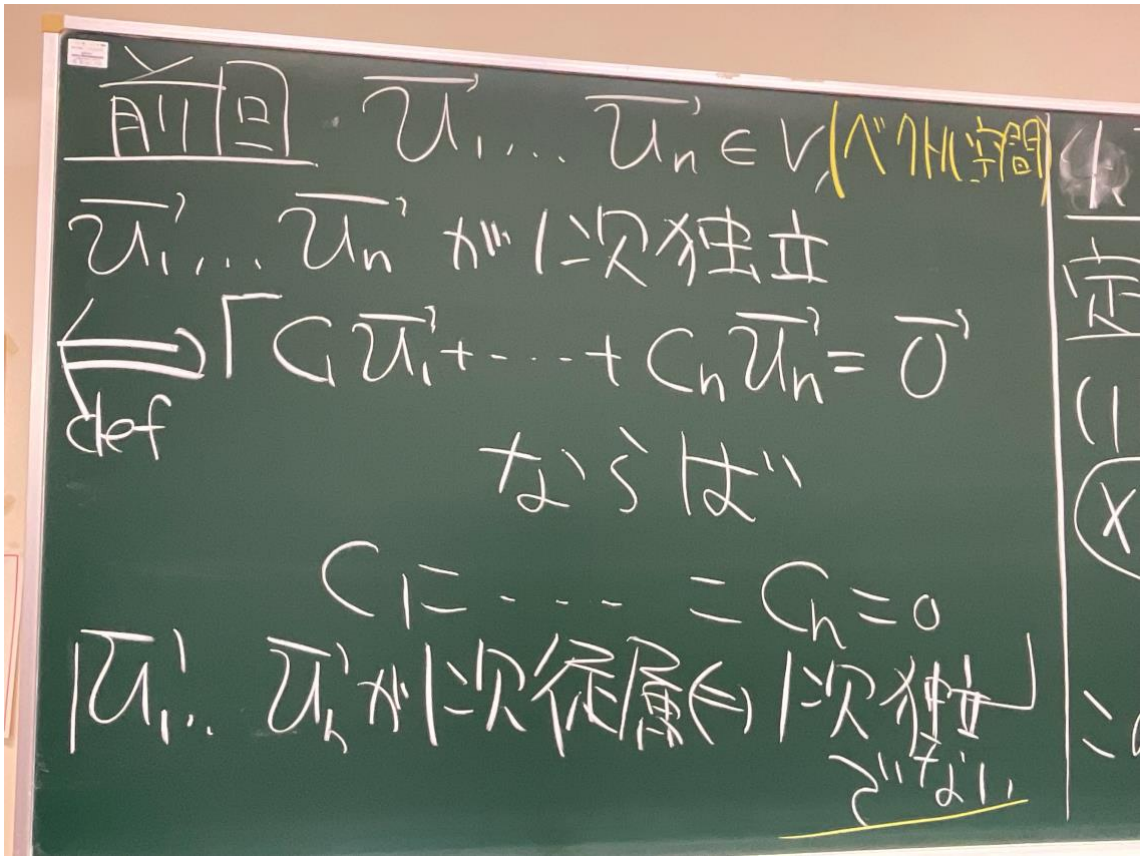
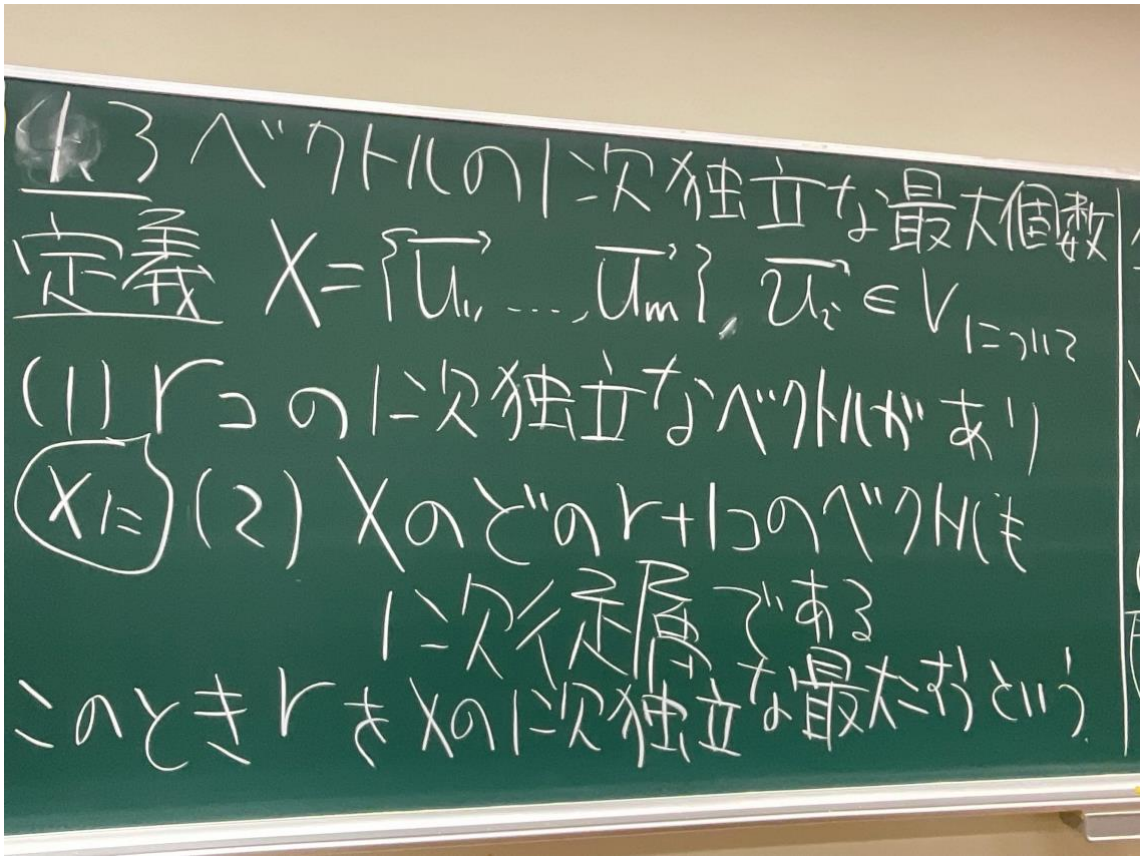
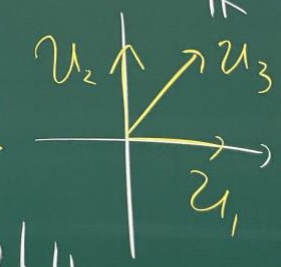

前回 $\vec{v_1},\dots\vec{v_n}\in V$ (ベクトル空間)
$\vec{v_1},\dots\vec{v_n}$ が1次独立
$\Longleftrightarrow$ def 「$c_1\vec{v_1}+\cdots+c_n\vec{v_n}=\vec{0}$
ならば
$c_1=\cdots=c_n=0$
「$\vec{v_1},\dots\vec{v_n}$ が1次従属(=)1次独立
でない」


§3 ベクトルの1次独立な最大個数
定義 $X=\{\vec{v_1},\dots,\vec{v_m}\}$, $\vec{v_i}\in V$ について
(1) 「r コの1次独立なベクトルがあり
(2) Xのどの $r+1$ コのベクトルも
1次従属である」
このとき r を Xの1次独立な最大個数という

