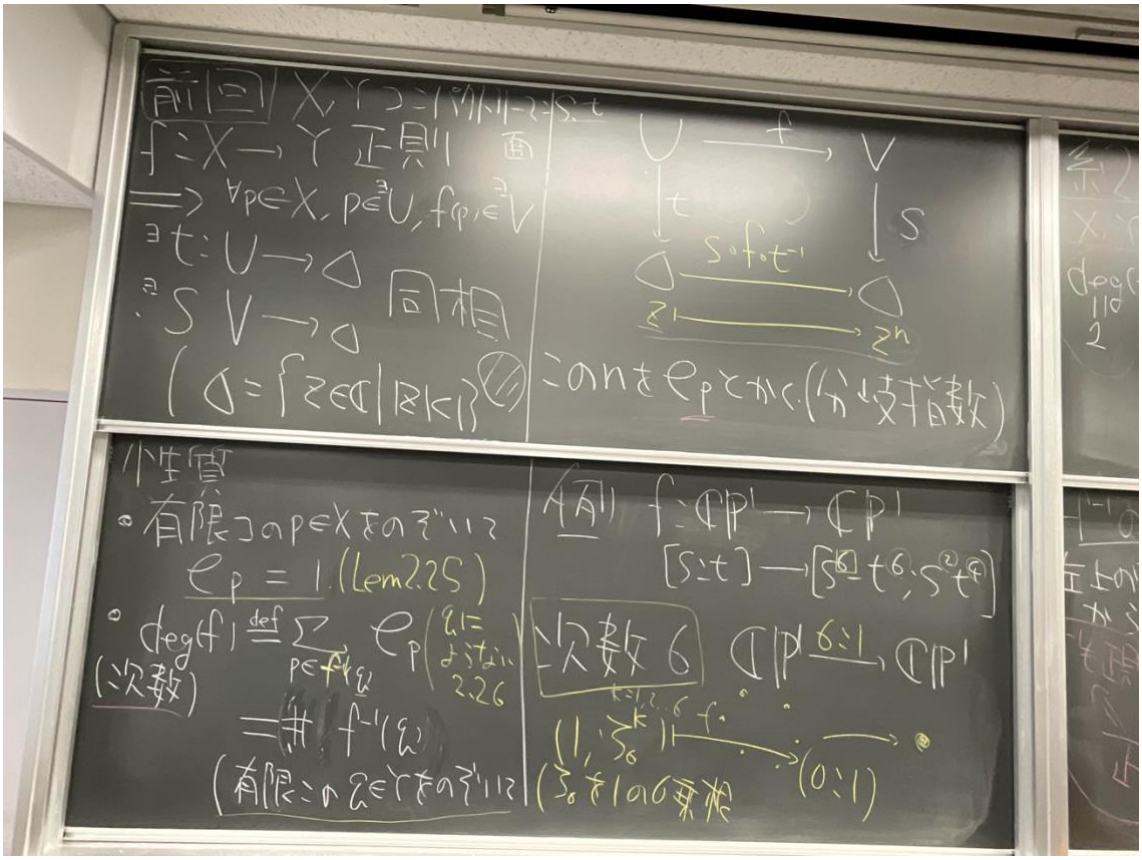
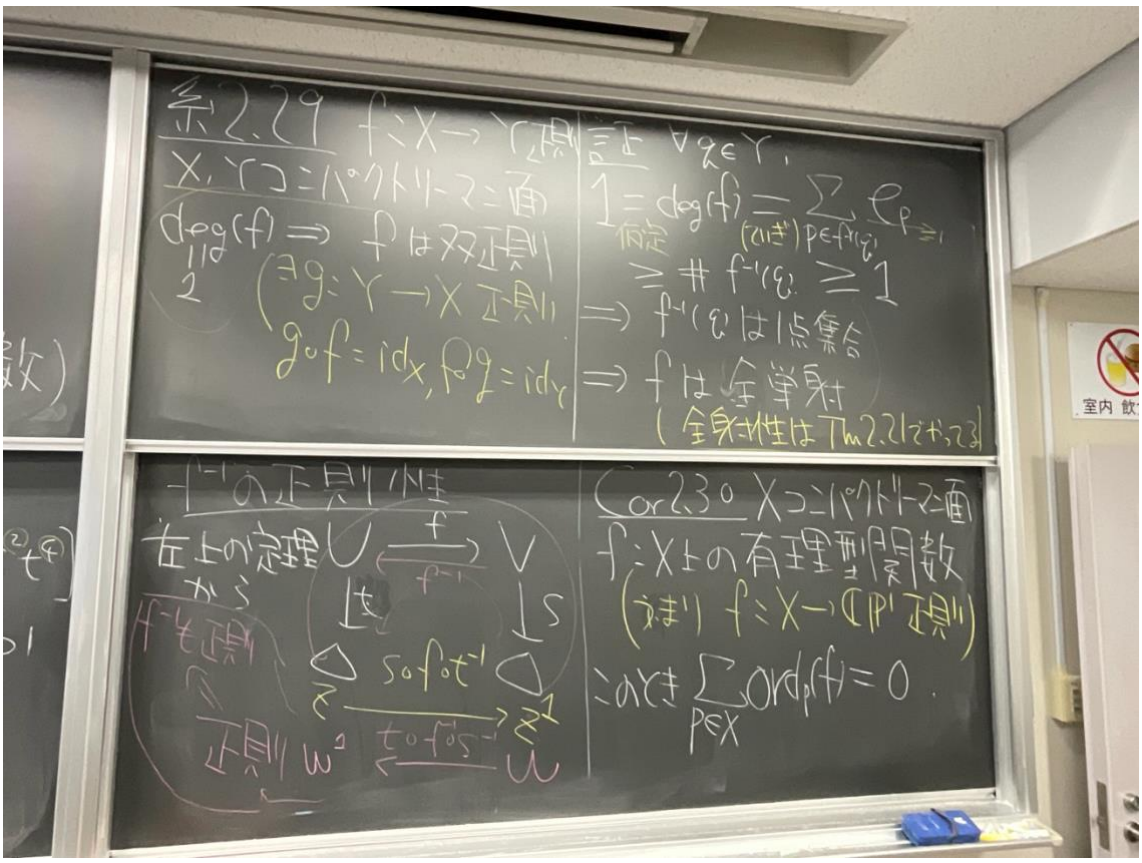
