

前回  $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \infty$

$U_0 = \{[a_0 : a_1] \mid a_0 \neq 0\}$   
 $U_1 = \{[a_0 : a_1] \mid a_1 \neq 0\}$   
 $\mathbb{C}P^1 = U_0 \cup U_1$   
 $U_0 \cap U_1 = \{[a_0 : a_1] \mid a_0 \neq 0, a_1 \neq 0\}$

$\varphi_0: U_0 \rightarrow \mathbb{C}_w$   
 $[a_0 : a_1] \mapsto \frac{a_1}{a_0}$   
 $[1 : w] \mapsto w$

$\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{C}_z$   
 $[a_0 : a_1] \mapsto \frac{a_0}{a_1}$   
 $[z : 1] \mapsto z$

$\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}: \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_w$   
 $z \mapsto \frac{1}{z}$   
 $(z=0) \mapsto \infty$

$\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  正則写像の  
 today  $11-2$  面  $211$  キー

$\mathbb{C}P^1$  上の有理型関数  
 11-2 面  $211$  キー  
 $\text{ord}_p(f) > 0 \Leftrightarrow f$  は  $p$  で  
 $\text{ord}_p(f)$  の個数  
 $\text{ord}_p(f) < 0 \Leftrightarrow f$  は  $p$  で  
 $\text{ord}_p(f)$  の極

2章  $11-2$  面

定義 2.1  $(X, \tau)$  のとき

$X$  : 位相空間

$U_i \subset X$  開. ( $i \in I$ )

$\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{C}$

連続

$\Sigma$  (1)  $X$  の 2 可算連結 (内スド) (2)  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  ( $U_i \neq \emptyset$ ) (3)  $V_i \subset \mathbb{C}$  開.  $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$  同相 (4)  $\varphi_j = \varphi_i \circ \varphi_i^{-1}$  (5)  $\varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}$

$X = \mathbb{C}P^1$  ( $I = \{0, 1\}$ )  
 $\varphi_0: U_0 \rightarrow \mathbb{C}_w = V_0$  (左の)  
 $\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{C}_z = V_1$  (右の)  
 11-2 面  $211$  キー

$\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$   $z \neq 0$  上正則





2.3 有理型関数

定義 2.12  $X$  リーマン面  
 $U \subset X$  (連結開集合)  
 $f$  が  $U$  上の有理型関数  
 $\Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_n \in U$   
 $(11)$   $f = U \rightarrow \mathbb{C}$  正則

かつ  $a_1, \dots, a_n$  は  $f$  の極点  
 もたない  
 $f = U$  上の有理型  
 $p \in U$  なら  $\text{ord}_p(f)$  を  
 $\text{ord}_p(f) > 0 \Leftrightarrow f$  は  $p$  で  $\text{ord}_p(f)$  の零点  
 $\text{ord}_p(f) < 0 \Leftrightarrow f$  は  $p$  で  $-\text{ord}_p(f)$   
 の極点

例 2.13  $X = \mathbb{C}$   
 $f(z) = \frac{z}{(z-1)^3}$  とする  
 有理型  $a_1 = 1$  とすると  
 $f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$  正則  
 $a_1$  で 3 次の極点

$\text{ord}_1(f) = -3$   
 $\text{ord}_0(f) = 1$  (1次)  
 例  $g(z) = \frac{(z-1)^2}{z^3(z-2)^5}$   
 $\text{ord}_0 g = 2$  (1次)  
 $\text{ord}_1 g = -3$   $\text{ord}_2 g = -5$

定理 2.14  $X$  リーマン面  
 $f = X$  上の有理型関数  
 $f = X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$   
 $\sigma \mapsto \begin{cases} f(\sigma) & f(\sigma) \neq \infty \\ \infty & f(\sigma) = \infty \end{cases}$   
 $(\sigma) = 0 \Rightarrow f(\sigma) = \frac{1}{f(\sigma)}$  (1次)  
 $(\sigma) = 0 \Rightarrow f(\sigma) = \infty$  (1次)  
 $(\sigma) = 0 \Rightarrow f(\sigma) = \infty$  (1次)

定理 2.15  $X, Y$  リーマン面  
 $f = X \rightarrow Y$  正則  
 $p \in X, q = f(p) \in Y$   
 $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$   
 $\Delta$  の円周

このときある  $(t, u)$  の座標が  
 $(S, V) f_{\pi}$   
 かつ  
 $S \circ f \circ t^{-1}(z) = z^n$  となる  
 この  $n$  は  $f$  の次数

例 2.1)  $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  |  $p = 0 \in X, q = f(p) = 1 \in Y$   
 1-2-面  $Y = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$   $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} = X$   
 $f: X \rightarrow Y$  正則,  
 $z \mapsto z^h (h \in \mathbb{Z})$   
 このとき  $(t, u) = p = 0$  の座標空間  
 $(S, V)$   $q = 1$  :  
 かつ  $S \circ f \circ t^{-1}(z) = z^h$  とおくと

2.  $S(z) = z$   
 $t(z) = z \sqrt{1+z}$  とする  
 (1)  $z$  存在する??  
 すると  $f(z) = t(z)^2$  (正則写像)  
 すると  $f(t^{-1}(w)) = (t(t^{-1}(w)))^2 = w^2$   
 ( $z = t^{-1}(w)$  とおくと)

$\Rightarrow S \circ f \circ t^{-1}(w)$   
 $= w^2$

---

1-2-面の正則写像は  
 局所的に  $z \mapsto z^h$  に  
 なる