例 $\mathbb{R}^2 = V$

$\vec{v_1} = (1,0)$, $\vec{v_2} = (0,1)$, $\vec{v_3} = (1,1)$

$X = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ $m=2$



$r=2$になる

(1) 2つに次独立なベクトルは

(前回) $\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$

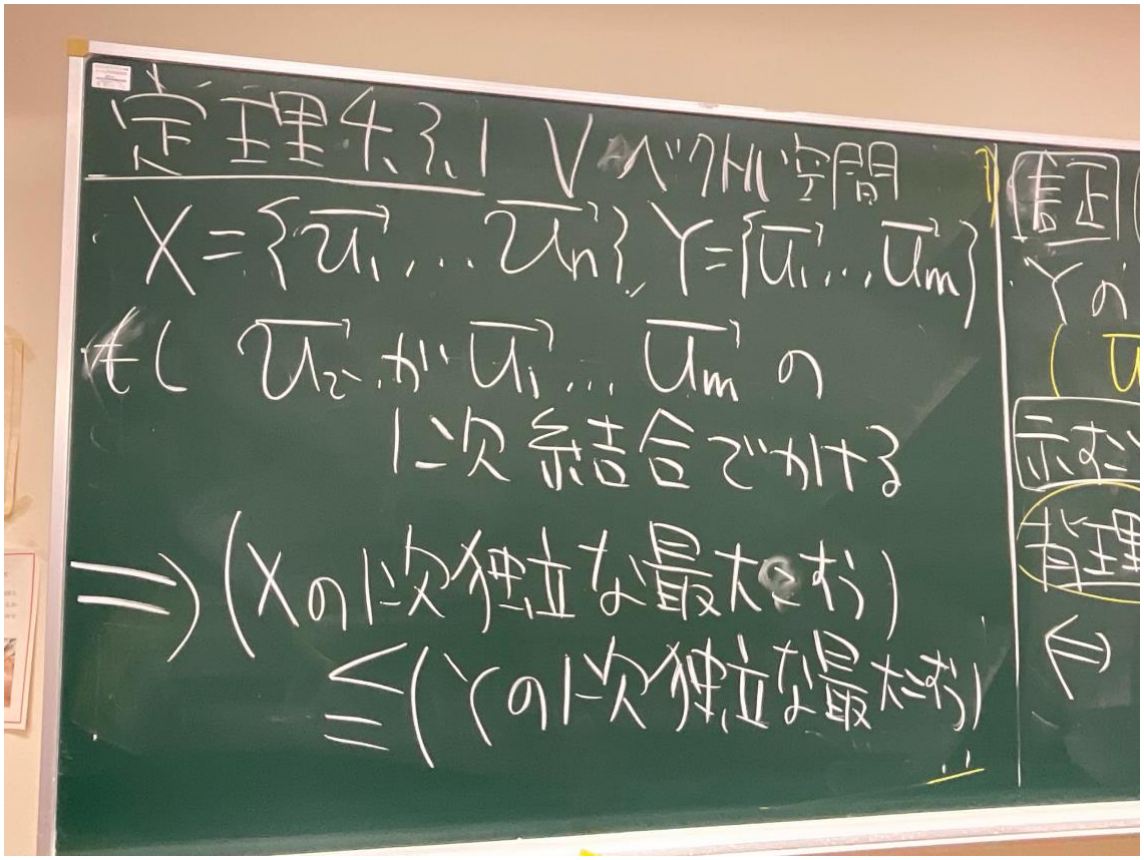
(2) Xの3つのベクトルは

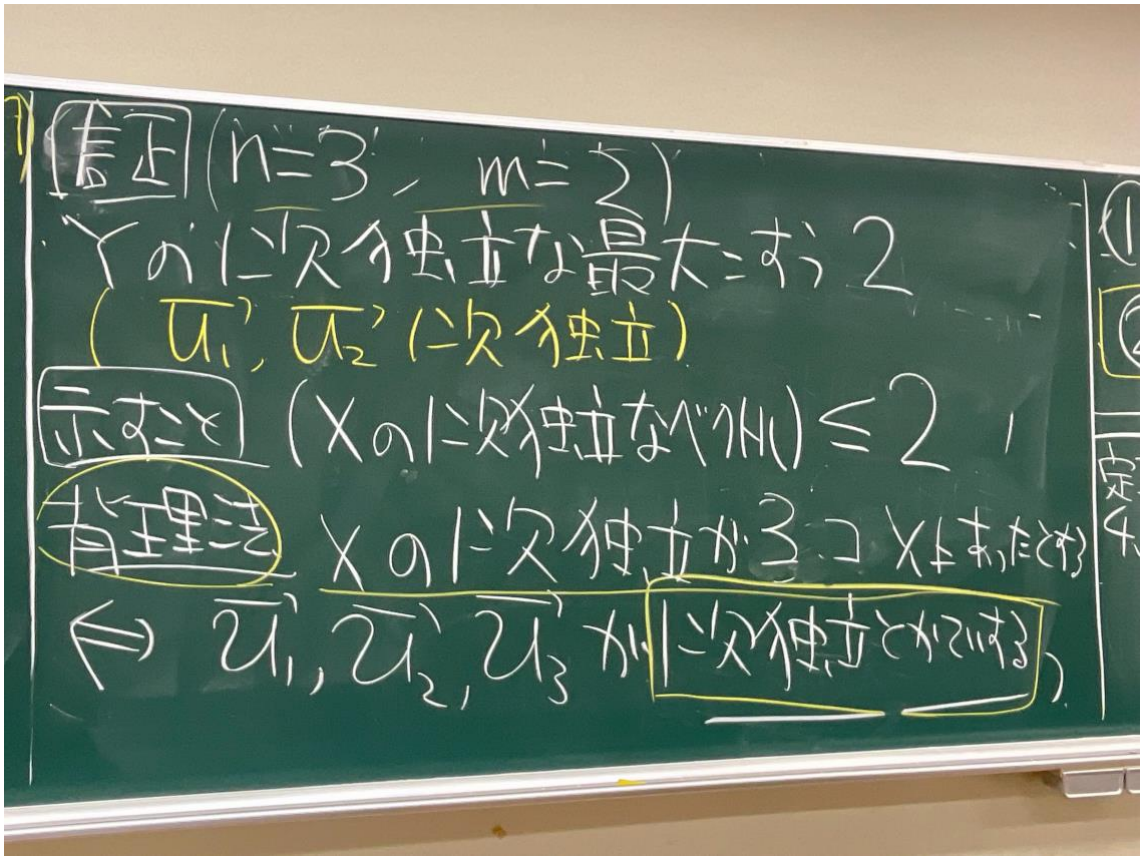
(前) $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ は1次従属.

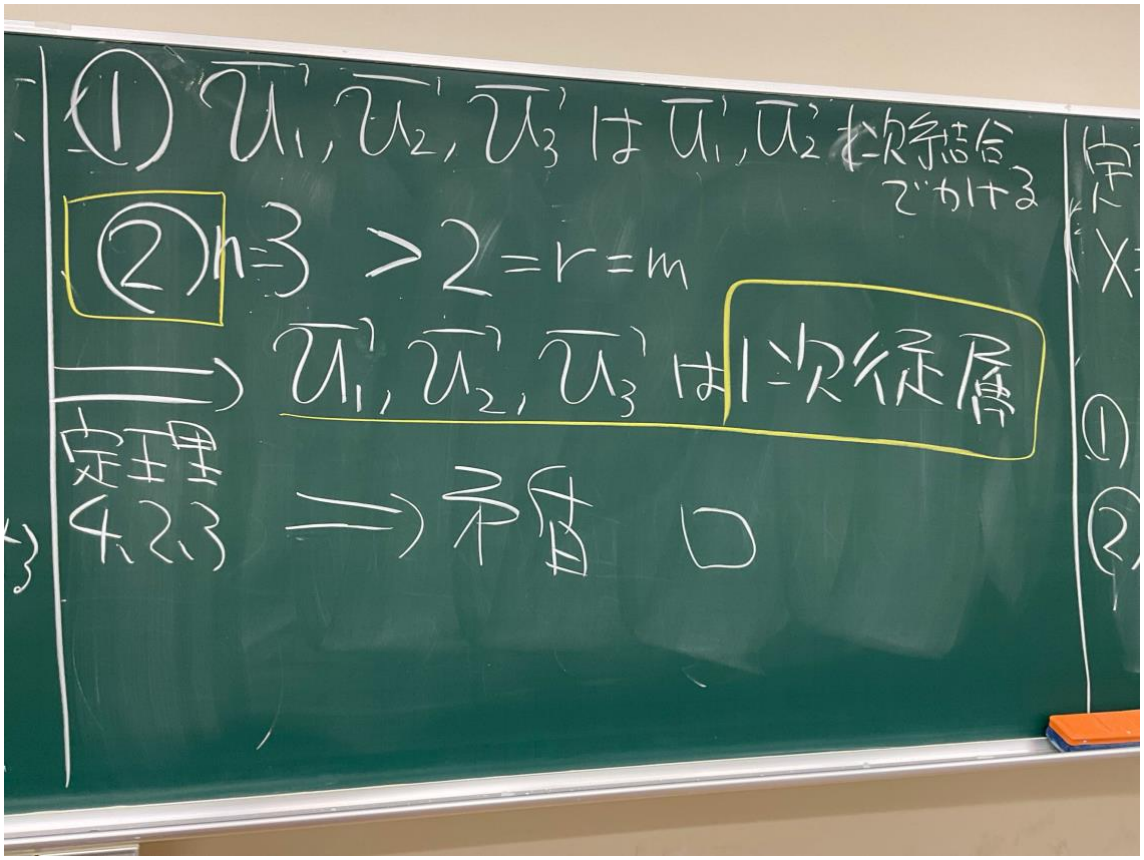
例 $\mathbb{R}^n = V$ ($n=2$ $\vec{v_1} = \vec{e_1}$, $\vec{v_2} = \vec{e_2}$)

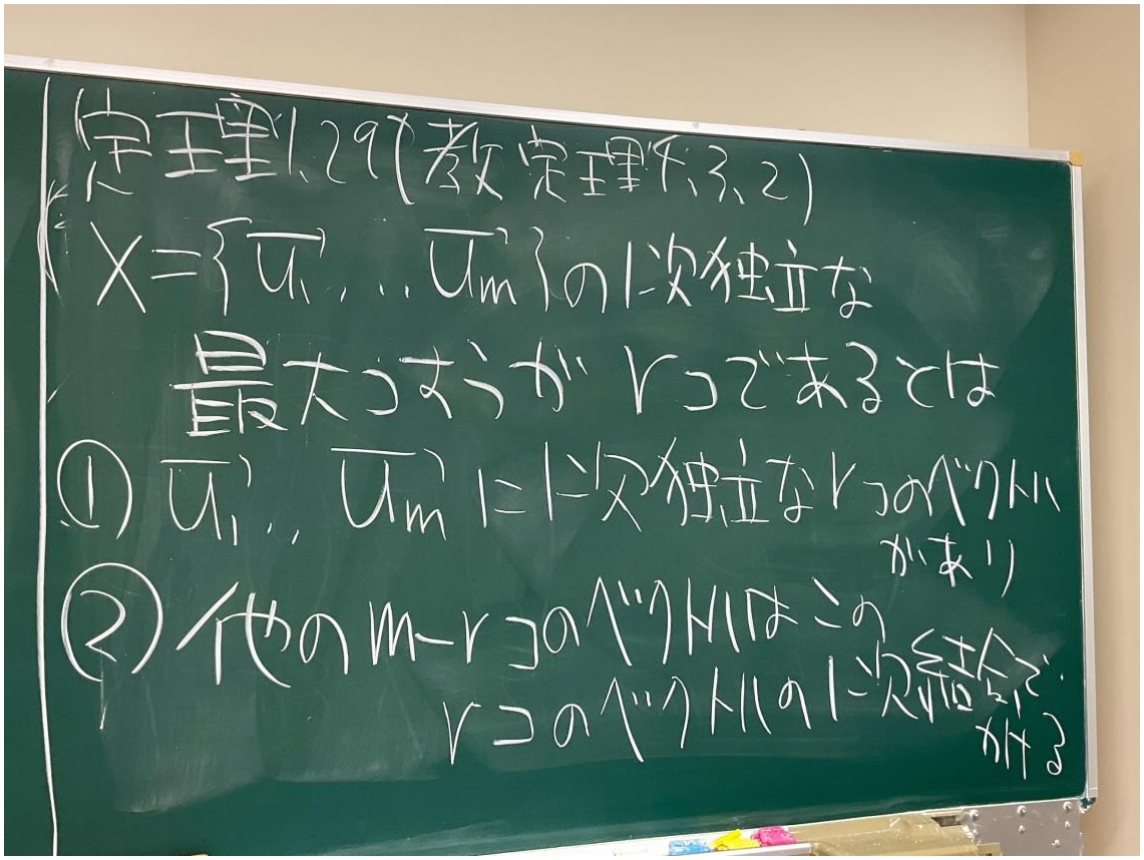
$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\cdots$ $\vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

