B\vec{x} = \vec{0}$ の解をパラメータ
$t_1 \ldots t_k$ をもちいて
$t_1\vec{b}_1 + \cdots + t\vec{b}_k$ とかけるとき
$\vec{b}_1 \ldots \vec{b}_k$ が $\ker(T)$ の基底


(例) (5,1,1)
T: ℝ⁵ → ℝ³ T(x) = A
A = (2 −1 1 5 0 / 1 3 4 −1 7 / 1 0 1 2 1) x
の ker(T), Im(T) の次元と基底を求めよ
(答)
(1) A = (2 −1 1 5 0 / 1 3 4 −1 7 / 1 0 1 2 1) 簡約化 → (1 0 1 2 1 / 0 1 1 −1 2 / 0 0 0 0 0) = B
a⃗1 a⃗2 a⃗3 a⃗4 a⃗5
1 2 3 4 5


(2) dim Im A = 主成分の個数 = (1 の個数) = 2 (= rank A)
(3) 主成分は 1, 2 列にある
⟹ a⃗1, a⃗2 が Im(V) の基底になる
(行列 A, B の 1 の個数が 2)
(1 0 1 2 1 / 0 1 1 −1 2)
(4) dim ker(T) = 5 − rank(A) = 5 − 2 = 3
次元定理


[S1] $\ker(T) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$ ← 連立1次方程式の解
$= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 \mid B\vec{x} = \vec{0}\}$
$B\vec{x} = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$
$x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\vec{b}_1$ $\vec{b}_2$ $\vec{b}_3$


よって $\ker(T)$ の基底は
$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ □