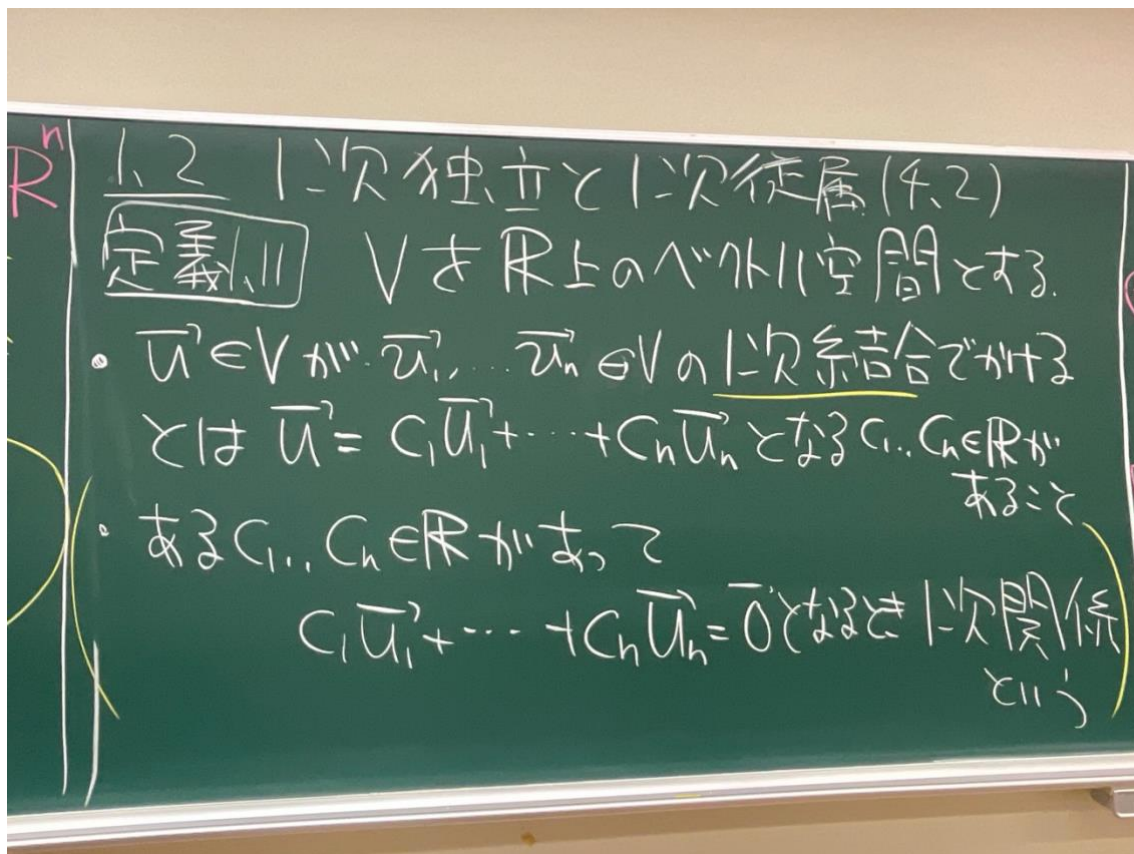
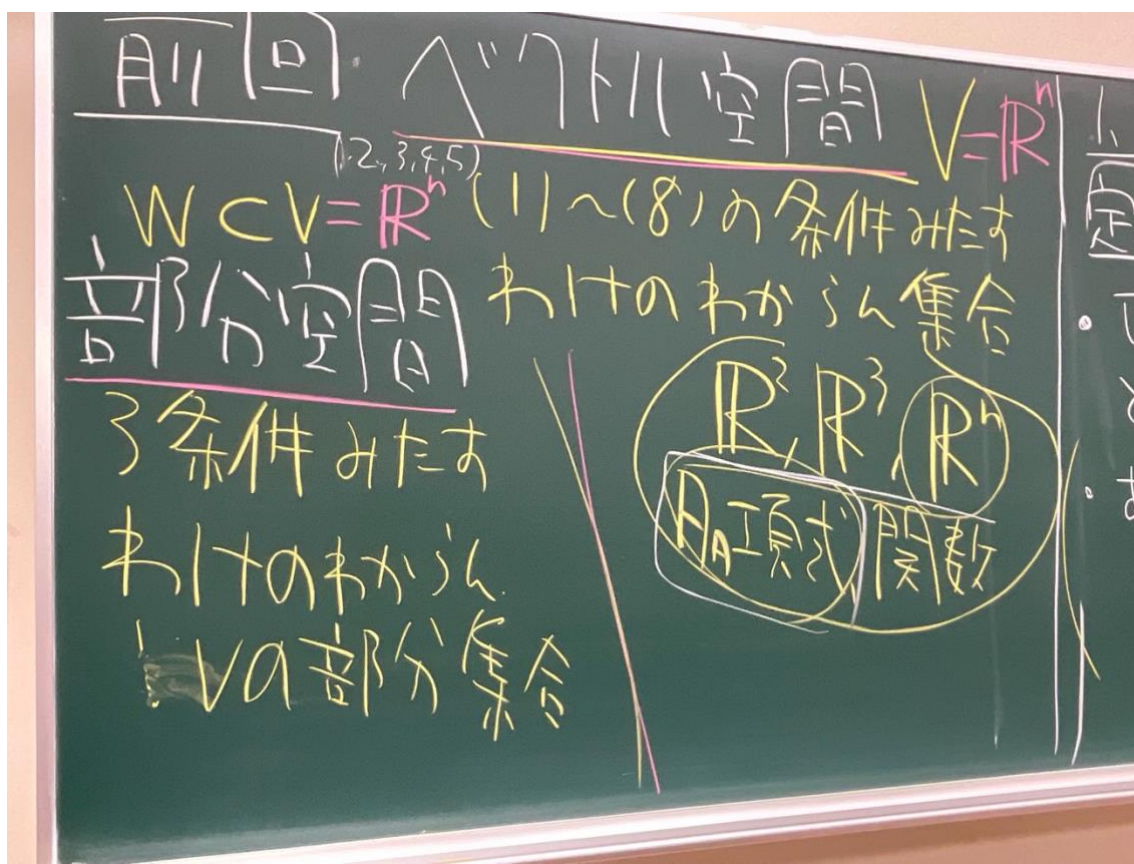