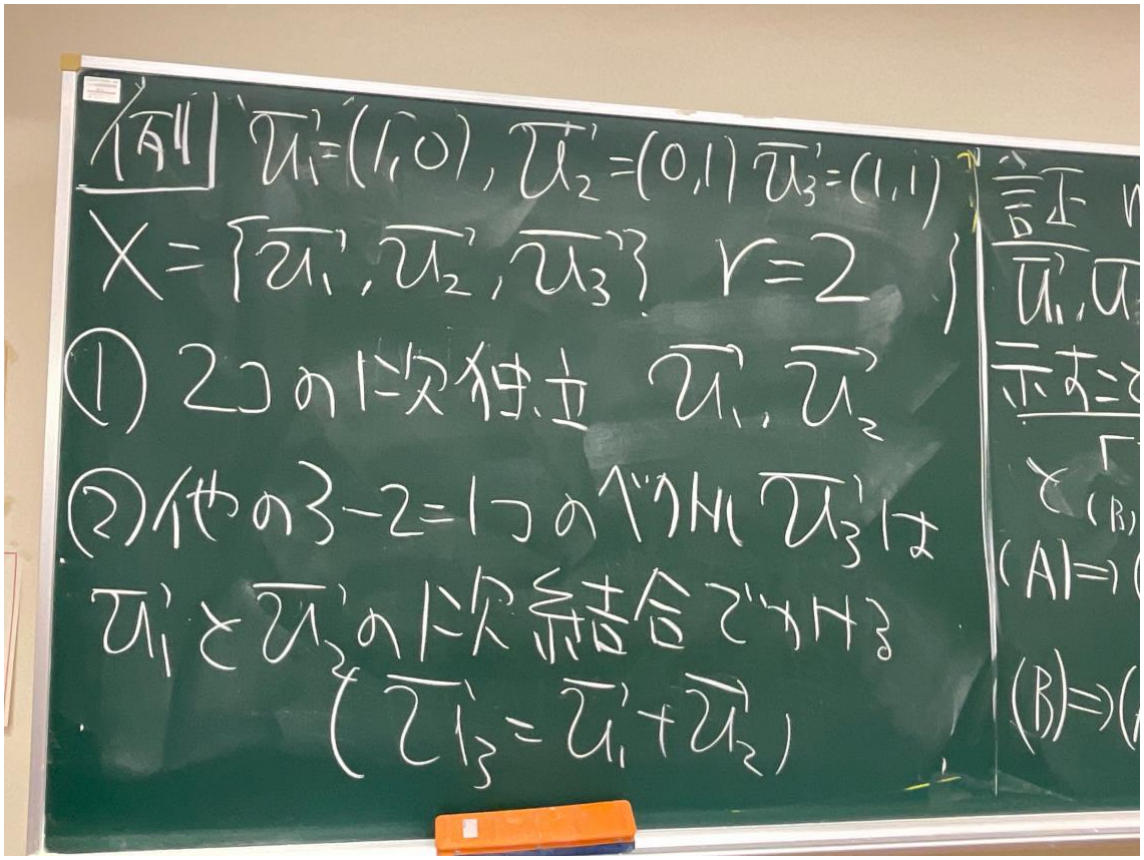
n個ある $X = \{\vec{e_1}, \cdots \vec{e_n}\}$ とおくと $r=n$,

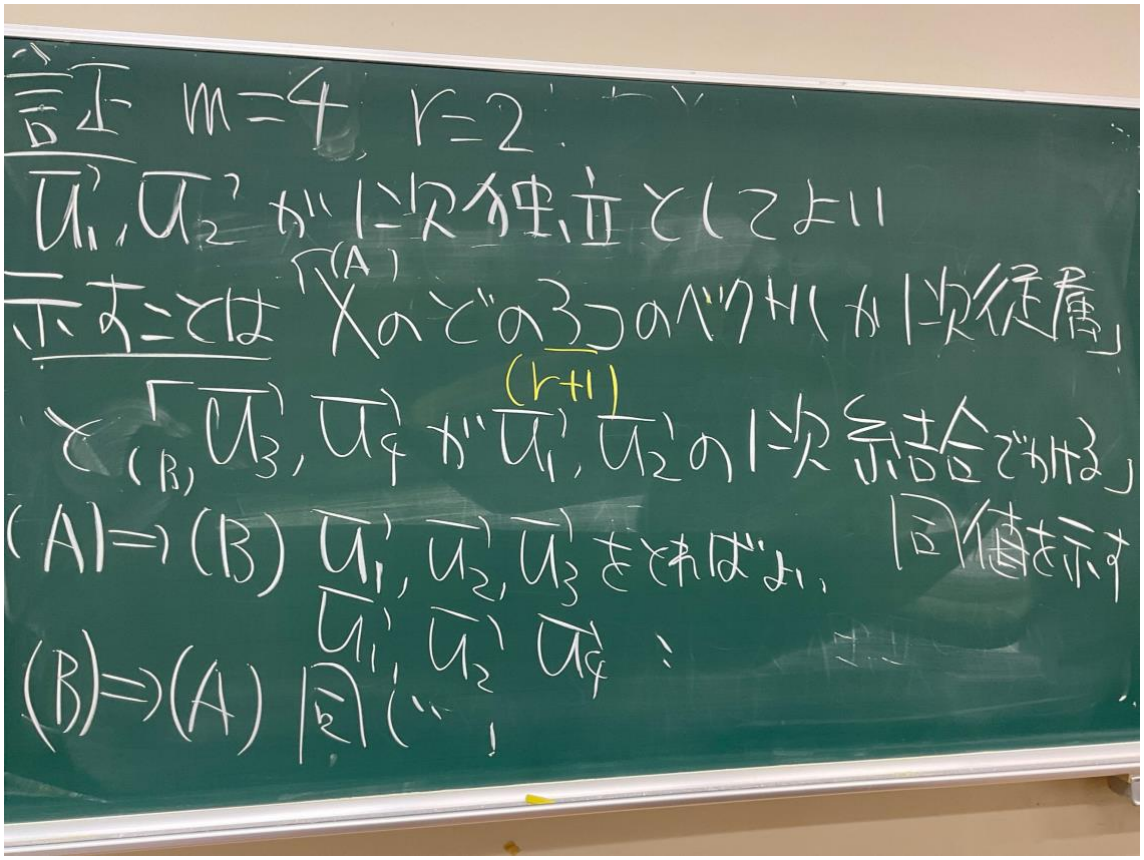

定理4.3.1 Vベクトル空間
X={v1,...vn} Y={u1,...um}
もし vi が u1,...um の
1次結合でかける
⟹ (Xの1次独立な最大こま)
≦ (Yの1次独立な最大こま)

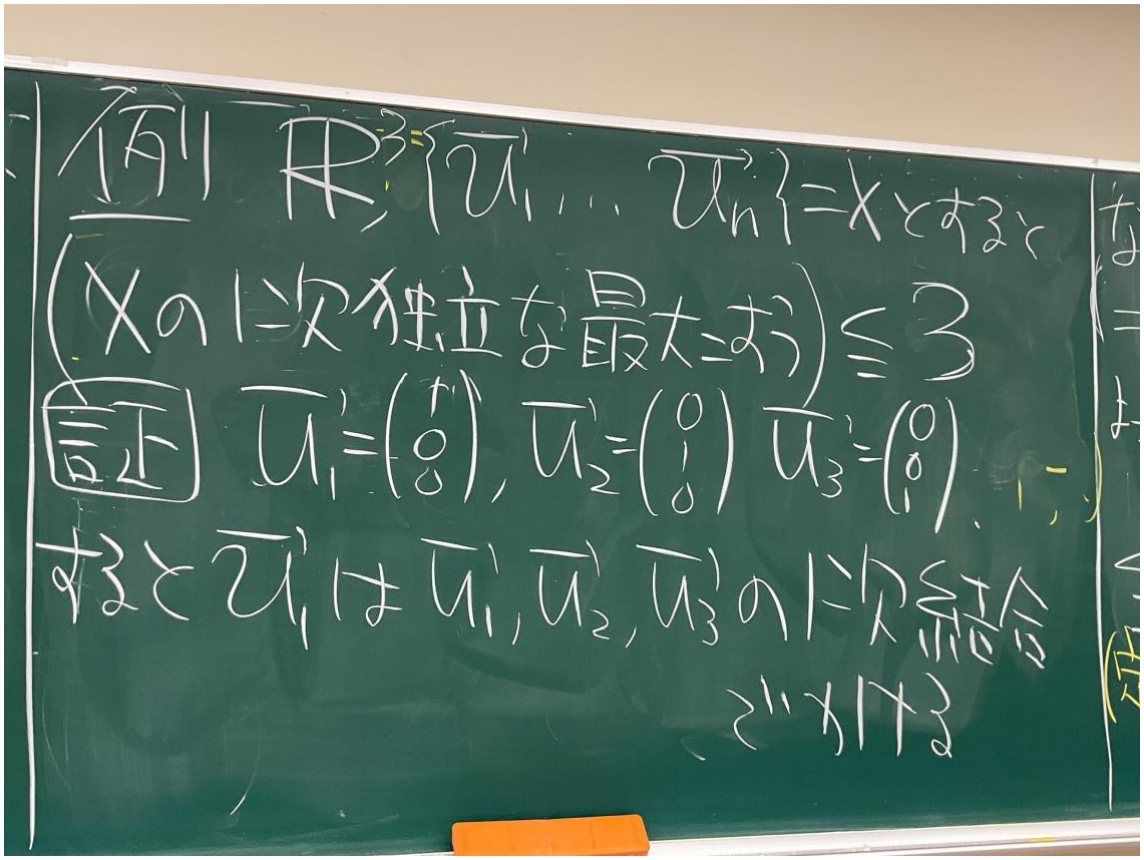

例 (n=3, m=2)
Yの1次独立な最大こま 2
(u1, u2 1次独立)
示すこと (Xの1次独立なベクトル) ≦ 2
背理法 Xの1次独立が3コ Xはまったく
⇔ v1, v2, v3 が1次独立とかける

