前回 X, Y リーマン面
$f: X \to Y$ 正則写像
$\Leftrightarrow \forall p \in X$, $\exists t: U \to \triangle$ 同相
$s: V \to \triangle$
$t(p) = 0$
$s \circ f \circ t^{-1}(z)$ が正則

定理2.15
うまく (t, U), (s, V) をとると
$s \circ f \circ t^{-1}(z) = z^n$ とできる
また
・f 開写像
$(W \subset X$ open$) \Rightarrow f(W) \subset Y$ open
・n は f と p にのみよらない

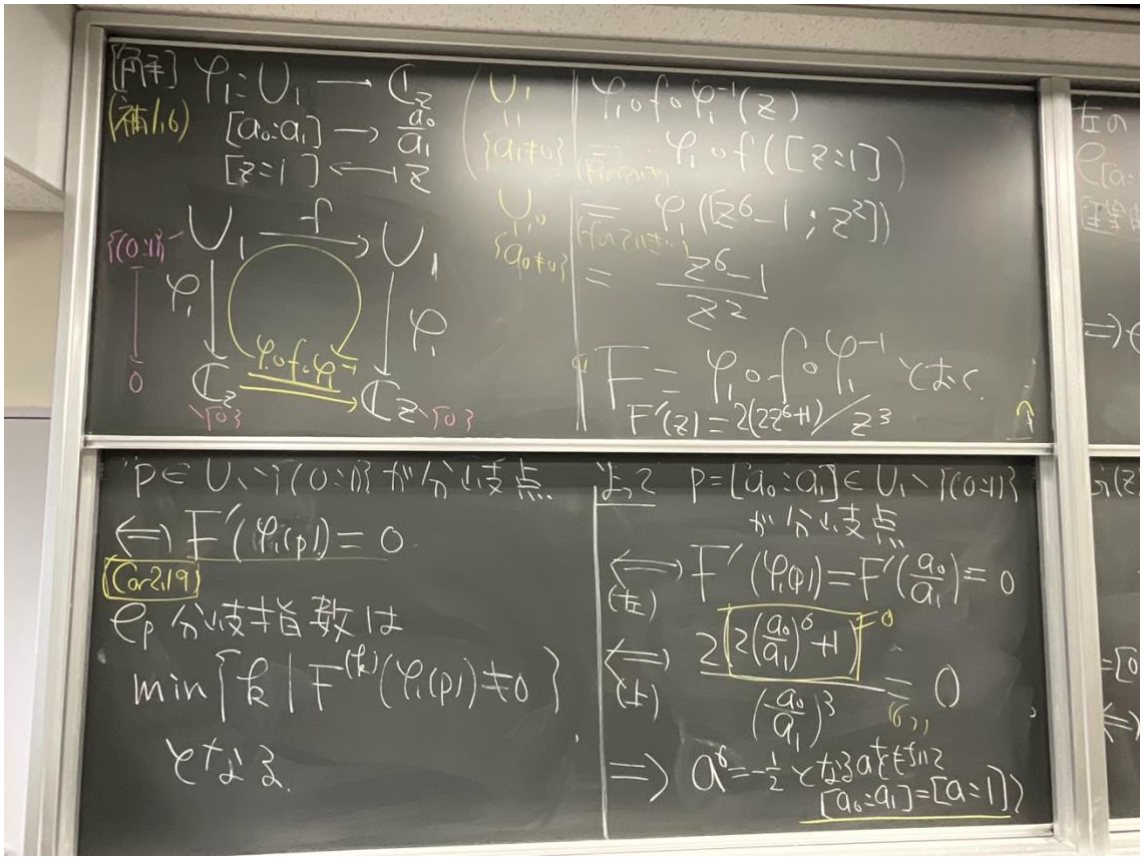
"リーマン面からリーマン面の正則写像は局所的に $z \mapsto z^n$"

