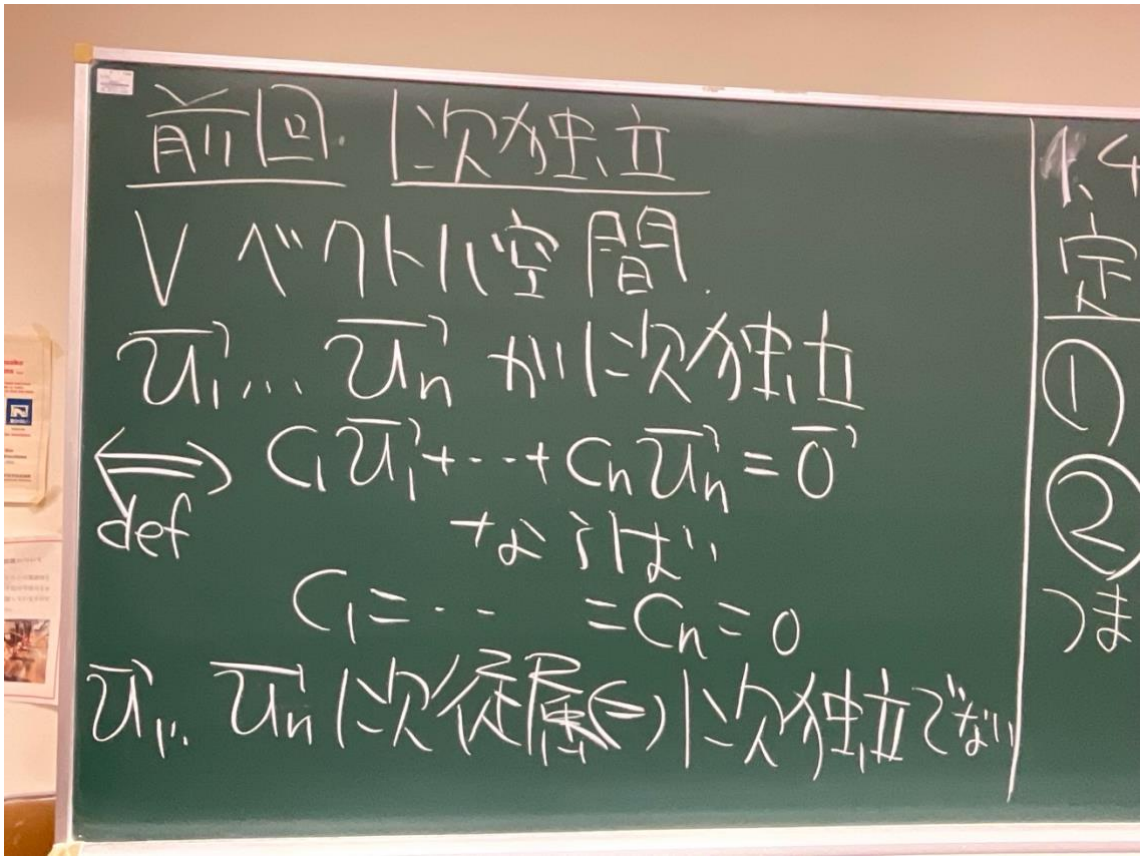
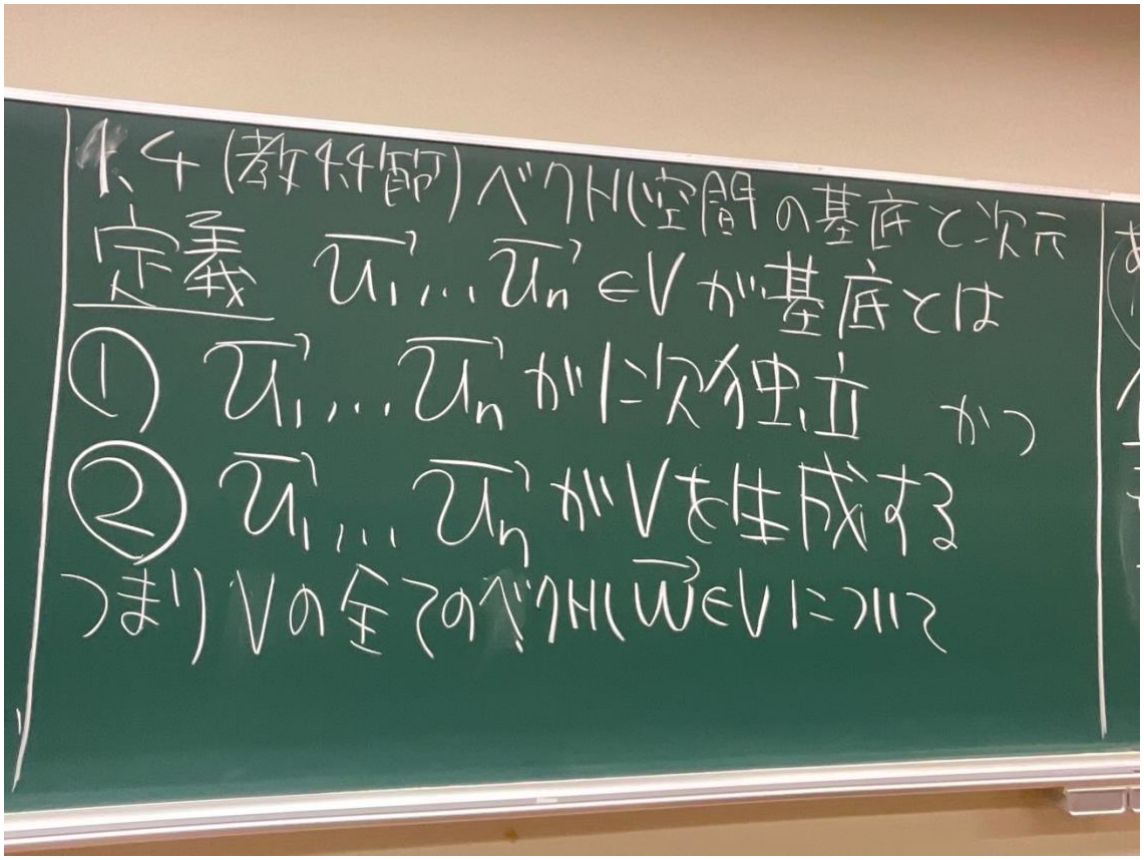

前回：1次独立
Vベクトル空間
$\vec{v_1}, \cdots \vec{v_n}$ が1次独立
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} c_1\vec{v_1} + \cdots + c_n\vec{v_n} = \vec{0}$
ならば
$c_1 = \cdots = c_n = 0$
$\vec{v_1}, \cdots \vec{v_n}$ 1次従属 ⇔ 1次独立でない
1.4 定義 ②

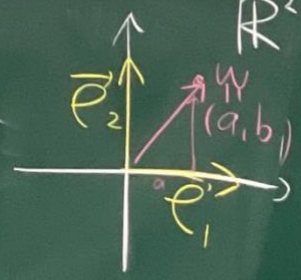

1.4 (数1外部) ベクトル空間の基底と次元
定義 $\vec{v_1}, \cdots \vec{v_n} \in V$ が基底とは
① $\vec{v_1}, \cdots \vec{v_n}$ が1次独立 かつ
② $\vec{v_1}, \cdots \vec{v_n}$ がVを生成する
つまりVの全てのベクトル $\vec{w} \in V$ について