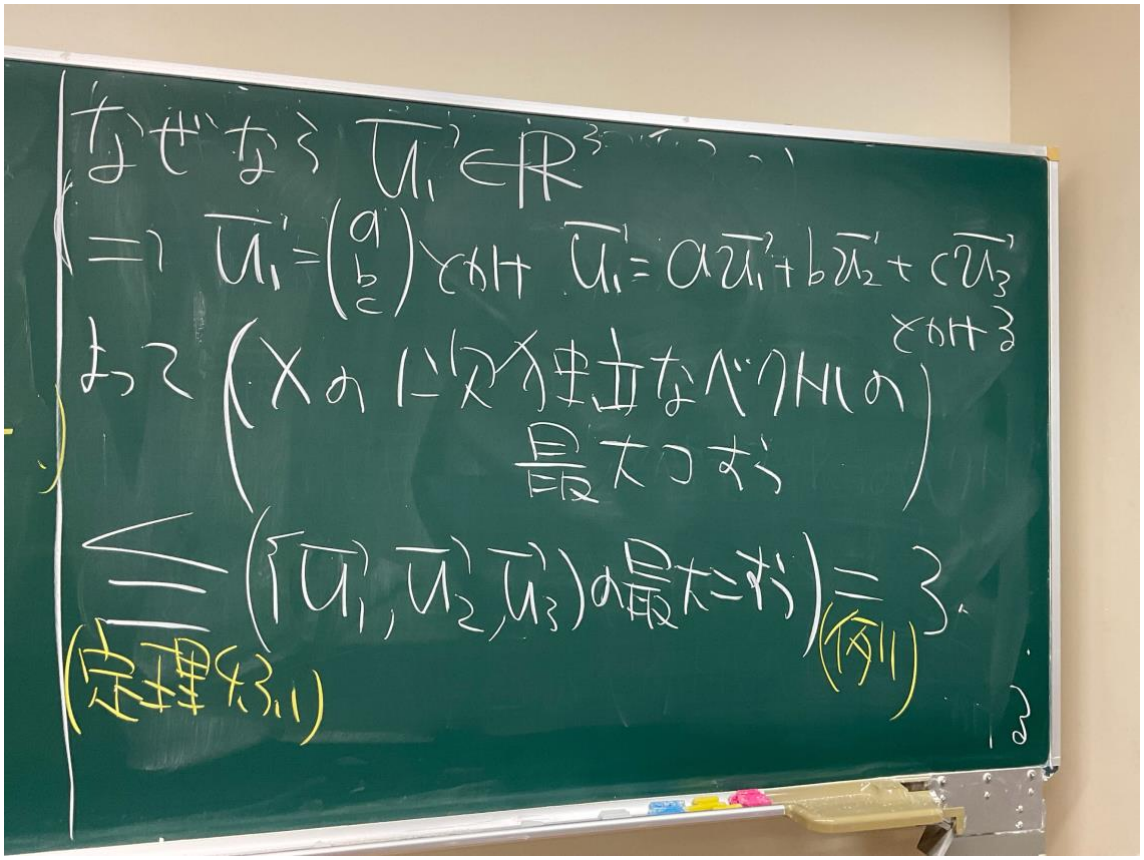

① $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ は $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ に次結合でかける
② $n=3 > 2=r=m$
$\Longrightarrow$ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ は1次従属
定理4.2.3 $\Longrightarrow$ 予告 □

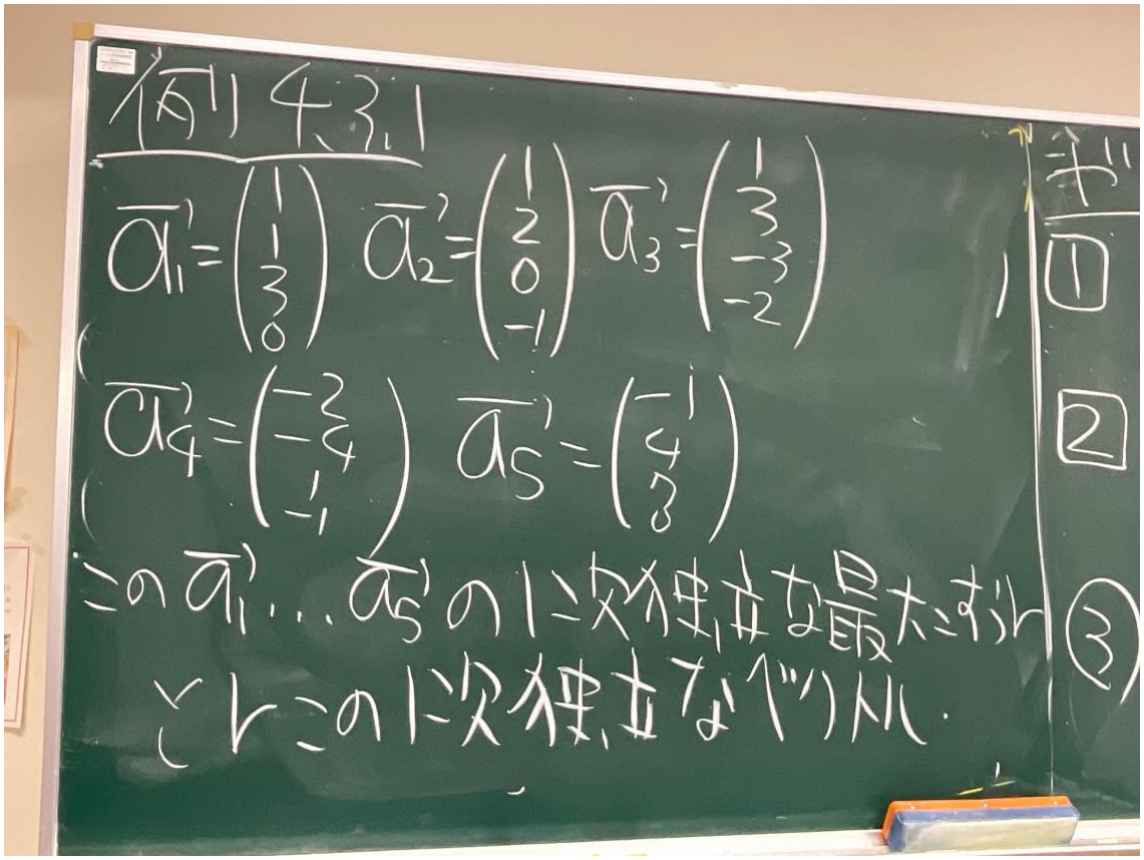

定理1.2.9(教定理4.3.2)
$X=\{\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_m\}$ の1次独立な
最大ベクトル数がrコであるとは
① $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_m$ に1次独立なrコのベクトルがあり
② 他のm-rコのベクトルはこのrコのベクトルの1次結合でかける