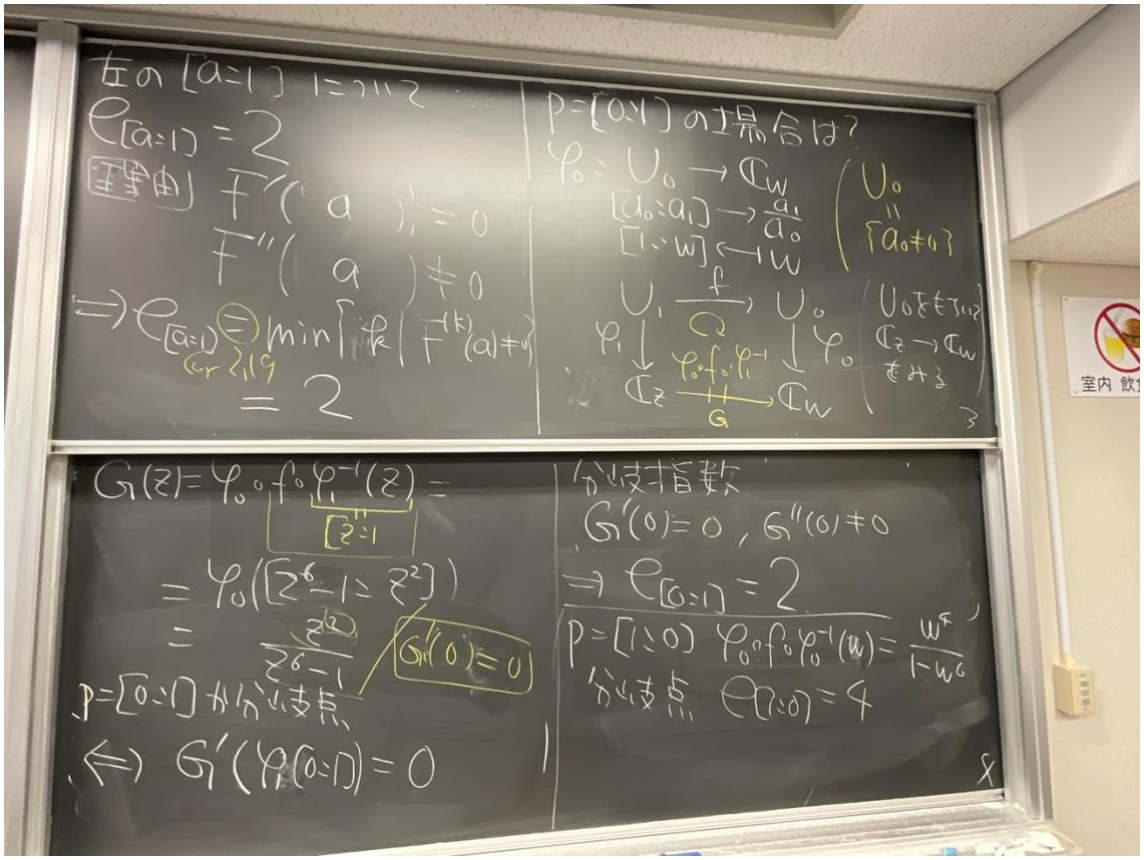
定義2.18 $f: X \to Y$ 正則
e_p を右の定義の "n" とする
・e_p 分岐指数
・$e_p > 1$ の点 p：分岐点
$f(p)$：分岐値