ある $c_1, \cdots, c_n$ があって、
$\vec{w} = c_1\vec{u_1} + \cdots + c_n\vec{u_n}$ となる。

例 $\mathbb{R}^2$

$\vec{e_1} = (1,0)$, $\vec{e_2} = (0,1)$

基底になる



証 ① 前回

② $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ とする

$\Rightarrow \vec{w} = (a,b)$ とかける $(a,b \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow \vec{w} = a(1,0) + b(0,1) = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$

$\Rightarrow \vec{w} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$ より生成する □

同様に $\mathbb{R}^n$ で

$\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ … $\vec{e_n}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$

標準基底



$\mathbb{R}^2$ において $\vec{e_1}$ 基底でない(×)

$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{v_3}=(1,1)$ は

1次独立でない(×)

定理

V の

証

定理(次元, 4.1)

V の基底の[個数]は一定。

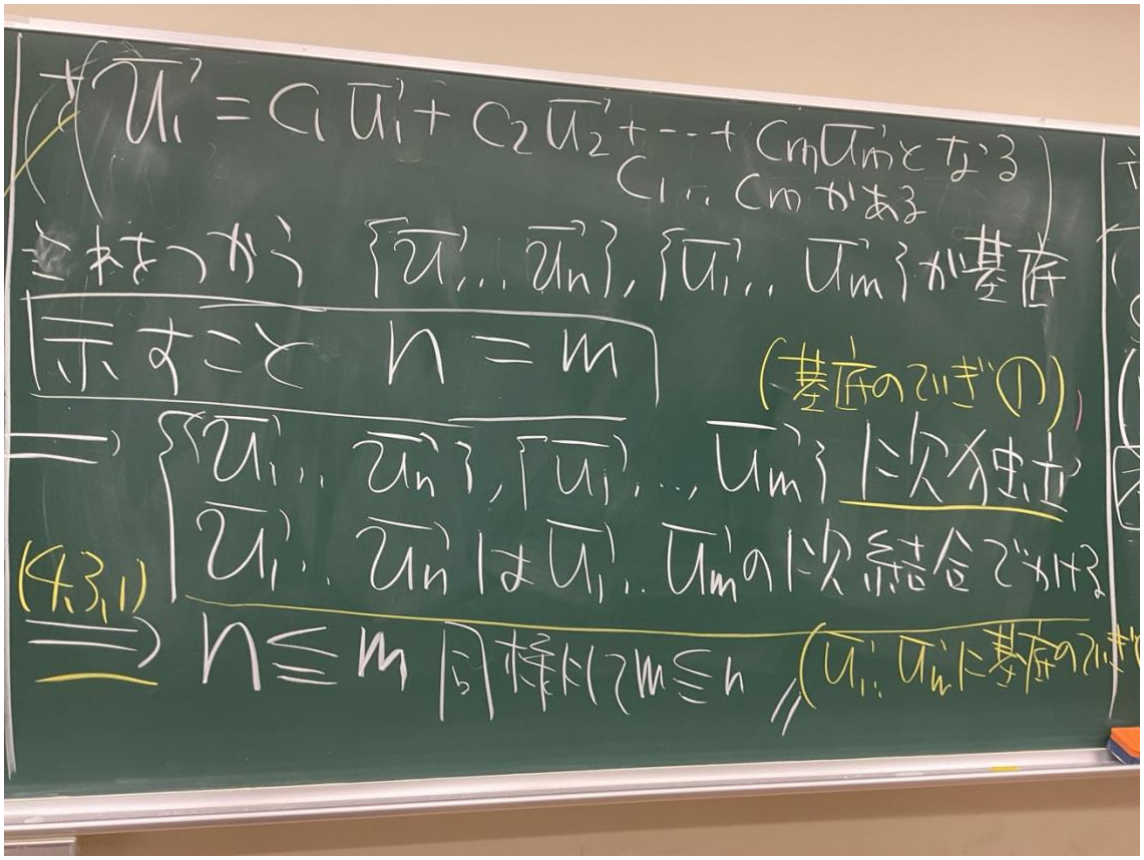
証 前回のでいりを思い出す

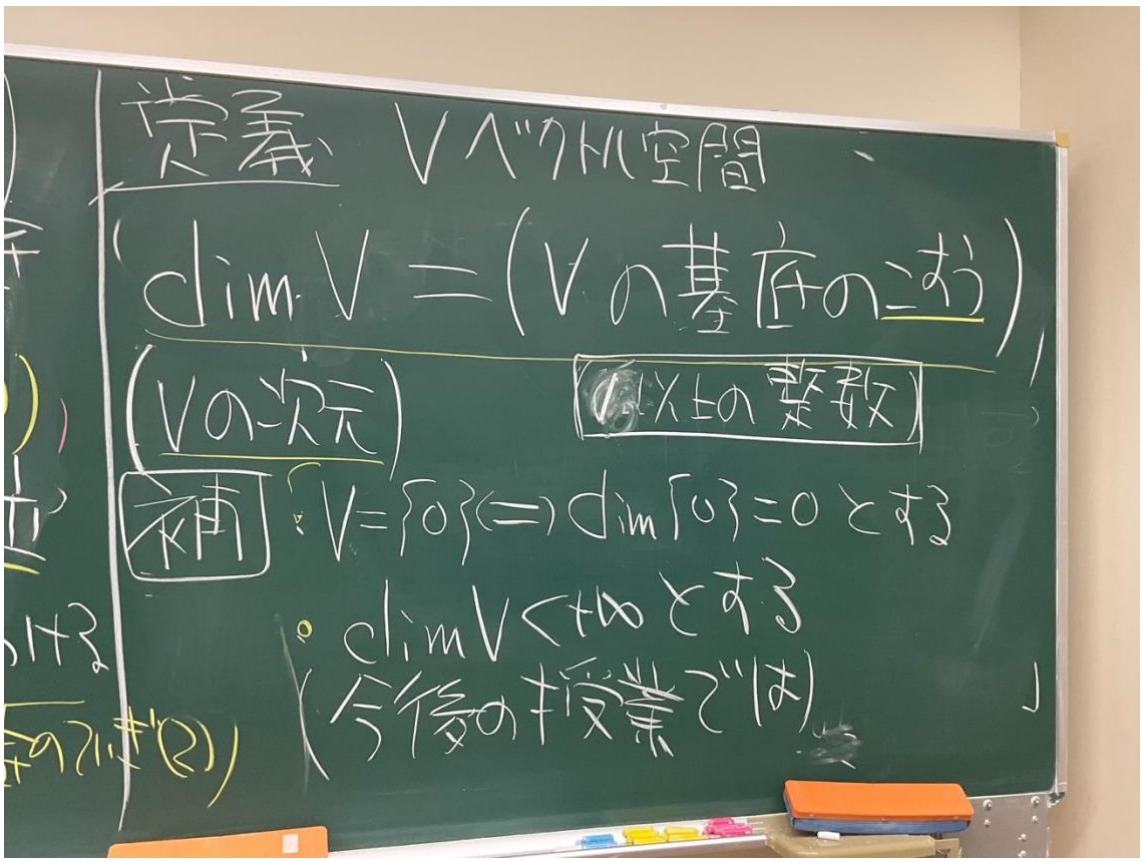
[定理3.1] $\{\vec{v_1},\dots,\vec{v_n}\}$, $\{\vec{u_1},\dots,\vec{u_m}\}$ 1次独立