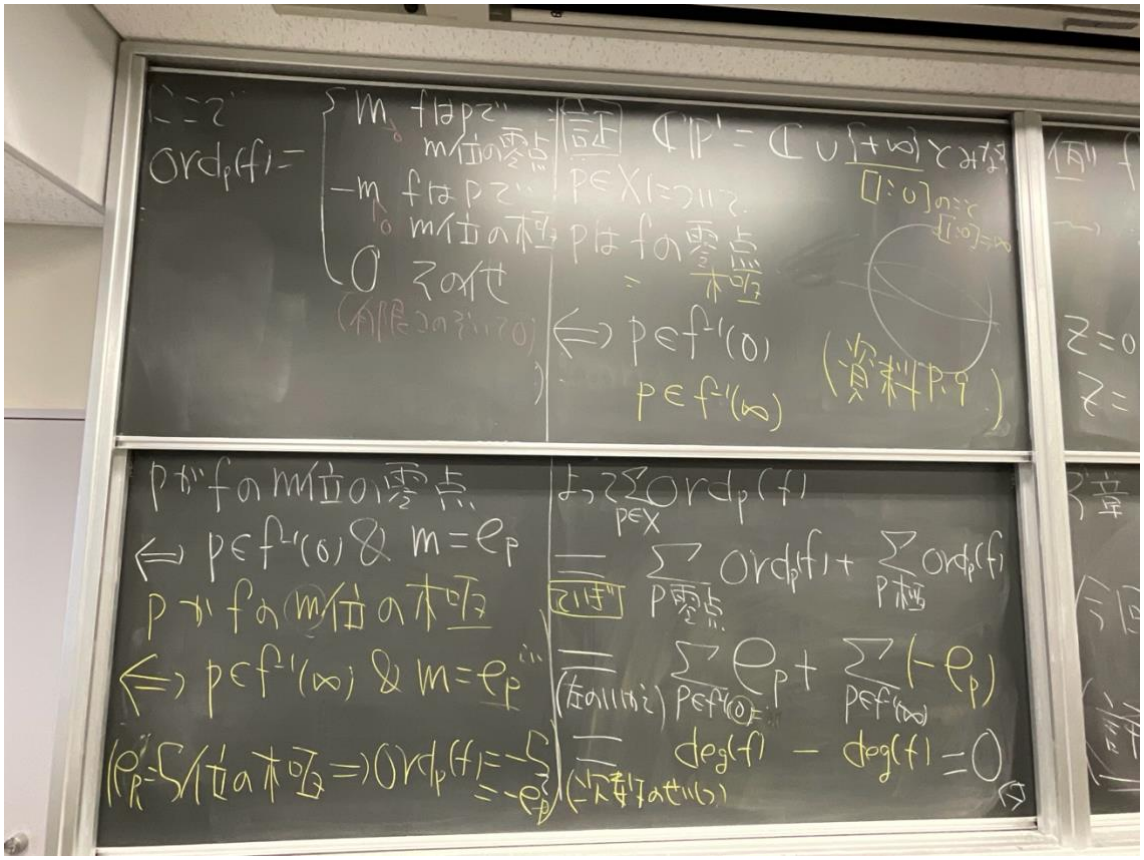
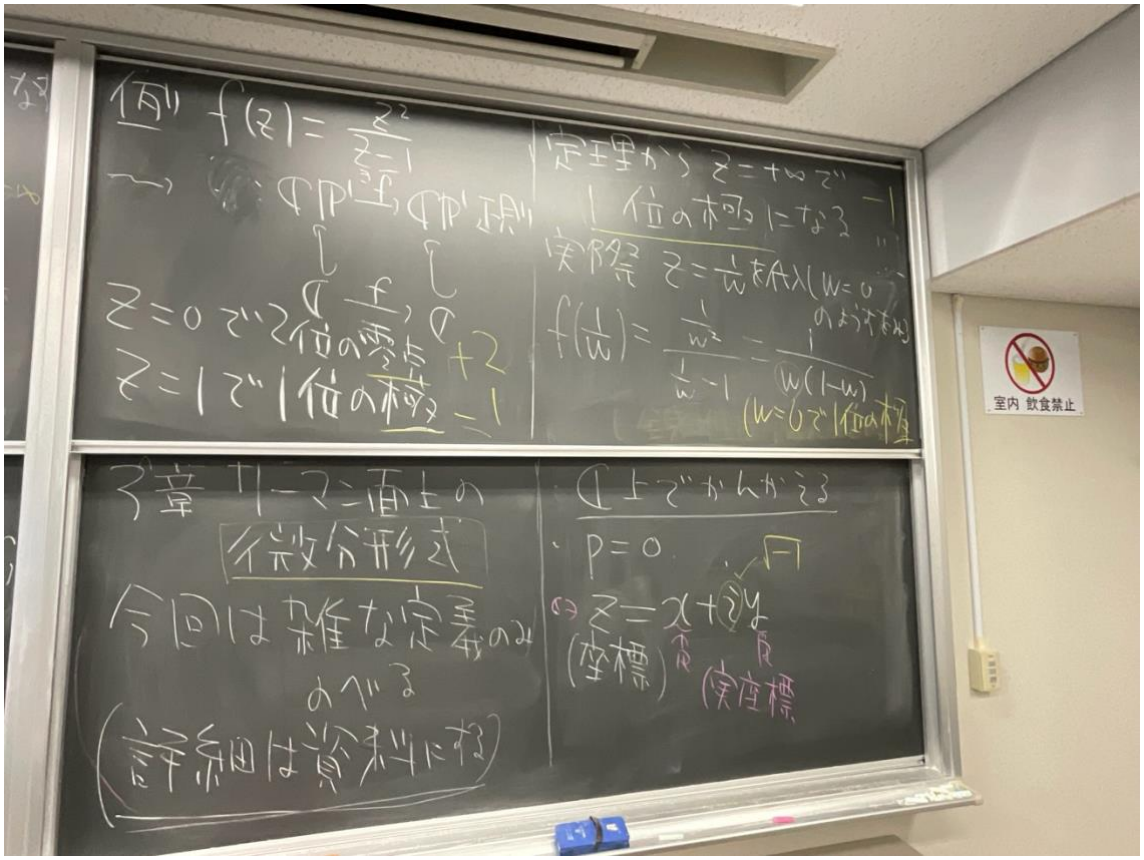