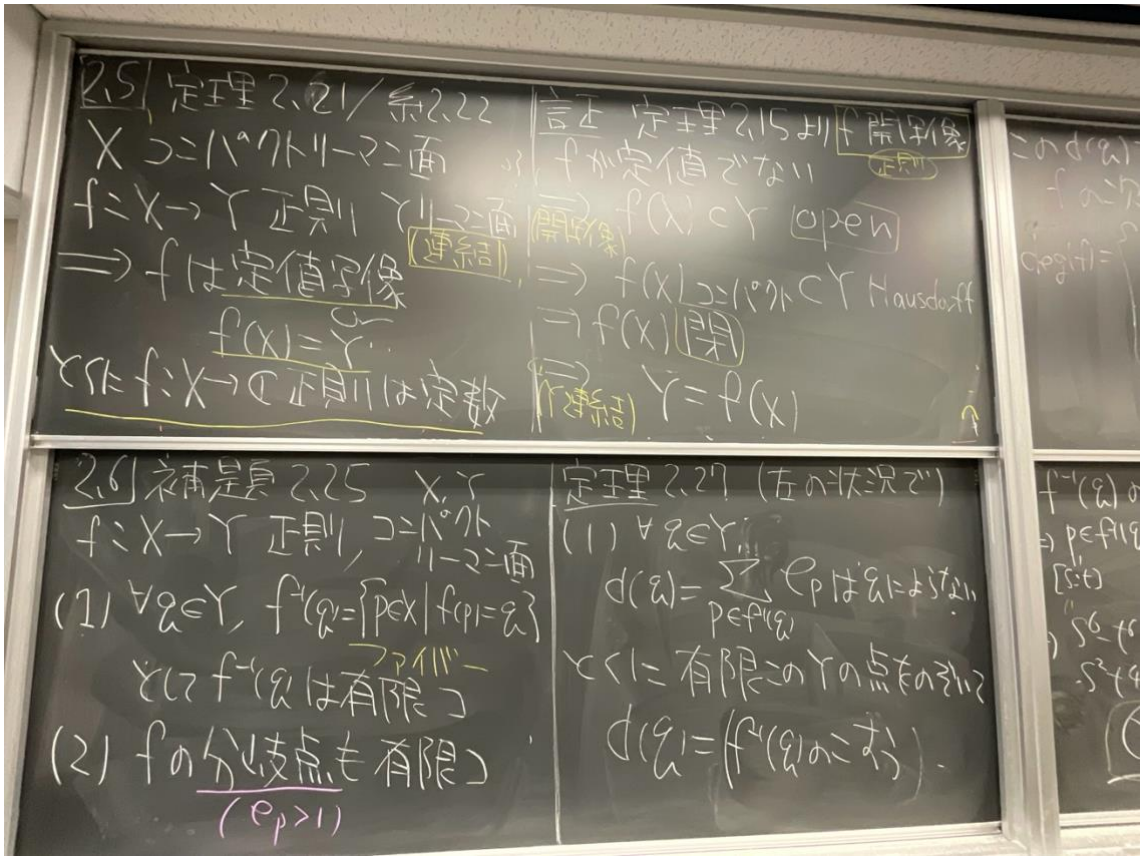
系2.19 $f: X \to Y$ 正則
$p \in X$
座標 $\varphi: U' \to \triangle$ 同相
$\chi: V' \to \triangle$
$\chi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} \cdots$
$a_n \neq 0$, $n \geq 0$ 整数
とかけたとする