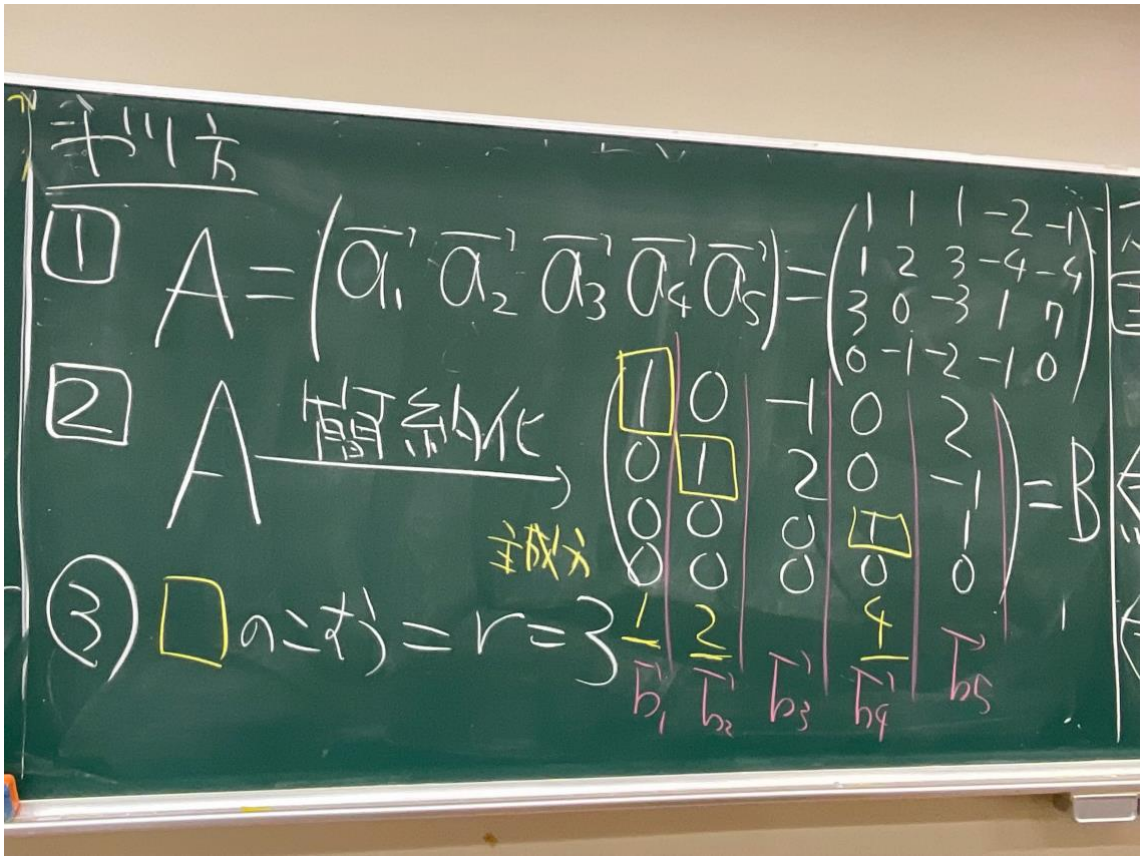

例 $\vec{v_1}=(1,0)$, $\vec{v_2}=(0,1)$ $\vec{v_3}=(1,1)$
$X=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\}$ $r=2$
① 2つの1次独立 $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$
② 他の3−2=1つのベクトル $\vec{v_3}$ は
$\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$ の1次結合でかける
$(\vec{v_3}=\vec{v_1}+\vec{v_2})$

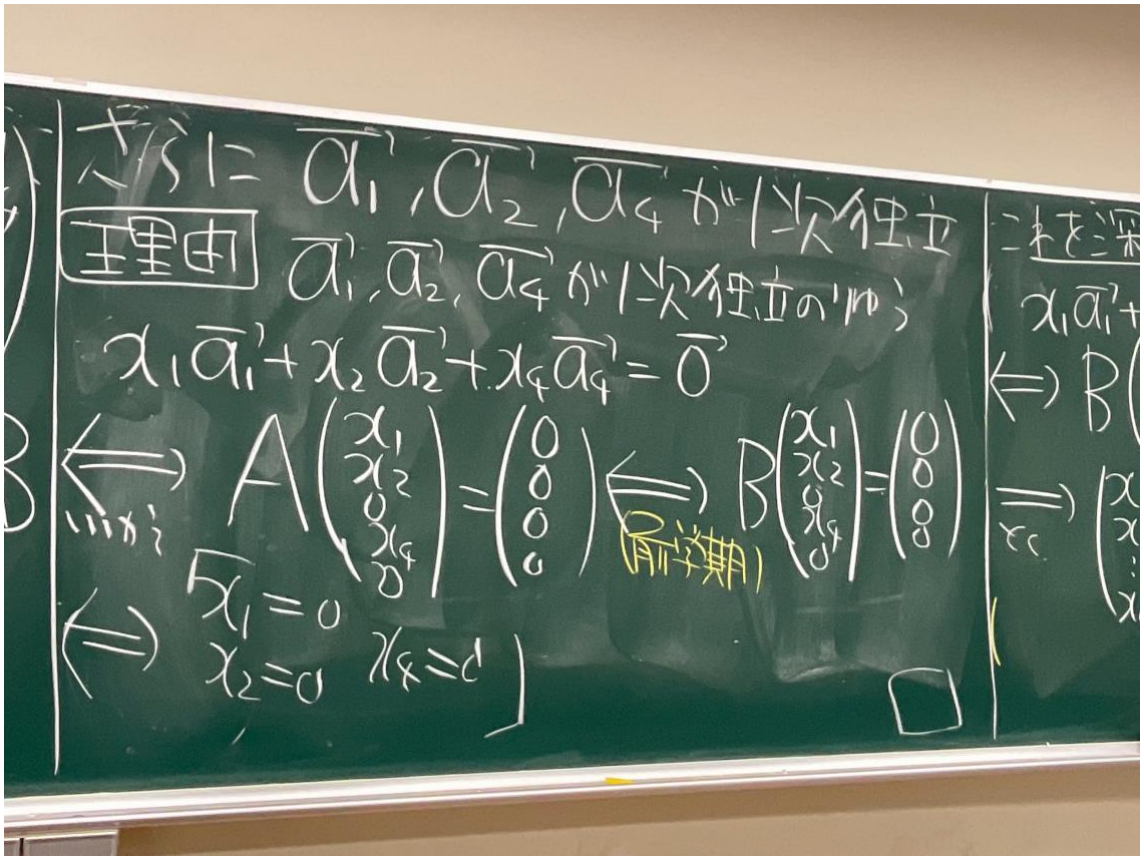

証 $m=4$, $r=2$
$\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ が1次独立としてよい
示すことは 「(A) Xのどの3つのベクトルが1次従属」
と (B)「$\vec{v_3}$, $\vec{v_4}$ が $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ の1次結合でかける」
(A)⇒(B) $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ をとればよい。同値を示す
(B)⇒(A) 同じ!
$\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ $\vec{v_4}$:
(r+1)

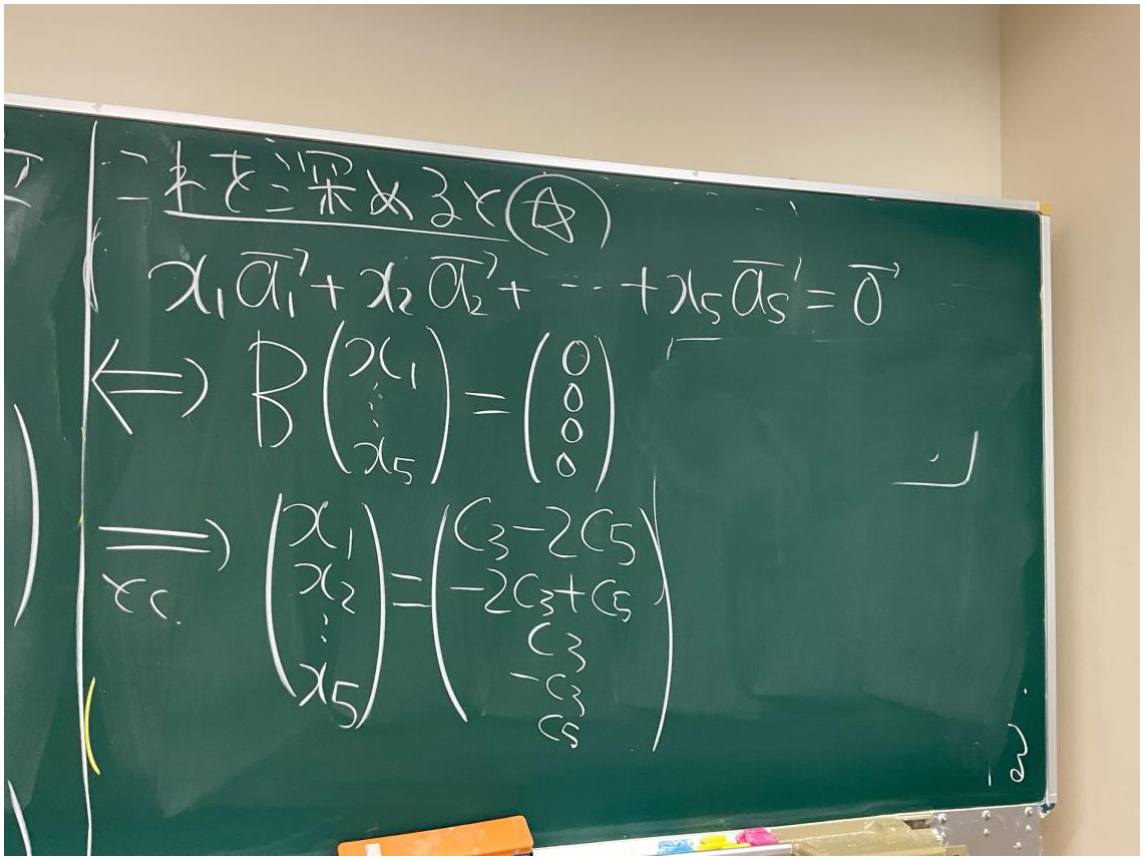

例 $\mathbb{R}^3$ $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\} = X$ とおくと
(X の1次独立な最大個数) ≤ 3
証 $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
すると $\vec{v}_i$ は $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ の1次結合
で表される