前回 X, Y コンパクトリーマン面
f: X → Y 正則
⇒ ∀p∈X, p∈∃U, f(p)∈∃V
∃t: U → Δ
∃s: V → Δ
同相
(Δ = {z∈ℂ | |z|<1})
U → V
t
s
Δ → Δ
s∘f∘t⁻¹
z ↦ zⁿ
このnを e_p とかく (分岐指数)
性質
・有限コの p∈X をのぞいて
e_p = 1 (Lem 2.25)
・deg(f) ≝ Σ_{p∈f⁻¹(q)} e_p
(q によらない 2.26)
(次数)
= # f⁻¹(q)
(有限コの q∈Y をのぞいて
例 f: ℂP¹ → ℂP¹
[s:t] → [s⁶ − t⁶ : s²t⁴]
次数 6
ℂP¹ 6:1 ℂP¹
(1, ζ₆ᵏ) ↦ (0:1)
(ζ₆ を1の6乗根


系 2.29 f: X → Y 正則
X, Y コンパクトリーマン面
deg(f) ⇒ f は双正則
(∃g: Y → X 正則
g∘f = id_X, f∘g = id_Y
証 ∀q∈Y,
1 = deg(f) = Σ_{p∈f⁻¹(q)} e_p
仮定
(いぎ)
≥ # f⁻¹(q) ≥ 1
⇒ f⁻¹(q) は1点集合
⇒ f は全単射
(全射性は Thm 2.21 でかってる)
f⁻¹ の正則性
左上の定理から
f⁻¹ も正則
U → V
t
s
Δ → Δ
s∘f∘t⁻¹
z → z¹
正則 w¹ ← w
t∘f⁻¹∘s⁻¹
Cor 2.30 X コンパクトリーマン面
f: X 上の有理型関数
(つまり f: X → ℂP¹ 正則)
このとき Σ_{p∈X} ord_p(f) = 0