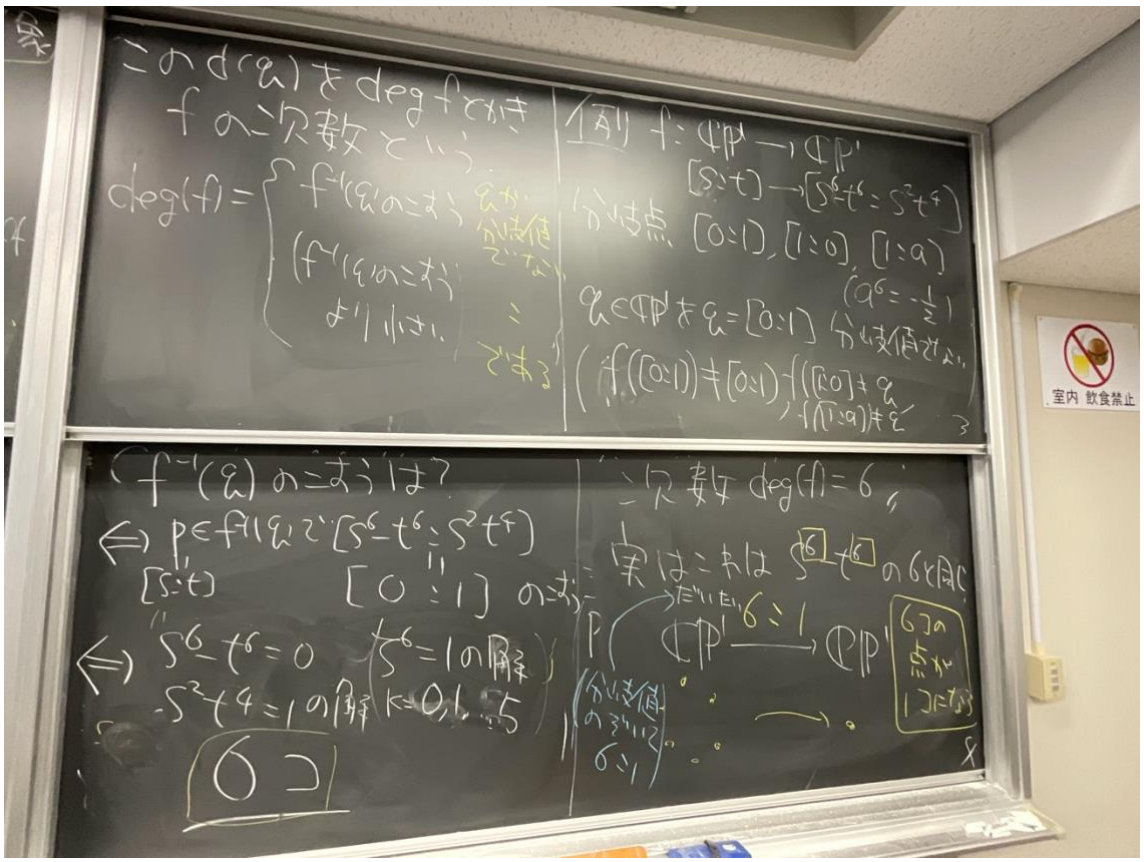
このとき $e_p = n = \min\{k \mid F^{(k)}(0) \neq 0\}$
よって $e_p > 1 \Leftrightarrow F'(0) = 0$

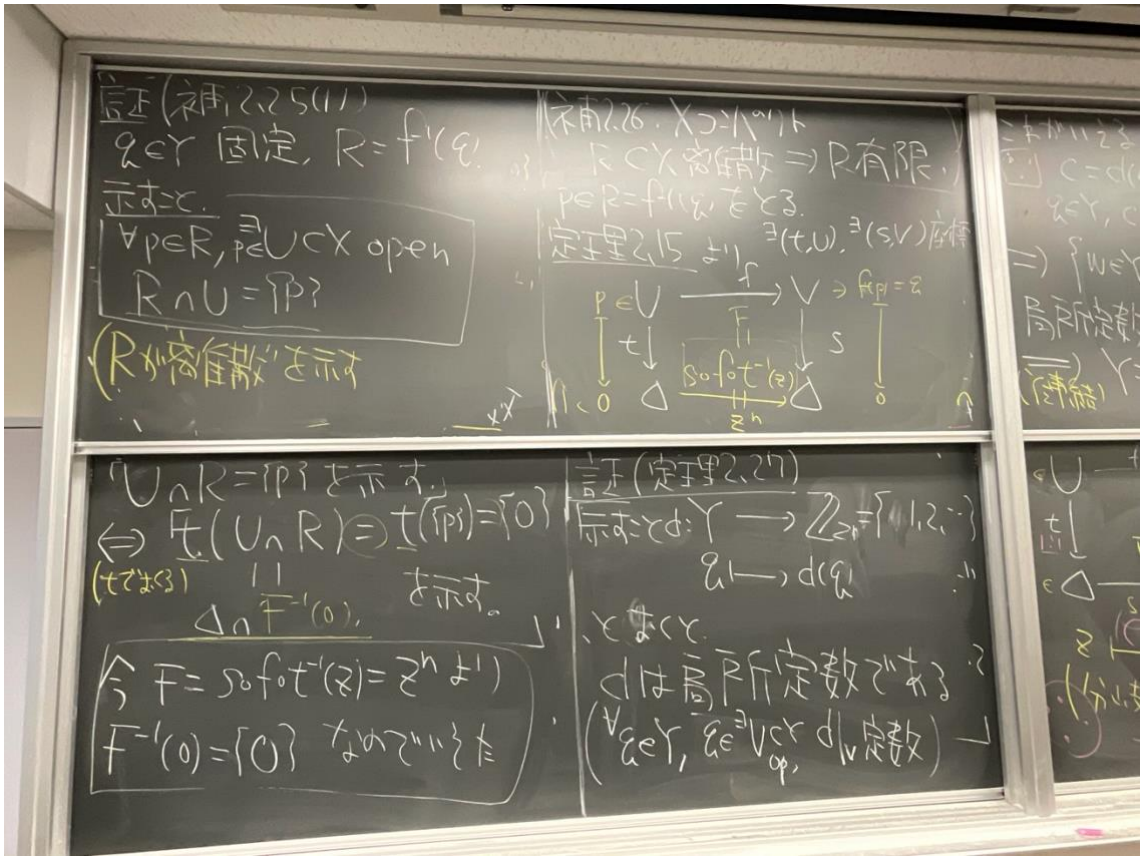
例2.20
$f: \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$
$[s:t] \mapsto [s^6 - t^6 : s^3 t^3]$
分岐指数と分岐点をもとめよ