, $\vec{v_1},\dots,\vec{v_n}$ が $\vec{u_1},\dots,\vec{u_m}$ の1次結合でかける

$\Longrightarrow n \leqq m$

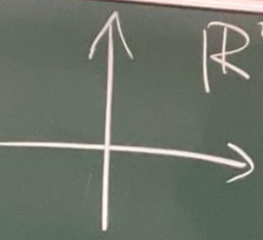
(4.3)


$\vec{u}_1' = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_m\vec{u}_m$ となる
$c_1, \cdots, c_m$ がある
これより $\{\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_n\}, \{\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_m\}$ が基底
示すこと $n = m$
(基底のつぎの)
$\Longrightarrow$ $\{\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_n\}, \{\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_m\}$ は1次独立
$\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_n$ は $\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_m$ の1次結合でかける
(4.3.1)
$\Longrightarrow n \leqq m$ 同様にして $m \leqq n$
($\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_n$ に基底のつぎ


定義 Vベクトル空間
$\dim V$ = (Vの基底の個数)
(Vの次元)
(1以上の整数)
補足: $V = \{0\} \Leftrightarrow \dim\{0\} = 0$ とする
$\dim V < +\infty$ とする
(今後の授業では)」

例 $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

証 $e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)$ 基底



$\Rightarrow \dim \mathbb{R}^2 \overset{\text{定義}}{=} (\text{基底の個数}) = 2$

例2 $\dim \mathbb{R}^n = n$

(空間 $\mathbb{R}^n$ は n 次元)

例 $\mathbb{R}[x]_2 = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

基底, $\{1, x, x^2\}$ 3つ

$\dim \mathbb{R}[x]_2 = (\text{基底の個数}) = 3$

(定義)

同様に $\dim \mathbb{R}[x]_n = n+1$

$\{ a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \}$

例 4.4.4

$$W=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1-2x_2+x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 2x_1-4x_2+3x_3+3x_4+8x_5=0 \end{array} \right\} \quad \text{☆}$$

の次元と基底を1つもとめよ

解答 まず☆の式をとく（掃き出し法）

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

B

$\Leftrightarrow$ $\vec{x}=\vec{0}$ つまり $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_4+x_5=0 \\ x_3-x_4+2x_5=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 2 2

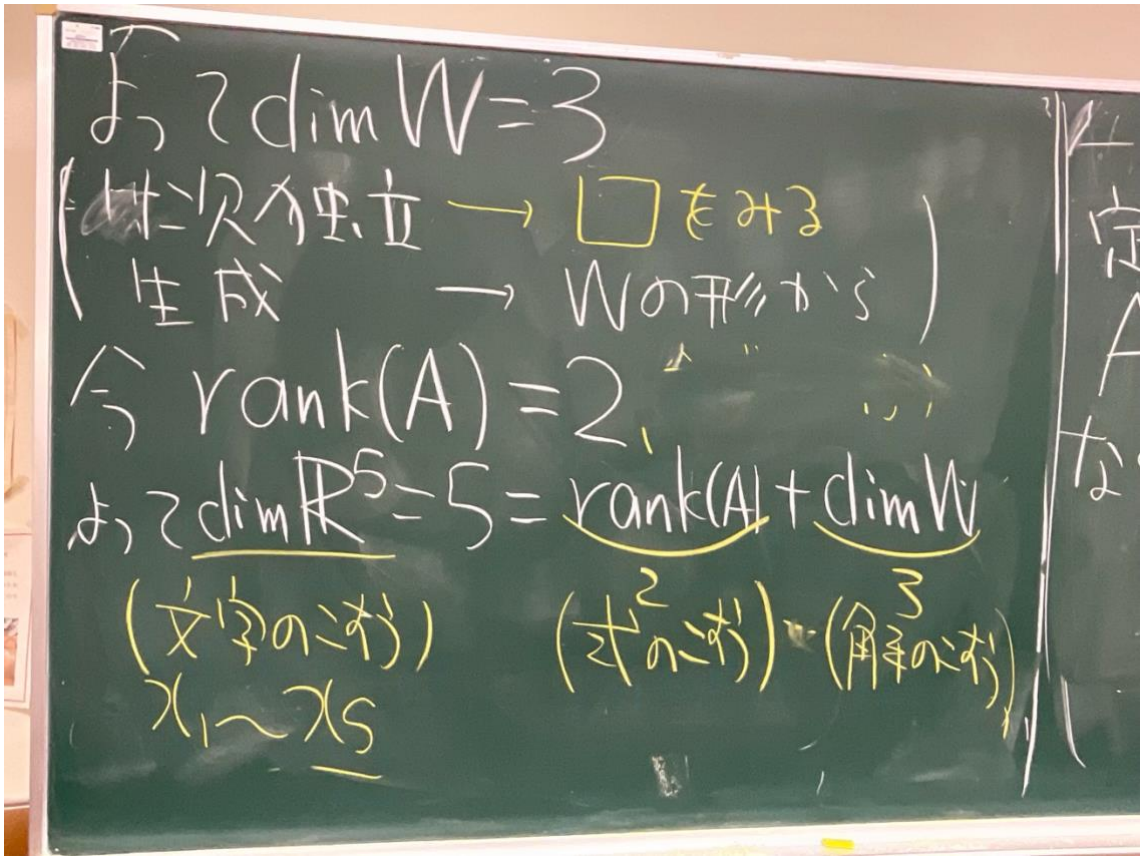
よって $W=\left\{ c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