ここで

$$\mathrm{ord}_p(f) = \begin{cases} m & f\text{は}p\text{で}m\text{位の零点} \\ -m & f\text{は}p\text{で}m\text{位の極} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

(有限つのぞいて0)

証 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$ とみなす

$[1:0]$ のこと $[1:0]=\infty$

$p \in X$ について

p は f の零点 $=$ 極

$\Longleftrightarrow p \in f^{-1}(0)$

$p \in f^{-1}(\infty)$

(資料P.9)

p が f の m 位の零点

$\Longleftrightarrow p \in f^{-1}(0)$ & $m = e_p$

p が f の m 位の極

$\Longleftrightarrow p \in f^{-1}(\infty)$ & $m = e_p$

($e_p = 5$ 位の極 $\Rightarrow \mathrm{ord}_p(f) = -5 = -e_p$)

よって $\sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(f)$

$= \sum_{p\text{零点}} \mathrm{ord}_p(f) + \sum_{p\text{極}} \mathrm{ord}_p(f)$ (ていぎ)

$= \sum_{p \in f^{-1}(0)} e_p + \sum_{p \in f^{-1}(\infty)} (-e_p)$ (左のいかえ)

$= \deg(f) - \deg(f) = 0$ (次数のせいしつ)

例 $f(z) = \frac{z^2}{z-1}$

$\rightsquigarrow \mathbb{CP}^1 \xrightarrow{\exists f} \mathbb{CP}^1$ 正則

$\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$

$z=0$ で2位の零点 $+2$

$z=1$ で1位の極 -1

定理から $z=+\infty$ で -1 位の極になる

実際 $z = \frac{1}{w}$ を代入 ($w=0$ のようすをみる)

$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\frac{1}{w^2}}{\frac{1}{w}-1} = \frac{1}{w(1-w)}$

($w=0$ で1位の極)