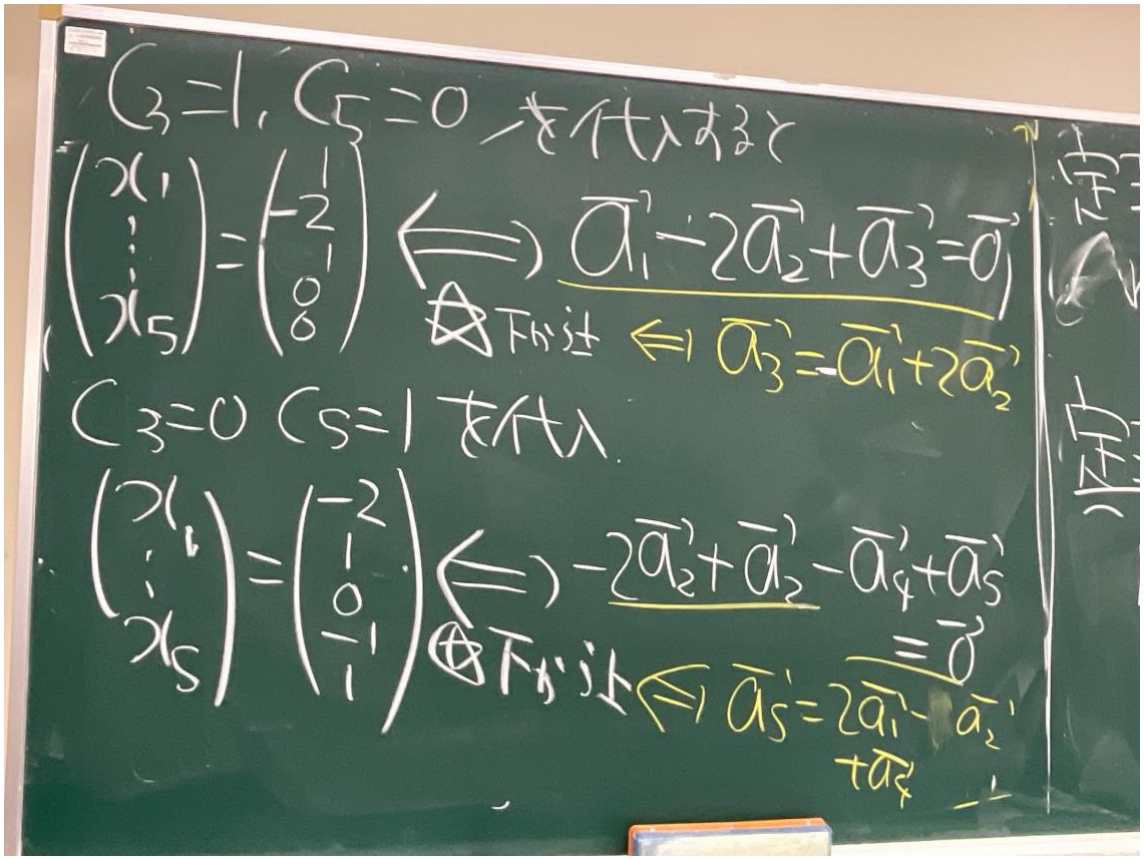

なぜなら $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^3$
$\Rightarrow$ $\vec{v}_i = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ とおけ $\vec{v}_i = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3$
とおける
よって (X の1次独立なベクトルの最大個数)
$\leq$ ($\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ の最大個数) $= 3$
(定理 5.1.1) (例1)

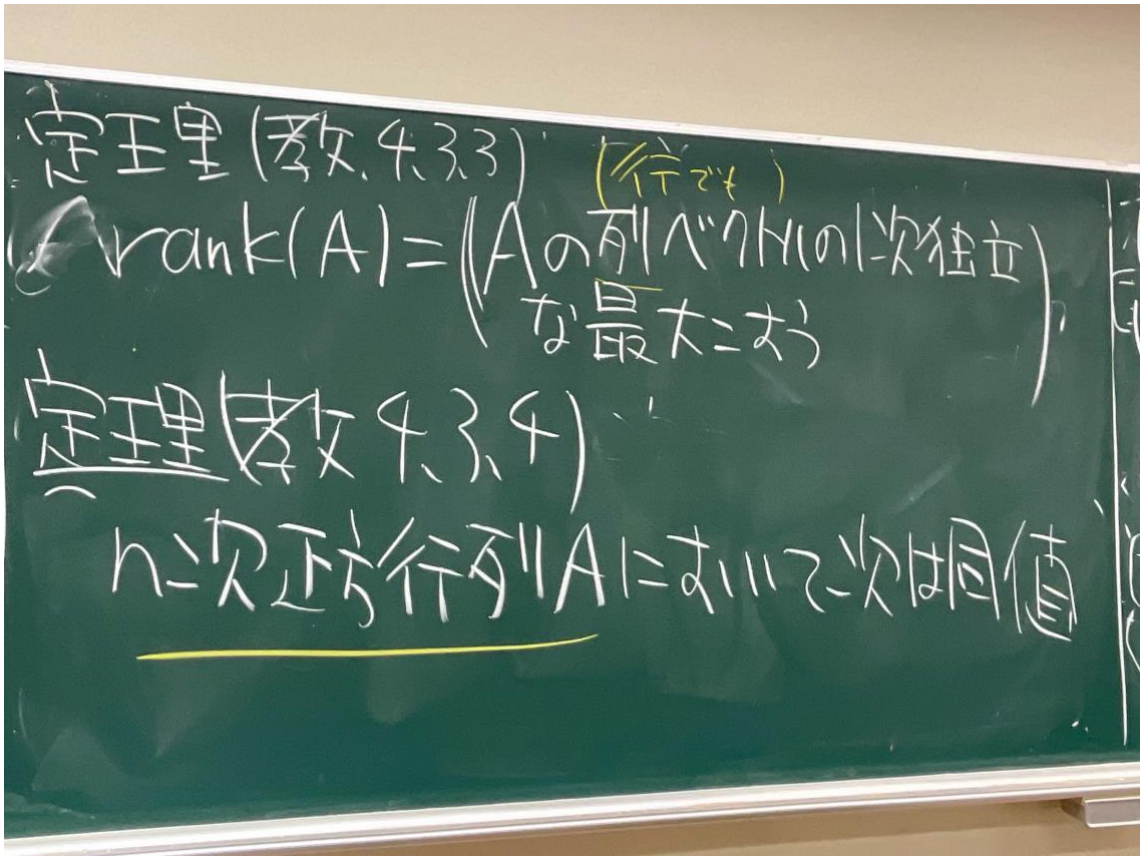

例題 4.3.1
$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\-3\\-2\end{pmatrix}$
$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{a}_5=\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix}$
この$\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_5$の1次独立な最大個数
と1次独立なベクトル
求め方
①
②
③

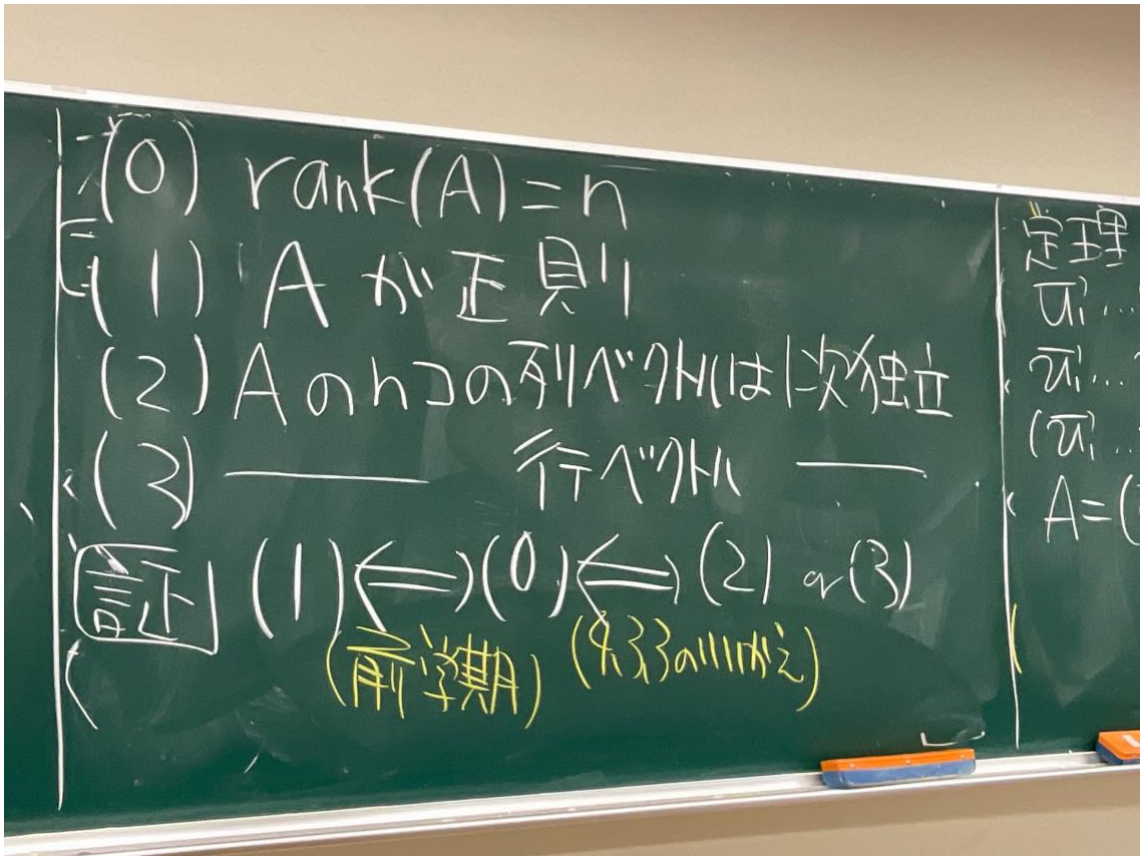

求め方
① $A=(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4\ \vec{a}_5)=\begin{pmatrix}1&1&1&-2&-1\\1&2&3&-4&-4\\3&0&-3&1&7\\0&-1&-2&-1&0\end{pmatrix}$
② A 簡約化 $\to \begin{pmatrix}1&0&-1&0&2\\0&1&2&0&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$
主成分
③ □の個数$=r=3$
$\vec{b}_1$ $\vec{b}_2$ $\vec{b}_3$ $\vec{b}_4$ $\vec{b}_5$