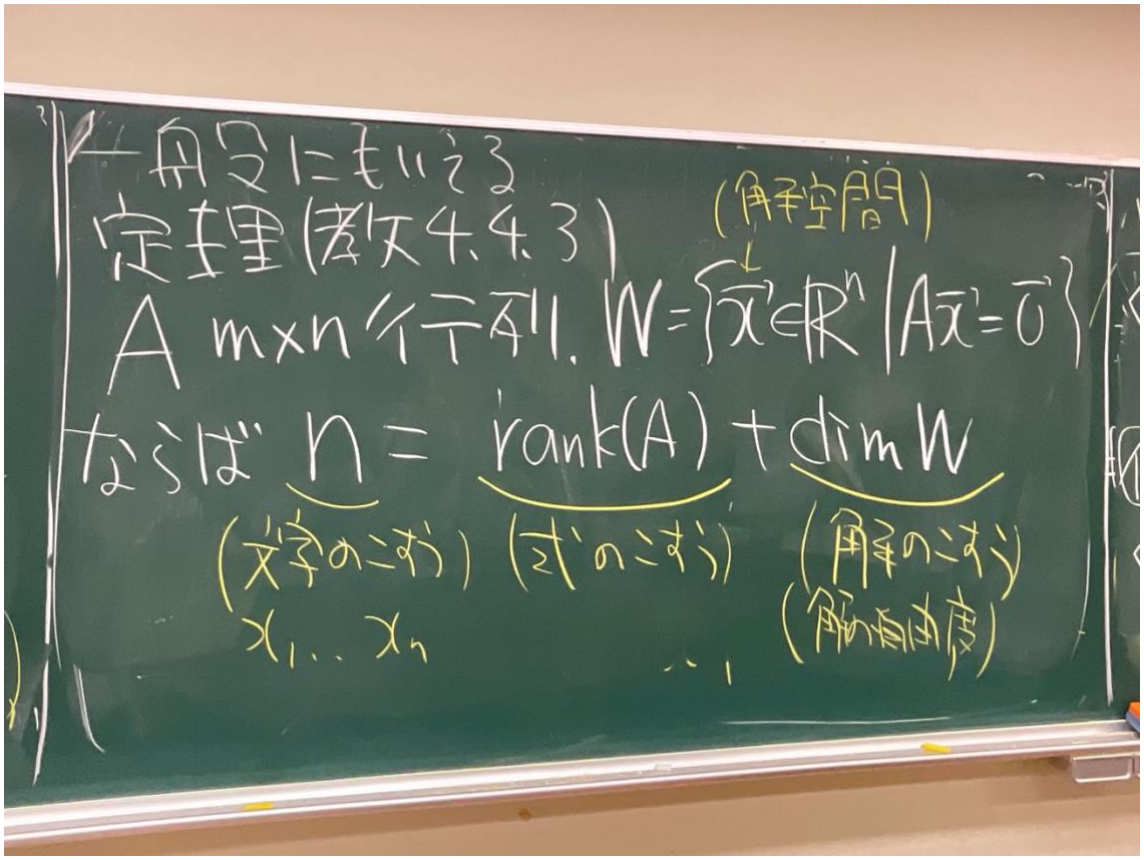
基底

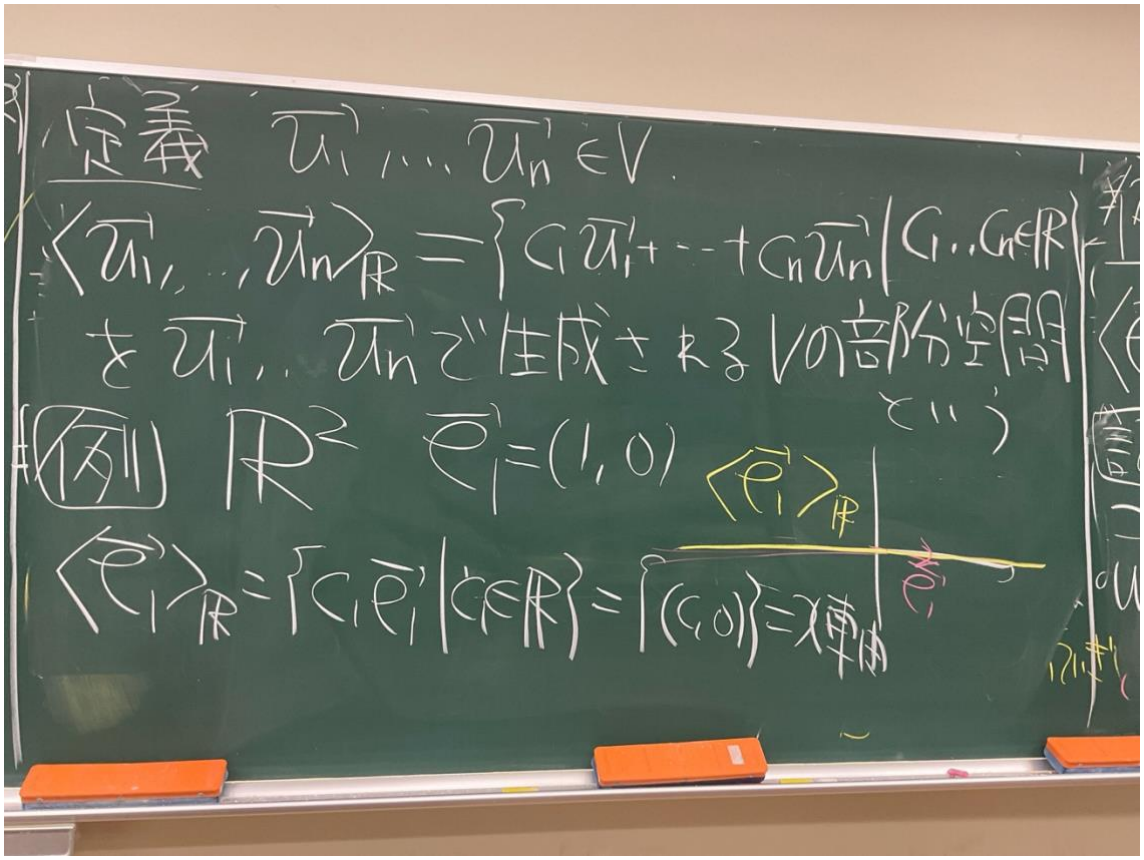
$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