3章 リーマン面上の

$\boxed{\text{微分形式}}$

今回は雑な定義のみのべる

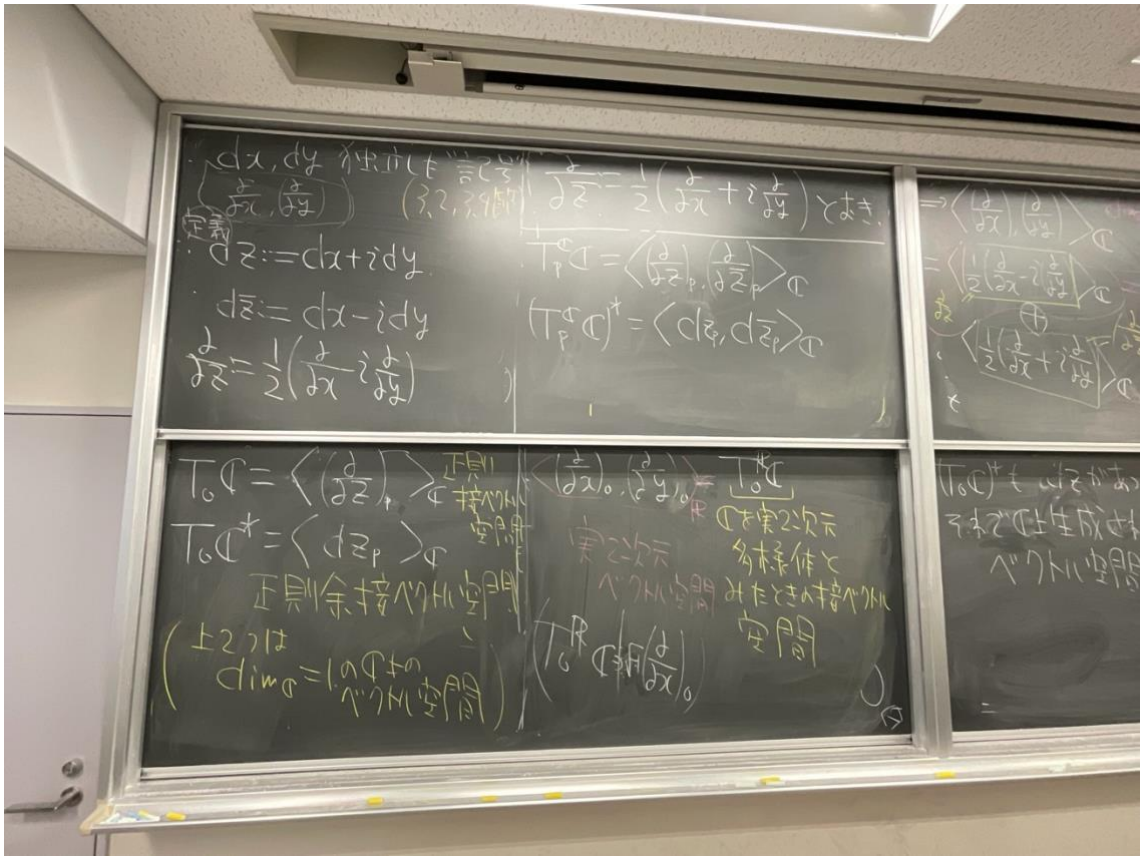
(詳細は資料にする)