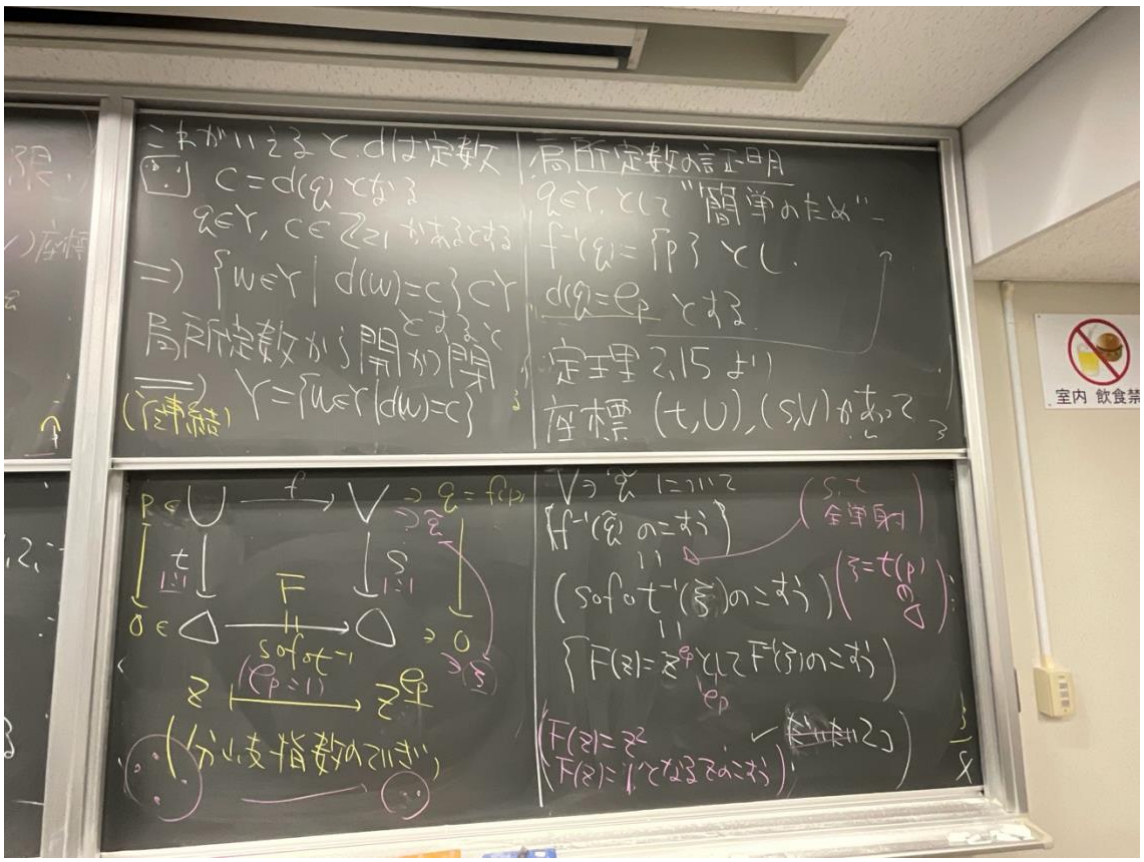

[同様] $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}_z$
(補1.6) $[a_0 : a_1] \to \frac{a_0}{a_1}$
$[z:1] \leftarrow\!\shortmid z$
$U_1 \xrightarrow{f} U_1$
$\varphi_1 \downarrow \qquad \downarrow \varphi_1$
$\mathbb{C}_z \xrightarrow{\varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}} \mathbb{C}_z$
$\varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}(z)$
$= \varphi_1 \circ f([z:1])$
$= \varphi_1([z^6-1 : z^2])$
$= \frac{z^6-1}{z^2}$
$F = \varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ とおく
$F'(z) = 2(2z^6+1)/z^3$
$p \in U_1 \setminus \{(0:1)\}$ が分岐点
$\Leftrightarrow F'(\varphi_1(p)) = 0$
(Cor 2.19)
e_p 分岐指数は
$\min\{k \mid F^{(k)}(\varphi_1(p)) \neq 0\}$
となる.
よって $p = [a_0 : a_1] \in U_1 \setminus \{(0:1)\}$
が分岐点
$\Leftrightarrow F'(\varphi_1(p)) = F'(\frac{a_0}{a_1}) = 0$
(左)
$\Leftrightarrow \frac{2\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^6 + 1}{\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^3} = 0$
(上)
$\Rightarrow a^6 = -\frac{1}{2}$ となる a が存在する
$[a_0 : a_1] = [a : 1]$


左の $[a:1]$ について
$e_{[a:1]} = 2$
(理由) $F'(a) = 0$
$F''(a) \neq 0$