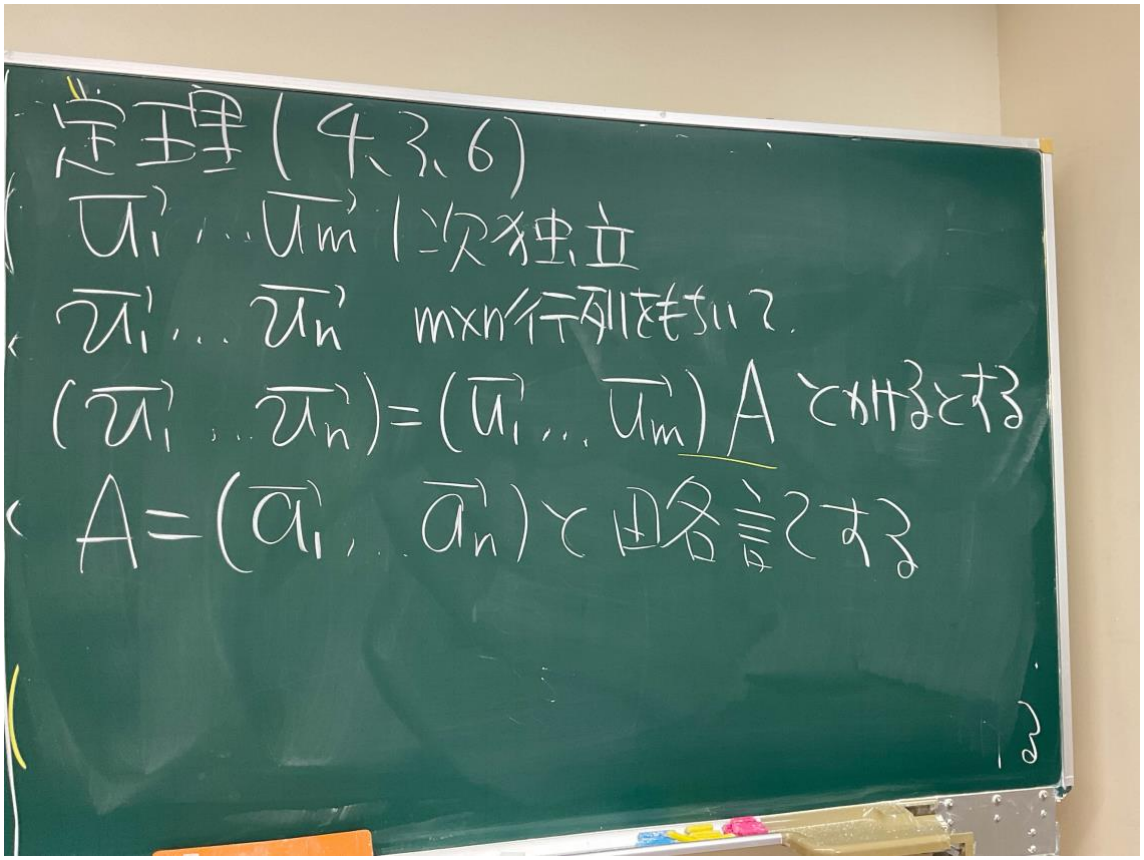

さらに $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_4}$ が1次独立
理由 $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_4}$ が1次独立のゆえ
$x_1\vec{a_1}+x_2\vec{a_2}+x_4\vec{a_4}=\vec{0}$
$\Longleftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
(簡約期)
$\Longleftrightarrow x_1=0, x_2=0, x_4=0$

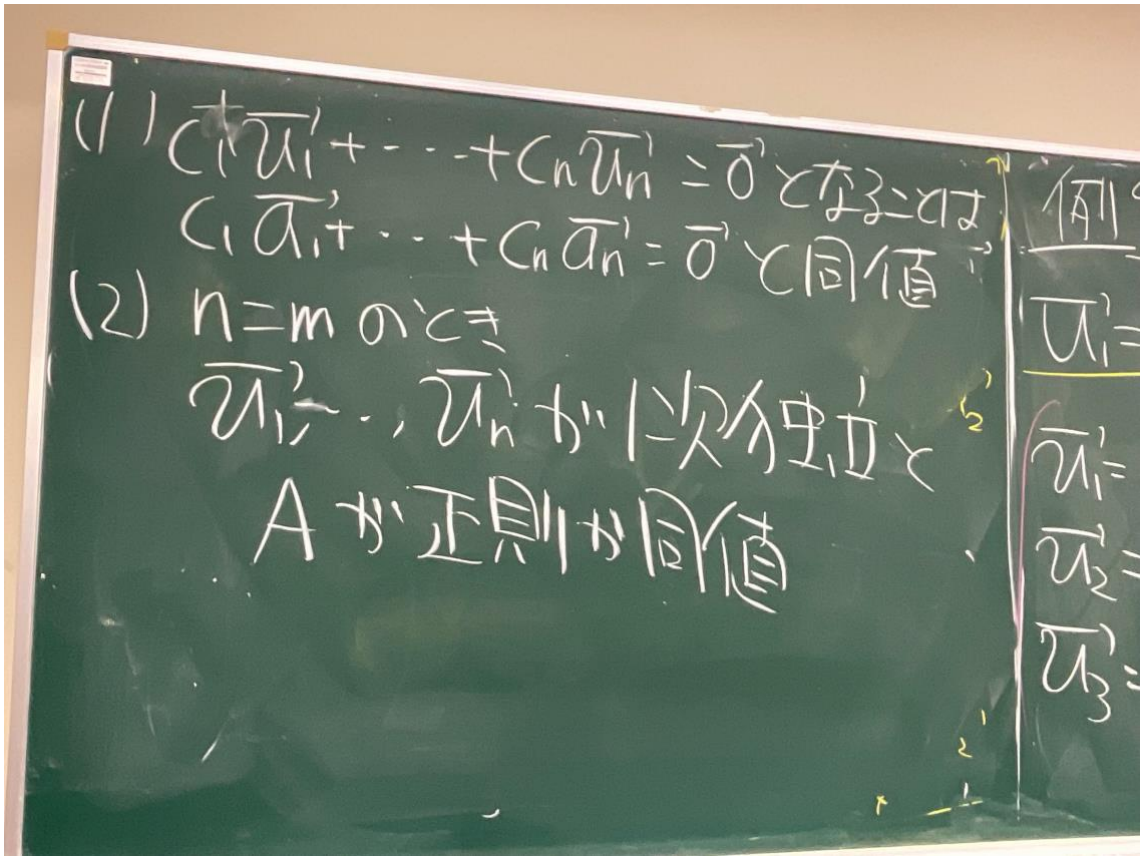

これを深めると(☆)
$x_1\vec{a_1}+x_2\vec{a_2}+\cdots+x_5\vec{a_5}=\vec{0}$
$\Longleftrightarrow B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_3-2c_5 \\ -2c_3+c_5 \\ c_3 \\ -c_3 \\ c_5 \end{pmatrix}$

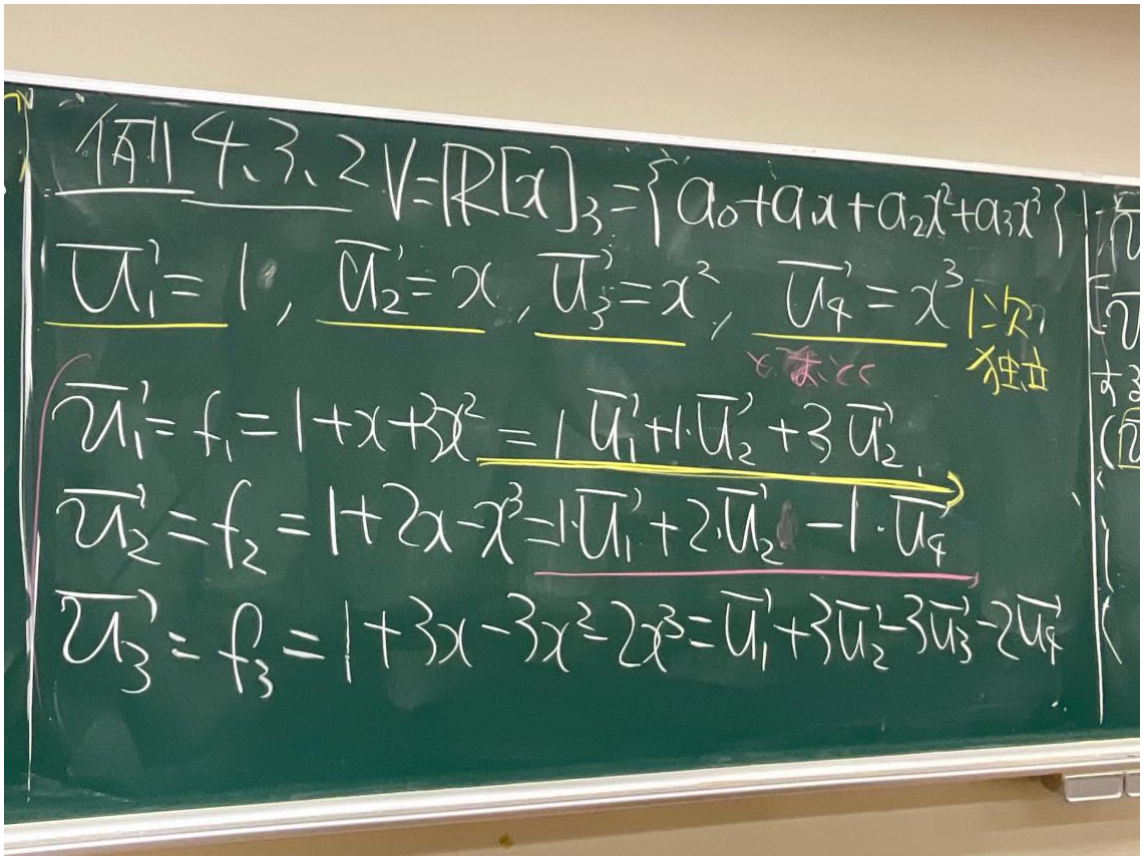

$c_3=1, c_5=0$ を代入すると
$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \vec{a_1}-2\vec{a_2}+\vec{a_3}=\vec{0}$
下が述 $\Leftrightarrow \vec{a_3}=-\vec{a_1}+2\vec{a_2}$
$c_3=0$ $c_5=1$ を代入
$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow -2\vec{a_2}+\vec{a_2}-\vec{a_4}+\vec{a_5}=\vec{0}$
下が述 $\Leftrightarrow \vec{a_5}=2\vec{a_1}-\vec{a_2}+\vec{a_4}$