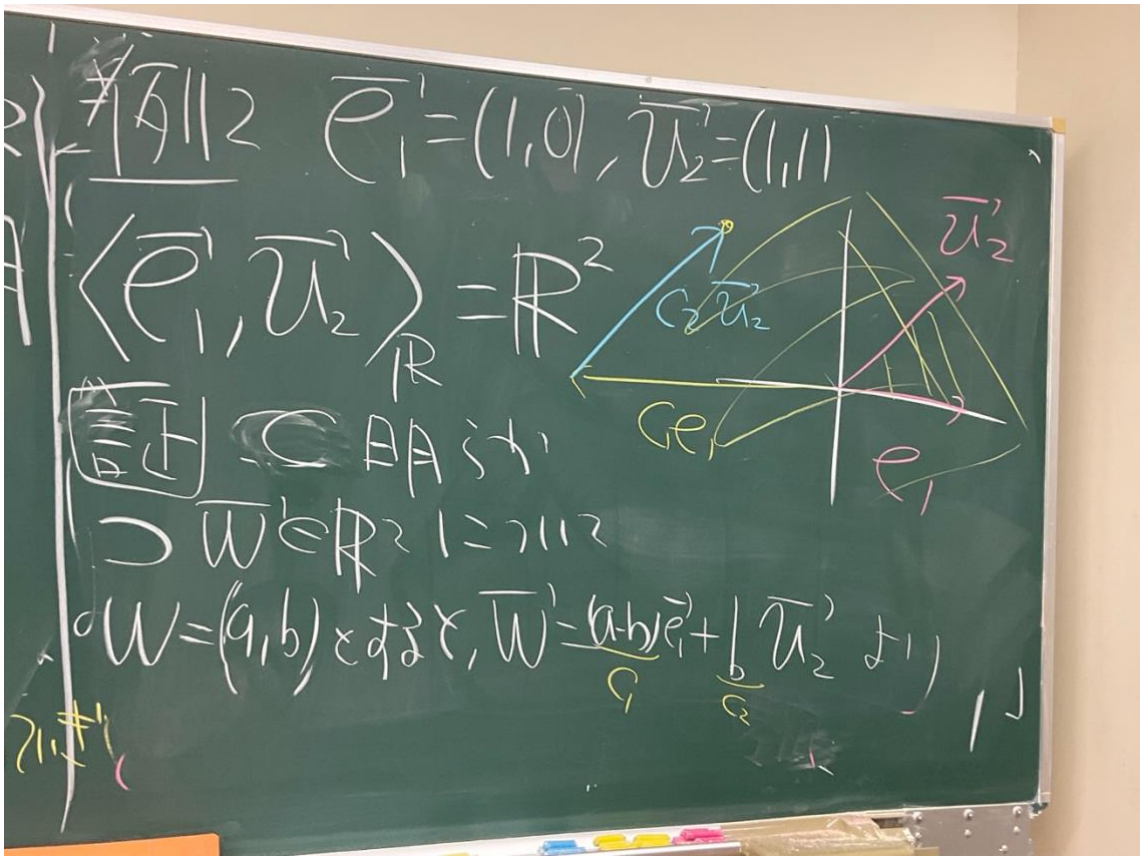
3次元

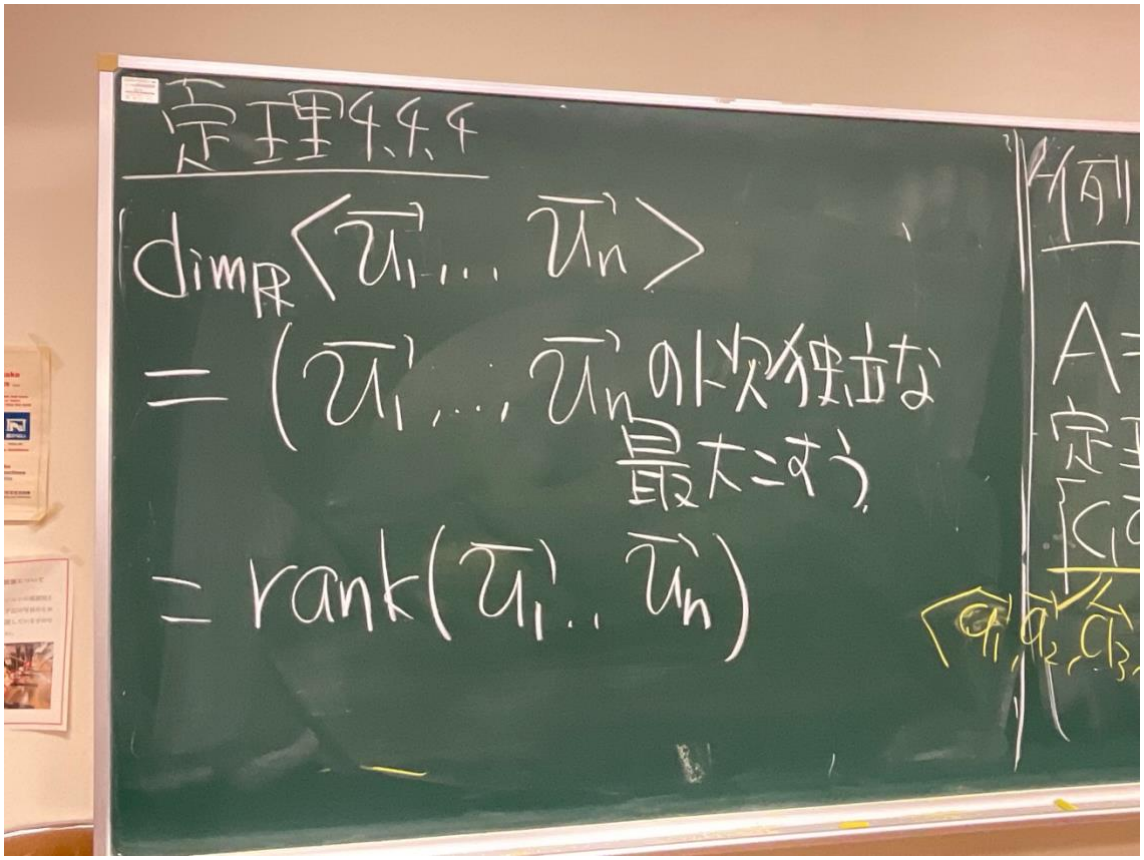
(3つ)

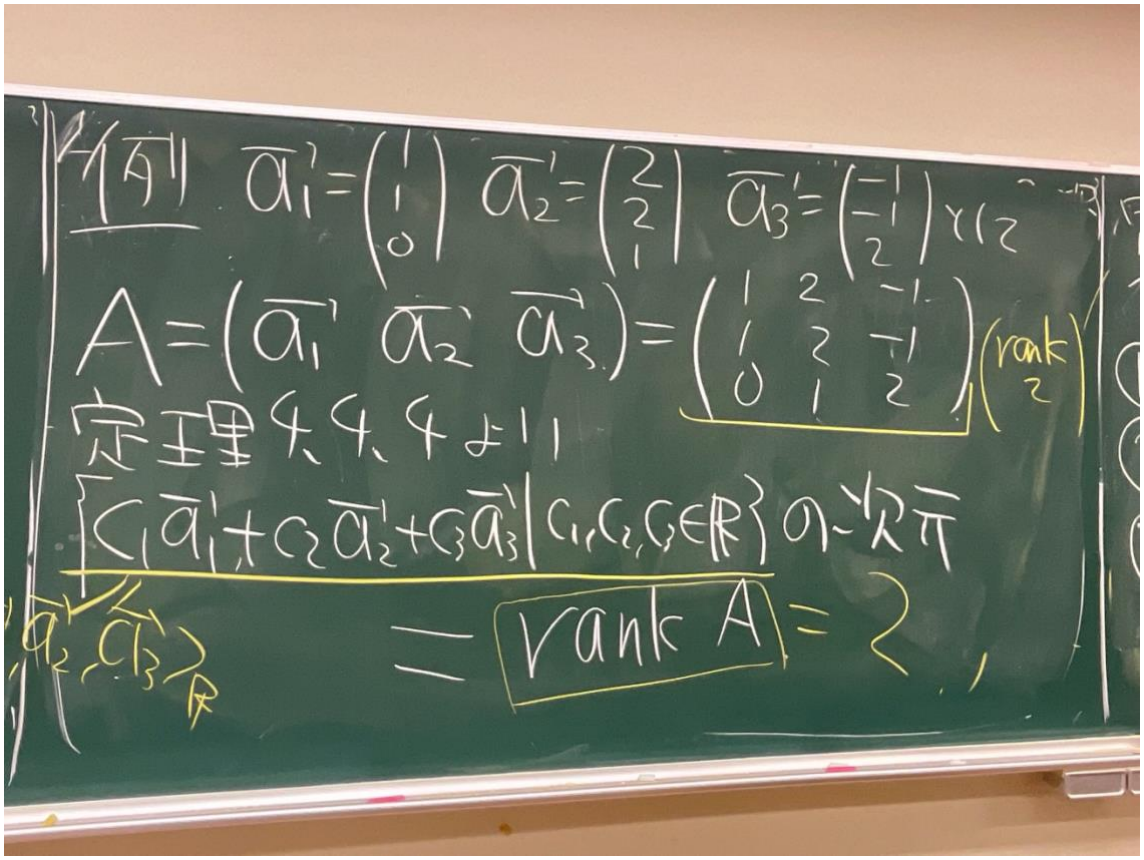

よって dim W = 3
(1次独立 → □をみる
生成 → Wの形から)
今 rank(A) = 2,
よって dim ℝ⁵ = 5 = rank(A) + dim W
(文字の次) (式の次) (解の次)
x₁〜x₅