$\mathbb{C}$ 上でかんがえる

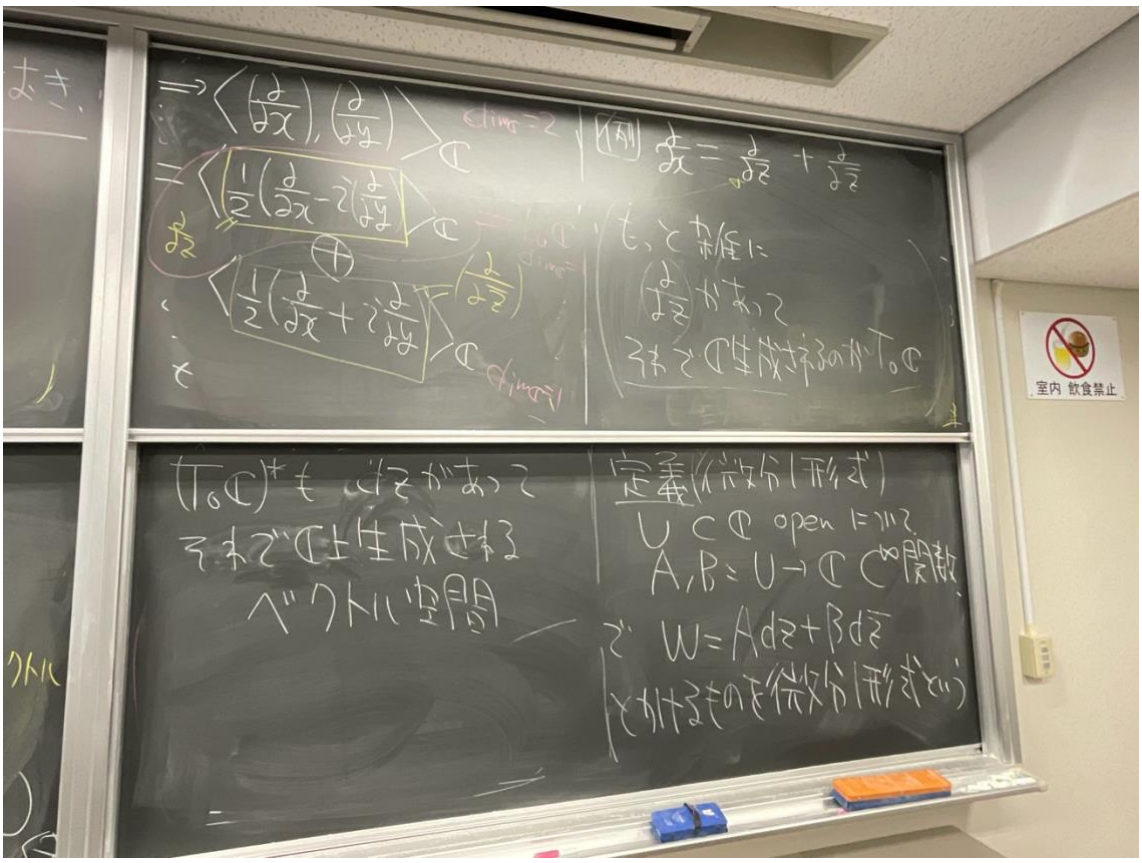
・$p=0$

$\Leftrightarrow z = x + iy$ ($\sqrt{-1}$)

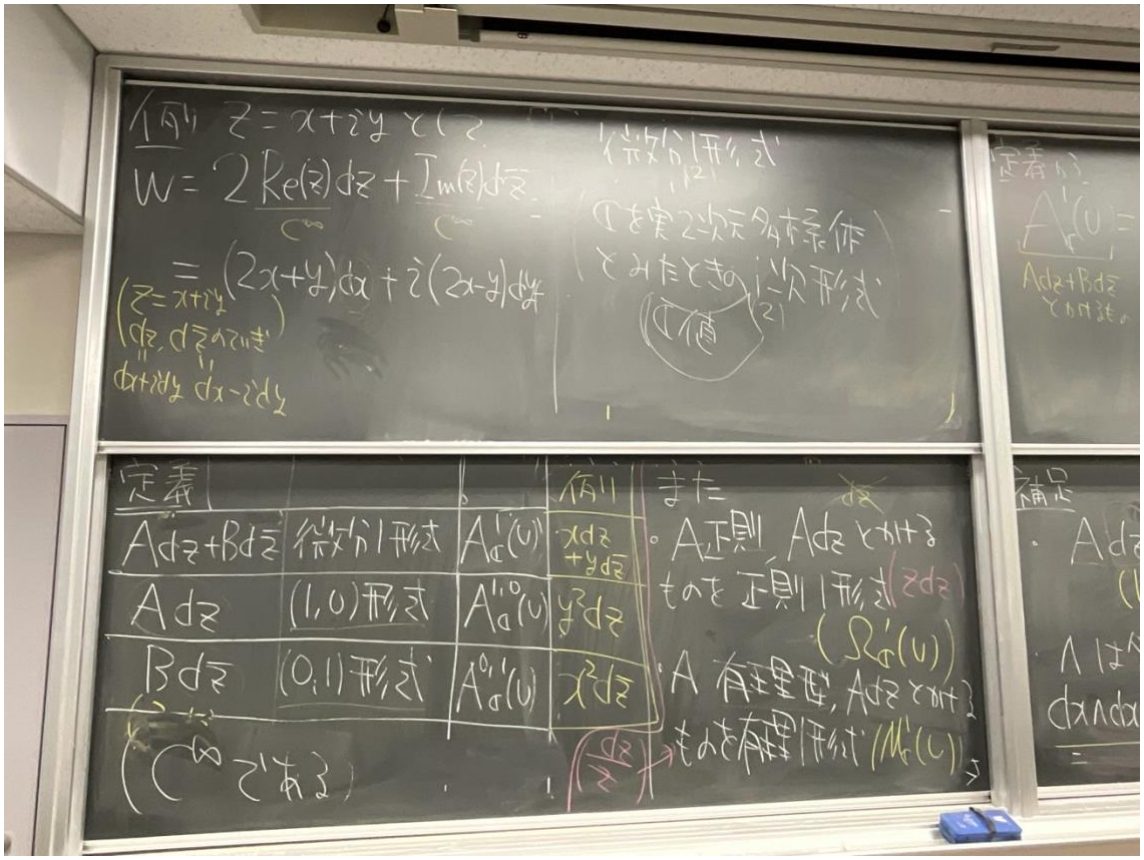
(座標) x y (実座標)