$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in V$ が 1次独立 とは
 $\star C_1 \vec{u}_1 + \dots + C_n \vec{u}_n = \vec{0}$ とならば $C_1 = \dots = C_n = 0$ が成り立つこと

$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in V$ が 1次従属 とは、
 $\star (C_1, \dots, C_n) \neq (0, \dots, 0)$ かつ $C_1 \vec{u}_1 + \dots + C_n \vec{u}_n = \vec{0}$ (全部0以外) となること

補足 1次独立 or 1次従属

例 $V = \mathbb{R}^2$
 $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

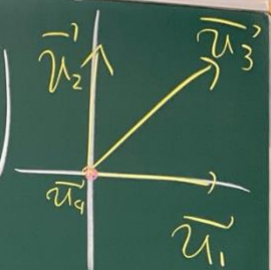
$\vec{u}_1$ と $\vec{u}_2$ は1次独立

証明 $C_1 \vec{u}_1 + C_2 \vec{u}_2 = \vec{0}$ とならば $C_1 = C_2 = 0$

$C_1 \vec{u}_1 + C_2 \vec{u}_2 = \vec{0}$ とする $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^2$ における $\vec{0}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$ (座標)

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の基底



$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ は1次従属

証明 $(c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)$ で
 $c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + c_3 \vec{u}_3 = \vec{0}$ となる
 c_1, c_2, c_3 を一つ見つける。

$c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1$ とすると

$1 \cdot \vec{u}_1 + 1 \cdot \vec{u}_2 + (-1) \vec{u}_3$
 $= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$ より1次従属

1次従属 $\iff$ 平行

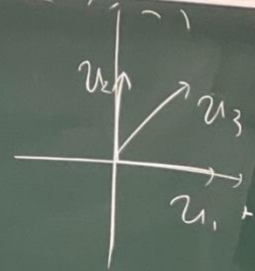
$\vec{u}_1$ は1次独立

証明 $c_1 \vec{u}_1 = \vec{0}$ とする

$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = 0$ より1次独立

$\vec{u}_4$ は1次従属

証明 $100 \cdot \vec{u}_4 = \vec{0}$ より $(c_1 \neq 0)$ $c_1 \vec{u}_4 = \vec{0}$ のため



例 1.13 (数例1)

$$\mathbb{R}^n \text{ につき } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

($\vec{e}_1$) ($\vec{e}_2$) を基本ベクトルという

$$\mathbb{R}^2 \text{ のとき } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に互に独立になる (資料参照)

例 1.14 (数例2)

$$\mathbb{R}[x]_n = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

のとき

$$x^2, x^3, \dots, \sin x, x^{n+1}$$

(1), (x), (x^2), ..., (x^n) は互に独立

$n+1$

証明 ($n=2$ の時)

$$(\mathbb{R}[x])_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

$1, x, x^2$ が 1-次独立を示す.

$$\text{つまり } C_1 \cdot 1 + C_2 x + C_3 x^2 = 0$$

$$(\Leftrightarrow) \text{ どんな } a \in \mathbb{R} \text{ に対しても } C_1 + C_2 a + C_3 a^2 = 0$$

ならば $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ を示す.