$\Rightarrow e_{[a:1]} \overset{\text{Cor 2.19}}{=} \min\{k \mid F^{(k)}(a) \neq 0\}$
$= 2$
$p = [0:1]$ の場合は?
$\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C}_w$
$[a_0 : a_1] \to \frac{a_1}{a_0}$
$[1 : w] \leftarrow\!\shortmid w$
$U_1 \xrightarrow{f} U_0$
$\varphi_1 \downarrow \qquad \downarrow \varphi_0$
$\mathbb{C}_z \xrightarrow[G]{\varphi_0 \circ f \circ \varphi_1^{-1}} \mathbb{C}_w$
U_0 と $\mathbb{C}_w$ をみる
$G(z) = \varphi_0 \circ f \circ \varphi_1^{-1}(z)$
$[z:1]$
$= \varphi_0([z^6-1 : z^2])$
$= \frac{z^2}{z^6-1}$
$G'(0) = 0$
$p = [0:1]$ が分岐点
$\Leftrightarrow G'(\varphi_1(0:1)) = 0$
分岐指数
$G'(0) = 0$, $G''(0) \neq 0$
$\Rightarrow e_{(0:1)} = 2$
$p = [1:0]$ $\varphi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}(w) = \frac{w^2}{1-w^6}$
分岐点 $e_{(1:0)} = 4$


2.5 定理2.21 / 系2.22
X コンパクトリーマン面
f: X → Y 正則 で Y リーマン面
⇒ f は定値写像
f(X) = Y
となる f: X → C 正則 は定数
連結
証 定理2.15より 開写像 (正則)
f が定値でない
⇒ f(X) ⊂ Y open
開写像
⇒ f(X) コンパクト ⊂ Y Hausdorff
⇒ f(X) 閉
連結
⇒ Y = f(X)
2.6 補題2.25 X, Y
f: X → Y 正則, コンパクト リーマン面
(1) ∀q ∈ Y, f⁻¹(q) = {p ∈ X | f(p) = q}
ファイバー
として f⁻¹(q) は有限こ
(2) f の分岐点も有限こ
(e_p > 1)
定理2.27 (左の状況で)
(1) ∀q ∈ Y,
d(q) = Σ_{p∈f⁻¹(q)} e_p は q によらない
とくに有限この Y の点をのぞいて
d(q) = (f⁻¹(q) のこ数).