定義
$dz := dx + i\,dy$
$d\bar{z} := dx - i\,dy$
$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$
$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ とおき
$T_p^{\mathbb{C}}\mathbb{C} = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)_p \right\rangle_{\mathbb{C}}$
$(T_p^{\mathbb{C}}\mathbb{C})^* = \langle dz_p, d\bar{z}_p \rangle_{\mathbb{C}}$
$T_0\mathbb{C} = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \right\rangle_{\mathbb{C}}$ 正則接ベクトル空間
$T_0\mathbb{C}^* = \langle dz_p \rangle_{\mathbb{C}}$ 正則余接ベクトル空間
(上2つは $\dim_{\mathbb{C}} = 1$ の $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間)
$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_0 \right\rangle_{\mathbb{R}} = T_0^{\mathbb{R}}\mathbb{C}$
$\mathbb{C}$ を実2次元多様体とみたときの接ベクトル空間
実2次元ベクトル空間
$(T_0^{\mathbb{R}}\mathbb{C} \ni \sqrt{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_0)$



$\Rightarrow \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \right\rangle_{\mathbb{C}}$
$\dim_{\mathbb{C}} = 2$
$= \left\langle \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \right\rangle_{\mathbb{C}}$
$\frac{\partial}{\partial z}$
$\oplus$
$\left\langle \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \right\rangle_{\mathbb{C}}$
$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$
$\dim_{\mathbb{C}} = 1$
例 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$
もっと素直に $\frac{\partial}{\partial z}$ があって それで $\mathbb{C}$ 生成されるのが $T_0\mathbb{C}$
$(T_0\mathbb{C})^*$ も dz があって それで $\mathbb{C}$ 上生成される ベクトル空間
定義(微分1形式)
$U \subset \mathbb{C}$ open について
$A, B : U \to \mathbb{C}$ C^∞ 関数
で $W = A\,dz + B\,d\bar{z}$
とかけるものを微分1形式という



例 $z = x+iy$ として

$$w = 2\underbrace{\mathrm{Re}(z)}_{C^\infty}dz + \underbrace{\mathrm{Im}(z)}_{C^\infty}d\bar{z}$$

$$= (2x+y)dx + i(2x-y)dy$$

($z = x+iy$, dz, $d\bar{z}$ のていぎ)
$dz = dx+idy$, $d\bar{z} = dx-idy$

微分1形式 (2)

$\mathbb{C}$を実2次元多様体とみたときの1次形式 (2)

$\mathbb{C}$値

定義

			例
$Adz+Bd\bar{z}$	微分1形式	$A^1_{\mathbb{C}}(U)$	$xdz+yd\bar{z}$
Adz	(1,0)形式	$A^{1,0}_{\mathbb{C}}(U)$	y^2dz
$Bd\bar{z}$	(0,1)形式	$A^{0,1}_{\mathbb{C}}(U)$	$x^2d\bar{z}$

(C^∞である)

また

・A正則 Adz とかけるものを正則1形式 (zdz) ($\Omega^1_{\mathbb{C}}(U)$)

・A有理型, Adz とかけるものを有理1形式 ($M^1_{\mathbb{C}}(U)$)

$\frac{dz}{z}$

定義から

$$\underbrace{A^1_{\mathbb{C}}(U)}_{Adz+Bd\bar{z}\text{とかけるもの}} = \underbrace{A^{1,0}_{\mathbb{C}}(U)}_{Adz\text{とかける}} \oplus \underbrace{A^{0,1}_{\mathbb{C}}(U)}_{Bd\bar{z}\text{とかけ}}$$

定義 (微分2形式)