☆の証明

(教) $x=0$ 代入して $C_1 = 0$

$$\Rightarrow C_2 x + C_3 x^2 = 0 \Rightarrow C_2 + 2C_3 x = 0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ 代入して } C_2 = 0 = C_3$$

(例) 小豆等式のとき (性質) より

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

例1.15 (教科問題 4.2.1)

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\mathbb{R}^4)$$

は次独立

証明 $C_1 \vec{a}_1 + C_2 \vec{a}_2 + C_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$ となる

$C_1 = C_2 = C_3 = 0$ を示す

$C_1 \vec{a}_1 + C_2 \vec{a}_2 + C_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$ とする

$\Rightarrow C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$C_1 = C_2 = C_3 = 0$ □

連立一次方程式の解法
(簡約化)

定理1.17 (教. 定理4.2.1)

$u_1, \dots, u_n \in V$ が1次従属

$\Leftrightarrow u_1, \dots, u_n$ のうち少なくとも

同値 一個のベクトルが
他のベクトルの1次結合
で表わす

例 (n=3) を示すこと

u_1, u_2, u_3 が1次従属

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = d_2 u_2 + d_3 u_3 \text{ or} \\ u_2 = d_3 u_1 + d_1 u_1 \text{ or} \\ u_3 = d_1 u_1 + d_2 u_2 \end{cases}$ となることを示す。

$\Leftarrow$ 言い方がok

$\Rightarrow$ 1次従属とす

$C_1 \bar{u}_1 + C_2 \bar{u}_2 + C_3 \bar{u}_3 = \bar{0}$ となる
 $(C_1, C_2, C_3) \neq (0, 0, 0)$ がある

$C_1 \neq 0$ のとき $\bar{u}_1 = \boxed{\frac{-C_2}{C_1}} \bar{u}_2 + \boxed{\frac{-C_3}{C_1}} \bar{u}_3$ ok
 $C_2 \neq 0$ $\bar{u}_2 = \boxed{\frac{-C_1}{C_2}} \bar{u}_1 + \boxed{\frac{-C_3}{C_2}} \bar{u}_3$ ok
 $C_3 \neq 0$ $\bar{u}_3 = \boxed{\frac{-C_1}{C_3}} \bar{u}_1 + \boxed{\frac{-C_2}{C_3}} \bar{u}_2$ ok

すなわちケースをみたので示せた。

定理 1.18 (教定 9.2.2)

$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ 1次独立 ①

$\bar{u}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ 1次従属 ②

$\Rightarrow \bar{u}$ は $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ の1次線形結合で表わされる。

定理 (n=2)

② $\Rightarrow C_0 \vec{u} + C_1 \vec{u}_1 + C_2 \vec{u}_2 = \vec{0}$
 となる $(C_0, C_1, C_2) \neq (0, 0, 0)$ が求まる

• $C_0 = 0$ となるなら
 $C_1 \vec{u}_1 + C_2 \vec{u}_2 = \vec{0}$ から $(C_1, C_2) \neq (0, 0)$ となる
 $\Rightarrow$ ① に矛盾

$C_0 \neq 0$
 $\Rightarrow \vec{u} = \frac{-C_1}{C_0} \vec{u}_1 + \frac{-C_2}{C_0} \vec{u}_2$ (1-2, 1-3 の21#)

定義 $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$

例

定義 $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m \in V_A, (a_{ij})_{m \times n}$ 行列

$(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m) A = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m) (a_{ij})$ を数p.71の
 ように定義する

例

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = (3\vec{u}_1 + \vec{u}_2, 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_1 + 4\vec{u}_2)$

かんがえ
 42頁

$$\begin{aligned}
 & (x^3, x^2+1) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}[x] \ni x^3, x^2+1 \\
 & \begin{pmatrix} 3x^3 + (x^2+1), 2x^3 - (x^2+1), x^3 + 4(x^2+1) \end{pmatrix} \\
 & = (3x^3 + x^2 + 1, 2x^3 - x^2 - 1, x^3 + 4x^2 + 4) \\
 & \quad (\overline{u}_1 = x^3, \overline{u}_2 = x^2+1)
 \end{aligned}$$

4/1 定理 $\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n, \overline{u}_1, \dots, \overline{u}_m \in V$
 (1) $\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n$ は $\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_m$ の線形結合
 (2) $n > m$
 ならば $\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n$ は 1 次従属.

$(\frac{1}{2} \mathbb{F}(|A|)) \quad n=3, m=2$
 $(\overline{u}_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overline{u}_2' = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{u}_3' = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix})$
 $\boxed{\overline{u}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overline{u}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$
 (2) のように ok ($3=n > m=2$)
 ① $\boxed{\overline{u}_1' = 2\overline{u}_1' + \overline{u}_2'}$ $\boxed{\overline{u}_2' = 4\overline{u}_1' + 3\overline{u}_2'}$
 $(\overline{u}_2, \overline{u}_3 \neq)$ $\overline{u}_3' = 5\overline{u}_1' + \overline{u}_2'$

$\leftarrow \text{P.711} \quad (\overline{u}_1', \overline{u}_2', \overline{u}_3') = (\overline{u}_1', \overline{u}_2') \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{①}$
 $\leftarrow \text{P.711} \quad \left(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{となる}$
 $(c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)$ の解をとると
 $c_1 \overline{u}_1' + c_2 \overline{u}_2' + c_3 \overline{u}_3'$
 $= (\overline{u}_1', \overline{u}_2', \overline{u}_3') \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (\overline{u}_1', \overline{u}_2') \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\leftarrow \text{P.714} \quad \square$