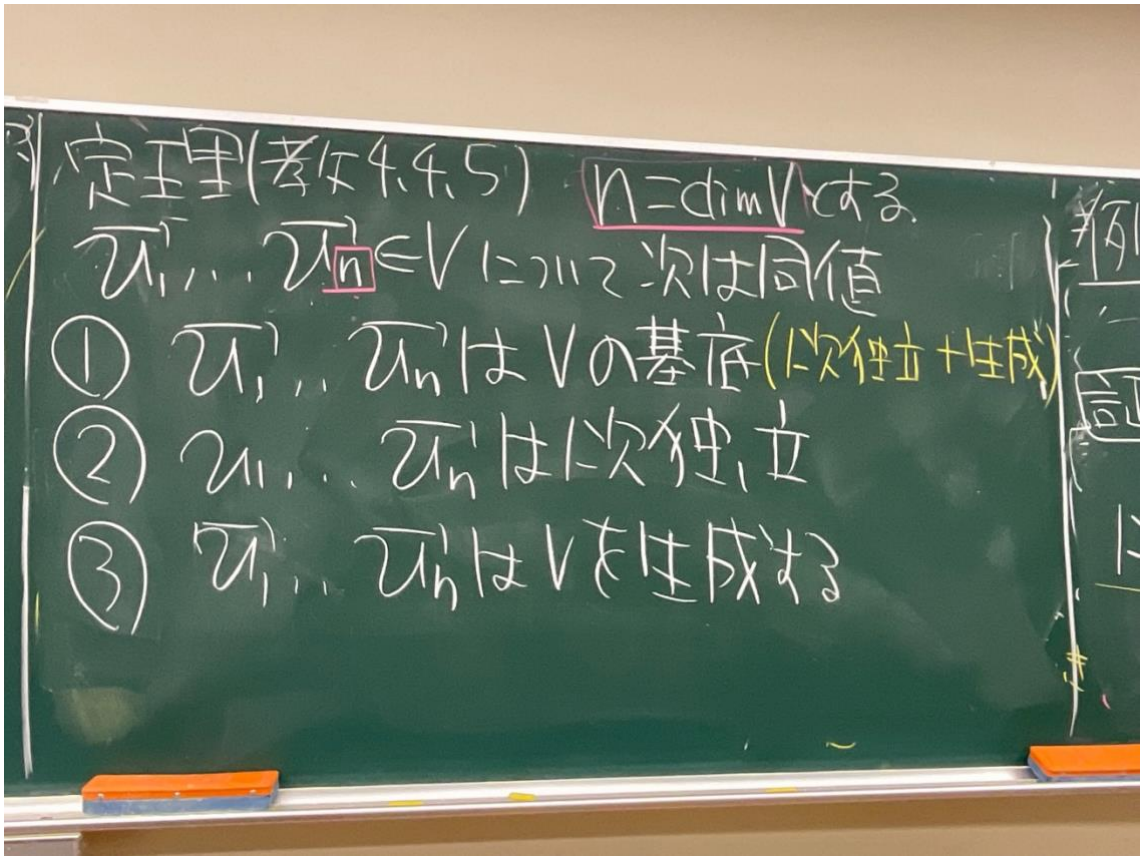

一般にもいえる
定理(例文4.4.3)
A m×n行列. W = {x⃗ ∈ ℝⁿ | Ax⃗ = 0⃗} (解空間)
ならば n = rank(A) + dim W
(文字の次) (式の次) (解の自由度)
x₁ … xₙ

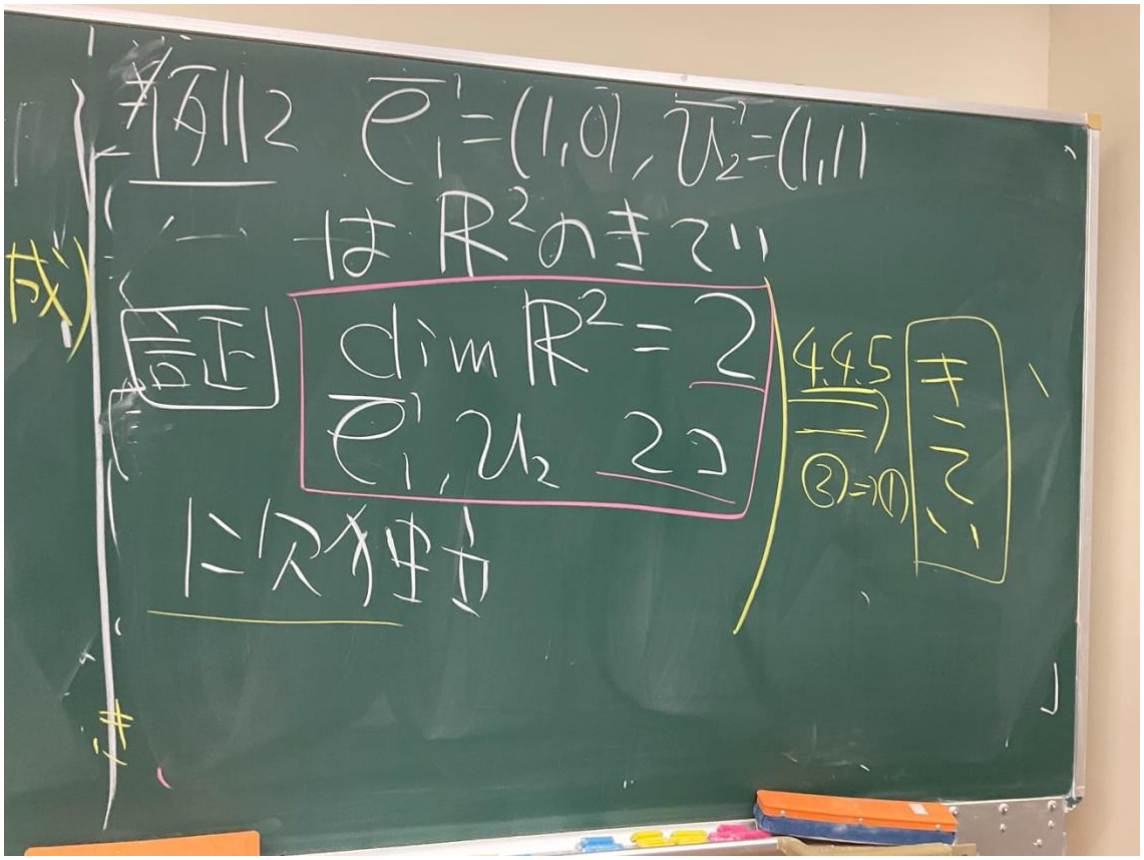

定義 $\vec{v_1}, \cdots \vec{v_n} \in V$
$\langle \vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n} \rangle_{\mathbb{R}} = \{ c_1\vec{v_1} + \cdots + c_n\vec{v_n} \mid c_1 \cdots c_n \in \mathbb{R} \}$
$\vec{v_1} \cdots \vec{v_n}$ で生成される V の部分空間
という
例 $\mathbb{R}^2$ $\vec{e_1} = (1, 0)$
$\langle \vec{e_1} \rangle_{\mathbb{R}} = \{ c_1\vec{e_1} \mid c_1 \in \mathbb{R} \} = \{ (c_1, 0) \}$ x軸
$\langle \vec{e_1} \rangle_{\mathbb{R}}$
$\vec{e_1}$