この d(q) を deg f とかき
f の次数という
deg(f) = { f⁻¹(q) のこ数 (q が分岐値でない)
(f⁻¹(q) のこ数) より小さい (でまる)
例 f: CP¹ → CP¹
[s:t] → [s⁶ − t⁶ : s²t⁴]
分岐点 [0:1], [1:0], [1:a] (a⁶ = −1/2)
q ∈ CP¹ を q = [0:1] (分岐値でない)
f⁻¹([0:1]) = f⁻¹([0:ω]) ∪ f⁻¹([0:ω²]) ∪ f⁻¹([0:ω³])
f⁻¹(q) のこ数は?
⇔ p ∈ f⁻¹(q) で [s⁶ − t⁶ : s²t⁴]
[s:t] [0:1] のこ
⇔ s⁶ − t⁶ = 0 t⁶ = 1 の解
s²t⁴ = 1 の解 k = 0, 1, ..., 5
6コ
次数 deg(f) = 6
実はこれは s⁶ − t⁶ の 6 次同
CP¹ → CP¹
だいたい 6:1
(分岐値のまわりで 6:1)
6つの点が1つにまる
室内 飲食禁止


証(補題2.25(1))
$q \in Y$ 固定, $R = f^{-1}(q)$
示すこと.
$\forall p \in R, \exists U \subset X$ open
$R \cap U = \{p\}$
(Rが離散を示す
定理2.26. Xコンパクト
$R \subset X$ 離散 $\Rightarrow$ R有限.
$p \in R = f^{-1}(q)$ をとる.
定理2.15 より $\exists(t,U), \exists(s,V)$ 座標
$U \cap R = \{p\}$ を示す.
$\Leftrightarrow$ $t(U \cap R) = t(\{p\}) = \{0\}$
(tでなくる)
$\Delta \cap F^{-1}(0)$ を示す.
$\Leftarrow$ $F = s \circ f \circ t^{-1}(z) = z^n$ より)
$F^{-1}(0) = \{0\}$ なめでいえた
証(定理2.27)
示すこと: $Y \to \mathbb{Z}_{\geq 1} = \{1,2,\cdots\}$
$q \mapsto d(q)$
となくて
dは局所定数である
($\forall q \in Y, q \in \exists U \subset Y$ d|U定数)


これがいえると dは定数
$c = d(q)$ となる
$q \in Y, c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ があるとする
$\Rightarrow \{w \in Y \mid d(w) = c\} \subset Y$
局所定数から開が開
$Y = \{w \in Y \mid d(w) = c\}$
局所定数の証明
$q \in Y$ として "簡単のため"
$f^{-1}(q) = \{p\}$ とし.
$d(q) = e_p$ とする
定理2.15 より
座標 $(t,U), (s,V)$ があって
$p \in U \xrightarrow{f} V \ni q = f(p)$
$t \downarrow$ $\downarrow s$
$0 \in \Delta \xrightarrow{F} \Delta \ni 0$
$F = s \circ f \circ t^{-1}$
$z \mapsto z^{e_p}$
分岐指数のでばん
V の q について
$f^{-1}(q)$ のこわり
$(s \circ f \circ t^{-1}(z)$ のこわり)
$\{F(z) = z^{e_p}$ として $F(z)$ のこわり
$F(z) = z^{e_p}$
$F(z) = 1$ となるzのこわり
(全射)
(全単射)
$z = t(p)$ の Δ
室内 飲食禁