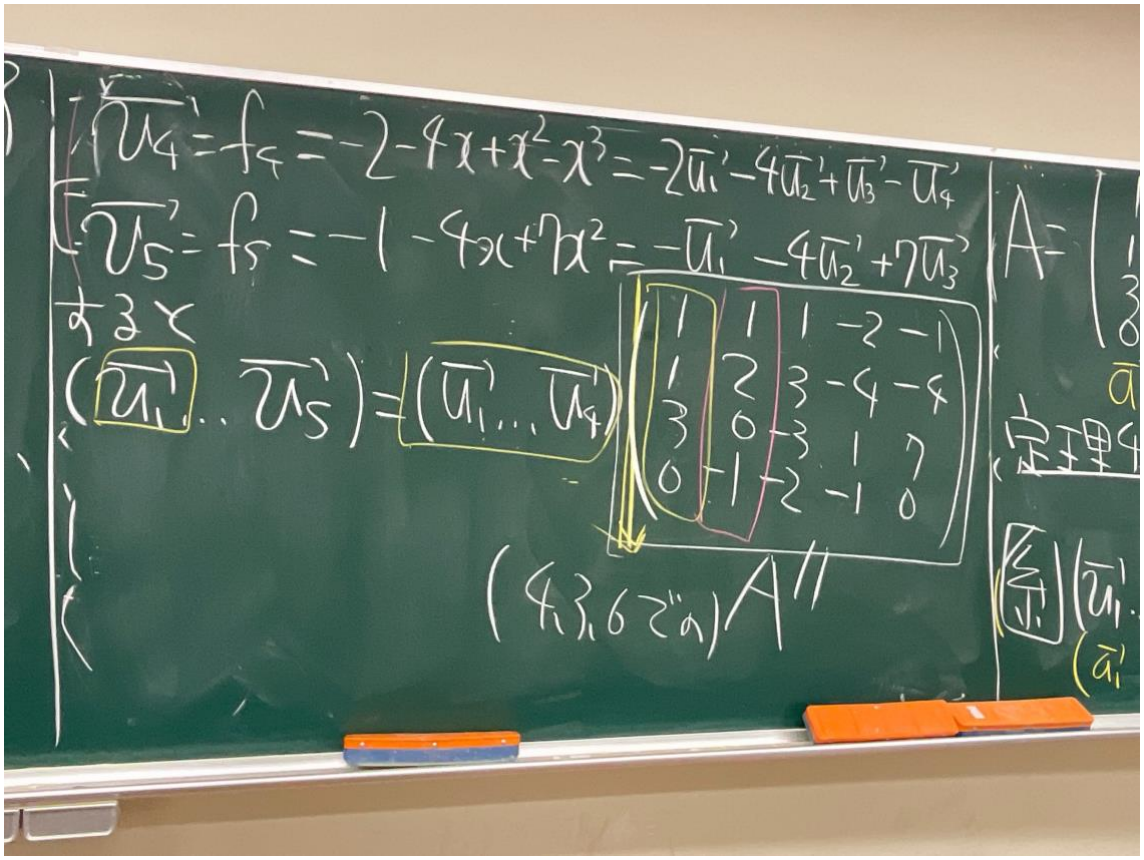

定理(次元、4、3、3)
$\mathrm{rank}(A)=$ (Aの列ベクトルの1次独立な最大こう)
(行でも)
定理(次元 4、3、4)
n次正方行列Aにおいて次は同値

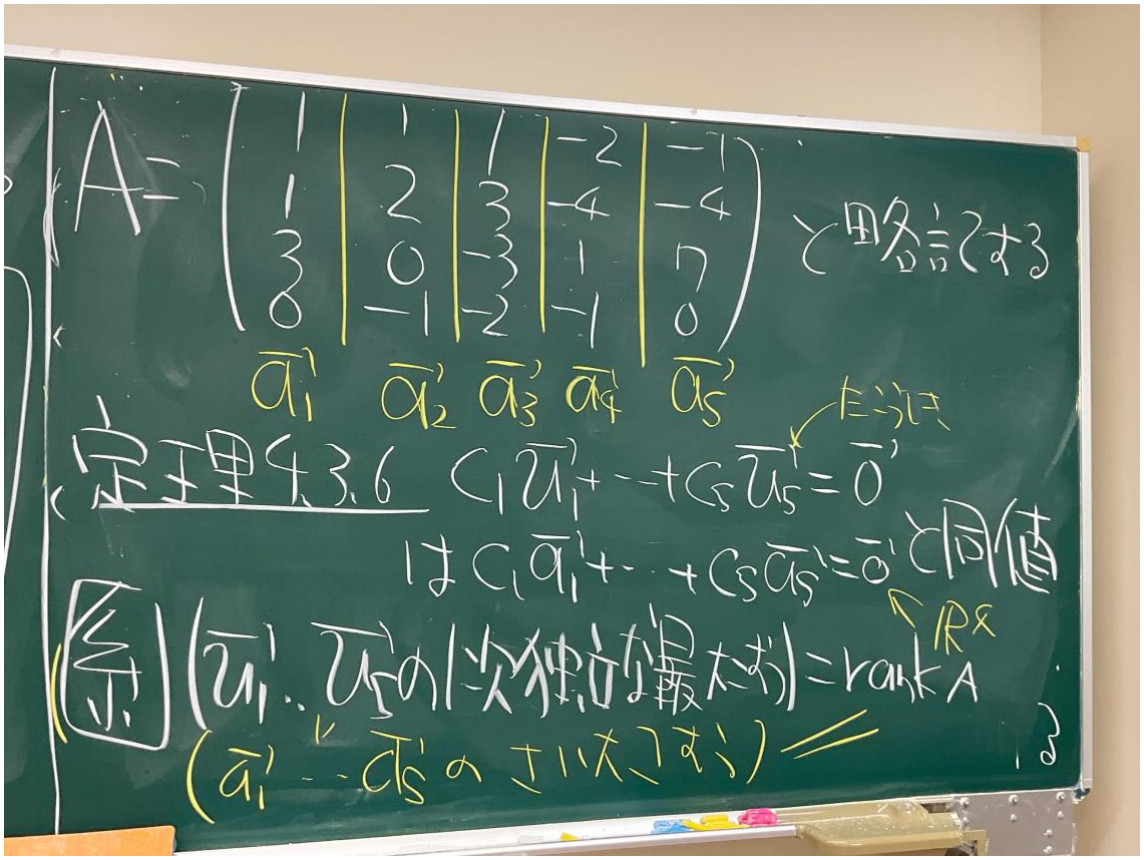

(0) rank(A)=n
(1) Aが正則
(2) Aのn個の列ベクトルは1次独立
(3) ―― 行ベクトル ――
証 (1)⇐(0)⇔(2) or (3)
(前半期)
(授業の11回め)


定理(4.3.6)
u1 … um 1次独立
v1 … vn m×n行列をもいて
(v1 … vn)=(u1 … um)A とかけるとする
A=(a1, … an)と回答言てする


(1) $c_1\vec{u}_1+\cdots+c_n\vec{u}_n=\vec{0}$ となるには
$c_1\vec{a}_1+\cdots+c_n\vec{a}_n=\vec{0}$ と同値
(2) $n=m$ のとき
$\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_n$ が1次独立と
Aが正則が同値


例4.3.2 $V=\mathbb{R}[x]_3=\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\}$
$\vec{u}_1=1,\ \vec{u}_2=x,\ \vec{u}_3=x^2,\ \vec{u}_4=x^3$
1次独立
$\vec{u}_1=f_1=1+x+3x^2=1\vec{u}_1+1\vec{u}_2+3\vec{u}_3$
$\vec{u}_2=f_2=1+2x-x^2=1\vec{u}_1+2\vec{u}_2-1\vec{u}_4$
$\vec{u}_3=f_3=1+3x-3x^2-2x^3=\vec{u}_1+3\vec{u}_2-3\vec{u}_3-2\vec{u}_4$


$\vec{v_4} = f_4 = -2 - 4x + x^2 - x^3 = -2\vec{u_1} - 4\vec{u_2} + \vec{u_3} - \vec{u_4}$
$\vec{v_5} = f_5 = -1 - 4x + 7x^2 = -\vec{u_1} - 4\vec{u_2} + 7\vec{u_3}$
よって
$(\vec{v_1} \cdots \vec{v_5}) = (\vec{u_1} \cdots \vec{u_4}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
$(4,3,6$ でA
$A =$
定理
系
$(\vec{v_1}$
$(\vec{a_1}$


$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ と略記する
$\vec{a_1}$ $\vec{a_2}$ $\vec{a_3}$ $\vec{a_4}$ $\vec{a_5}$
定理4.3.6 $c_1\vec{v_1} + \cdots + c_5\vec{v_5} = \vec{0}$ ←左辺に
は $c_1\vec{a_1} + \cdots + c_5\vec{a_5} = \vec{0}$ と同値
系 $(\vec{v_1} \cdots \vec{v_5}$ の1次独立な最大の個数$) = \operatorname{rank} A$ ←Rで
$(\vec{a_1} \cdots \vec{a_5}$ のさい大1次独立)