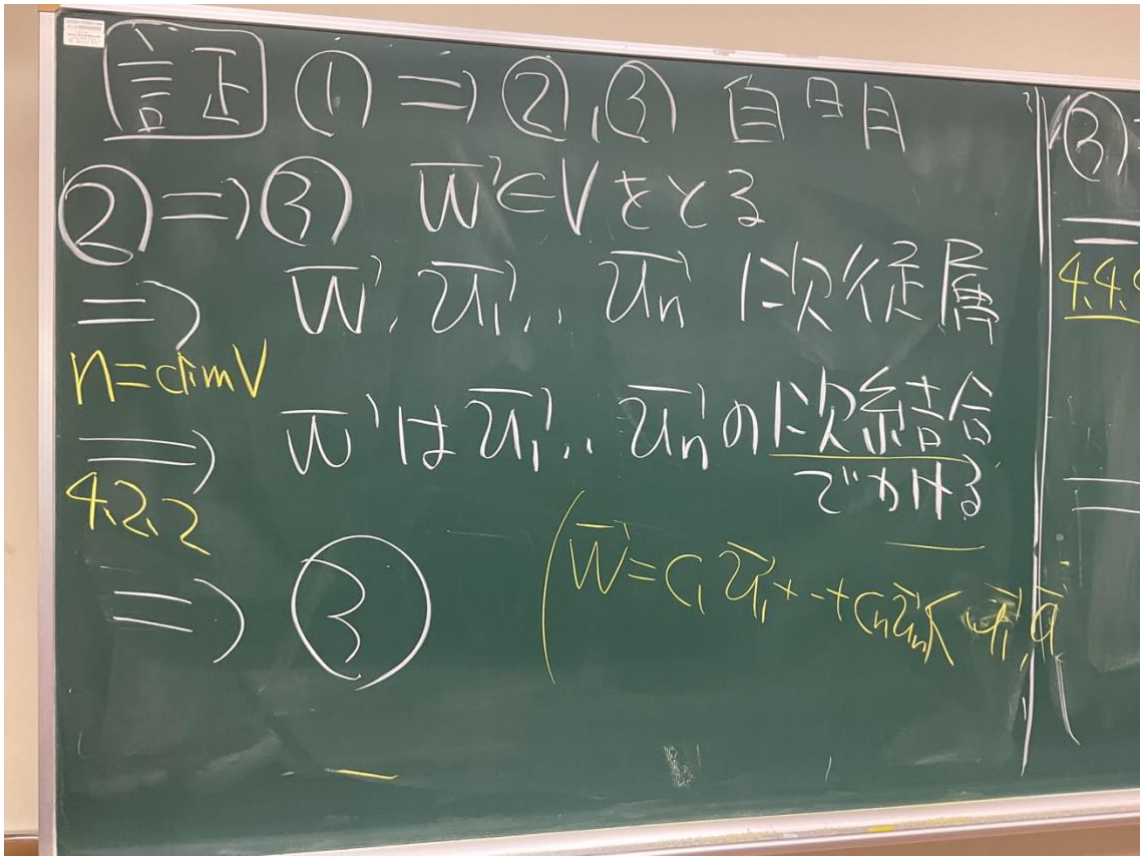

例2 $\vec{e_1} = (1, 0)$, $\vec{v_2} = (1, 1)$
$\langle \vec{e_1}, \vec{v_2} \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$
証明 $\subset$ 明らか
$\supset$ $w \in \mathbb{R}^2$ について
$w = (a, b)$ とおくと, $\vec{w} = \frac{a-b}{c_1}\vec{e_1} + \frac{b}{c_2}\vec{v_2}$ より
$\vec{v_2}$
$c_2\vec{v_2}$
$c\vec{e_1}$
$\vec{e_1}$

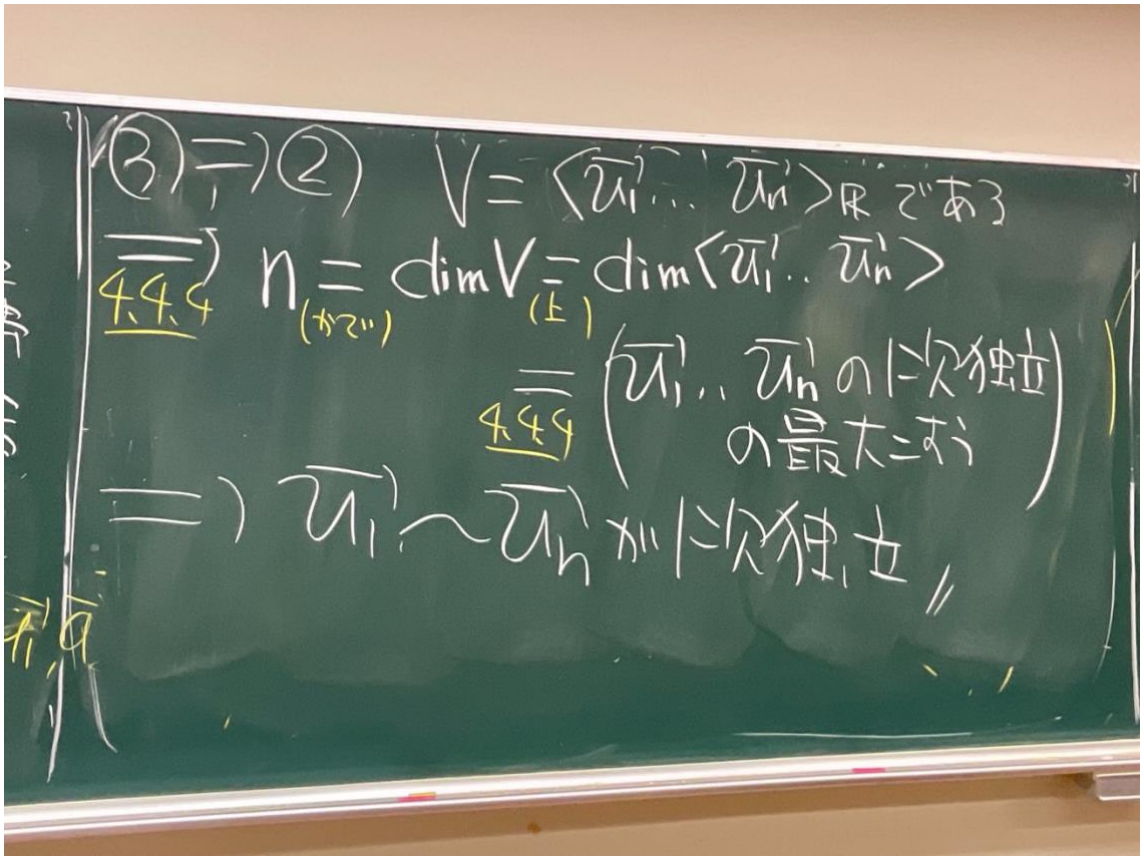

定理4.4.4
$\dim_{\mathbb{R}}\langle \vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n \rangle$
$= (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n$の1次独立な最大こすう
$= \mathrm{rank}(\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n)$