$U \subset \mathbb{C}$ open, $A: U \to \mathbb{C}$ C^∞関数

$\eta = A\,\boxed{dz\wedge d\bar{z}}$ とかけるものを

$\boxed{(=) -2iA\,dx\wedge dy}$

微分2形式とかき $A^2_{\mathbb{C}}(U)$ とかく

補足

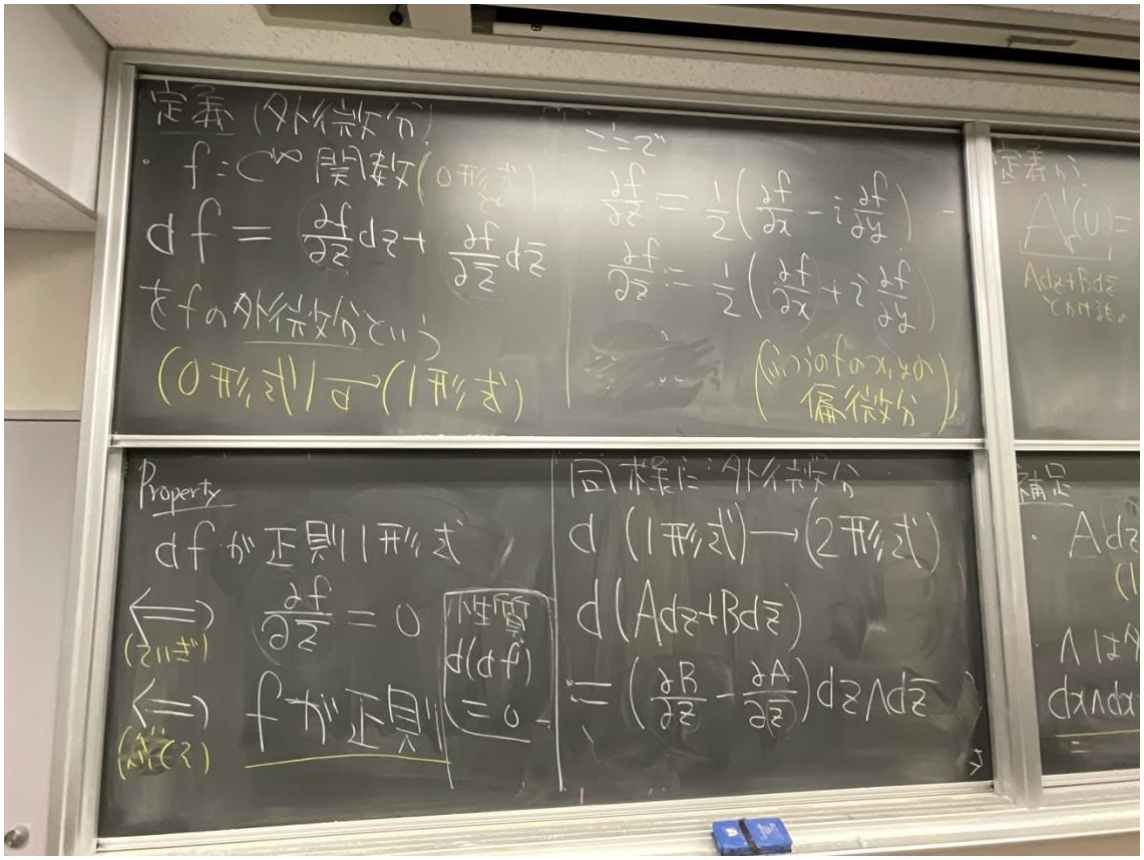
・$Adz\wedge d\bar{z}$ を (1, 1) 形式ともいう

・$\wedge$は外積で、ルールは $dx\wedge dy = -dy\wedge dx$

$dx\wedge dx = dy\wedge dy = 0$

例 $(adx+bdy)\wedge(cdx+ddy)$

$= \cancel{ac\,dx\wedge dx}^{\,0} + (ad-bc)dx\wedge dy + \cancel{bd\,dy\wedge dy}_{\,0}$


定義 (外微分)
$f: C^\infty$ 関数 (0形式)
$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$
を f の外微分という
(0形式) → (1形式)
ここで
$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$
$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$
(f の x, y の偏微分)
定義
$A(U) =$
$Adz + Bd\bar{z}$
Property
df が正則1形式
$\Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$
$\Longleftarrow$ (f が正則)
性質
$d(df) = 0$
同様に外微分
d (1形式) → (2形式)
$d(Adz + Bd\bar{z})$
$= \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}\right)dz \wedge d\bar{z}$
補足
$\cdot Adz$
$dx \wedge dx$