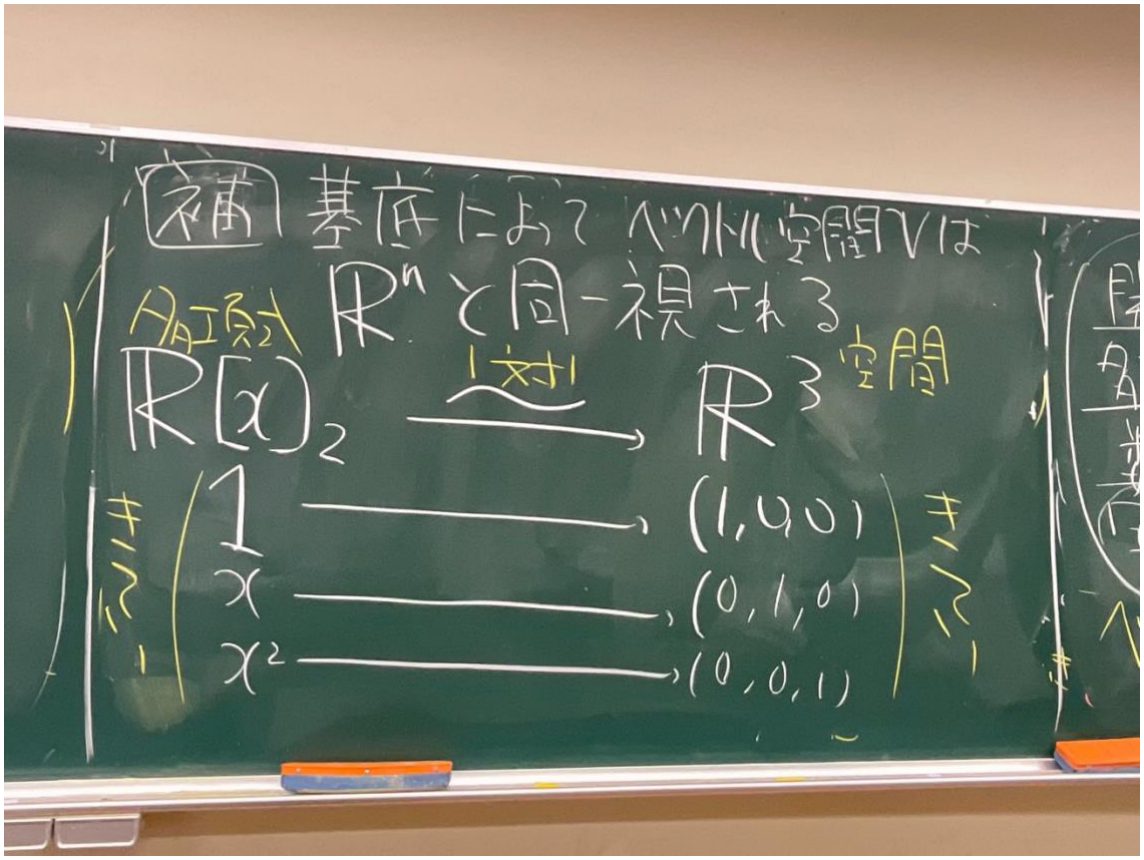

例 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{a}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ 1次1
$A=(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&2&2\\1&1&2\end{pmatrix}$ rank 2
定理4.4.4より
$\{c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+c_3\vec{a}_3 \mid c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\}$ の1次元
$=$ rank $A=2$

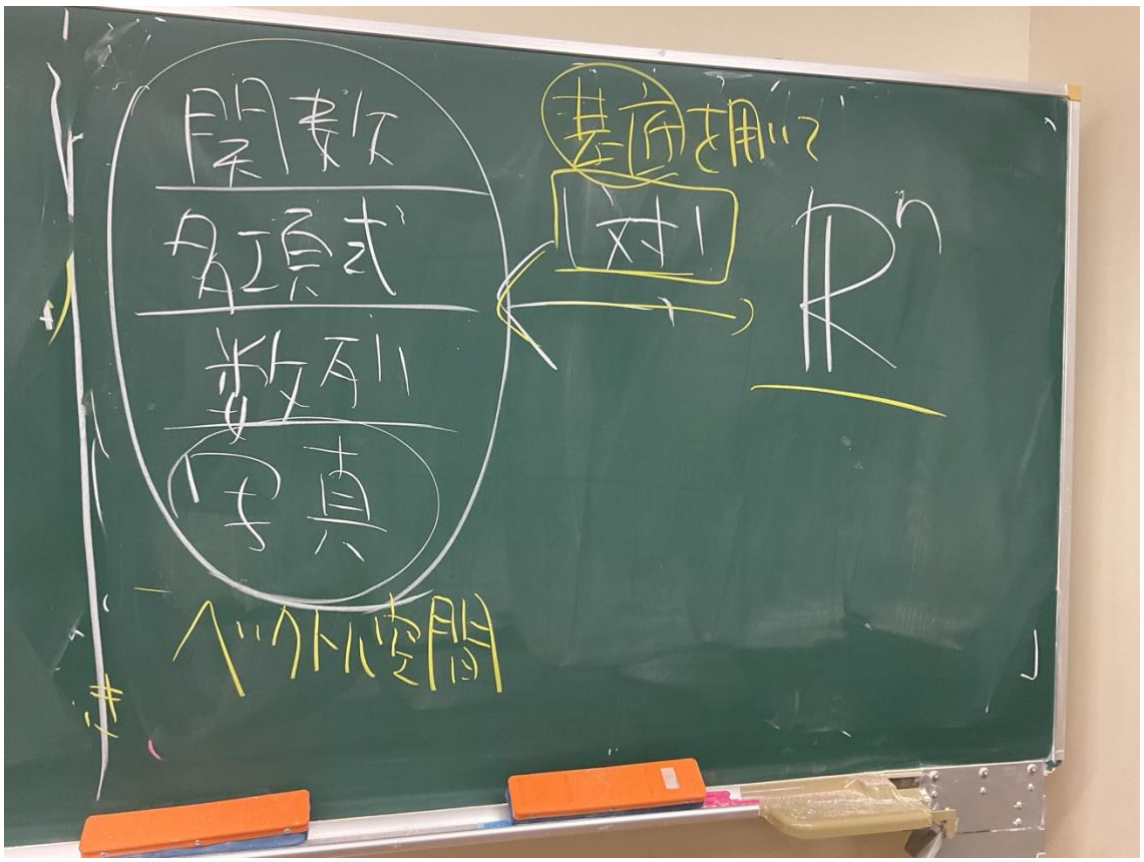

定理(系4.4.5) $n=\dim V$とする.
$\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n \in V$について次は同値
① $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$はVの基底(1次独立+生成)
② $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$は1次独立
③ $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$はVを生成する


例12 $\vec{e}_1=(1,0)$, $\vec{v}_2=(1,1)$
は$\mathbb{R}^2$のきてい
同値
$\dim \mathbb{R}^2=2$
$\vec{e}_1,\vec{v}_2$ 2コ
1次独立
4.4.5
③=①
キマリ


(注) ① ⇒ ②, ③ 自明
② ⇒ ③ $\vec{w} \in V$ をとる
$\vec{w}, \vec{v_1}, \cdots \vec{v_n}$ は一次従属
$n = \dim V$
$\vec{w}$ は $\vec{v_1}, \cdots \vec{v_n}$ の一次結合でかける
4.2.2
③
$\vec{w} = c_1\vec{v_1} + \cdots + c_n\vec{v_n}$


③ ⇒ ② $V = \langle \vec{v_1} \cdots \vec{v_n} \rangle_{\mathbb{R}}$ である
4.4.4
$n = \dim V$ (上) $= \dim \langle \vec{v_1} \cdots \vec{v_n} \rangle$
4.4.9
$\vec{v_1} \cdots \vec{v_n}$ の一次独立の最大個数
$\vec{v_1} \sim \vec{v_n}$ は一次独立


補題 基底によってベクトル空間Vは
$\mathbb{R}^n$と同一視される
1対1
同型対応
$\mathbb{R}[x]_2$
$\cong$
$\mathbb{R}^3$空間
キベクトル
1
x
x^2
(1,0,0)
(0,1,0)
(0,0,1)
キベクトル


関数
多項式
数列
写真
ベクトル空間
基底を用いて
1対1
$\mathbb{R}^n$