

$$G_z(z) := \frac{(z-a)^m f_z(z)}{z^n}$$

$$G_w(w) = \frac{w^{n+m} f_w(w)}{(1-aw)^m} \quad \text{とす}$$

$$G_z, G_w: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ 正則}$$

$$G_z\left(\frac{1}{w}\right) = G_w(w) \quad \text{とす}$$

$$\Rightarrow G: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{C} \text{ 正則}$$

$$(1) \quad G \text{ は定数}$$

$$\Rightarrow G_z(z) = \frac{(z-a)^m f_z(z)}{z^n}$$

$$\Leftrightarrow f_z(z) = \frac{c z^n}{(za)^m}$$

系 1.26 $\mathbb{CP}^1$ 上の有理型関数は

$$\frac{G(x_0, x_1)}{F(x_0, x_1)} \quad F, G \text{ は同次}$$

例 $\frac{x_0^2}{x_0^2 + x_1^2} \frac{x_1^3}{x_0^3 \dots}$

定義 1.27 (位数)

$f: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ 有理型関数

$$(f_z(z) = f(z/1) = \frac{f(z)}{G(z, 1)})$$

① 点 $[a:1]$ での位数 $\text{ord}_p f$

$$f_z(z) = \frac{(z-a)^m h(z)}{(z-a)^n} \quad \text{正則} \quad h(a) \neq 0$$

とす m とす

② $[1:0]$ においては

$$f_w(w) = f(1/w) = \frac{f_z(z)}{G_z(z)}$$

$$f_w(w) = w^m \tilde{h}(w)$$

とす m とす

正則 $\tilde{h}(0) \neq 0$

例 1.28

$$f_z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad f_w: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{z}{(z-1)^3} \quad w \mapsto \frac{w^2}{(1-w)^3}$$

$$f_z\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\frac{1}{w}}{\left(\frac{1}{w}-1\right)^3} = \frac{w^2}{(1-w)^3} = f_w(w)$$

$$\Leftrightarrow f: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{C} \text{ 有理型}$$

点 $p = [a:1]$ での位数

$f_z = \frac{z}{(z-1)^3}$ の "位数"

$z=0, f_z = z \cdot \frac{1}{(z-1)^3}$

$$\Rightarrow \text{ord}_{(0,1)}(f) = 1$$

$z=1 \Rightarrow f_z = (z-1)^{-3} \cdot z$

$$\Rightarrow \text{ord}_{(1,1)}(f) = -3$$

$\text{ord}_p(f) > 0 \Leftrightarrow p \text{ で } f \text{ は } \text{ord}_p \text{ の$

$< 0 \Leftrightarrow -\text{ord}_p \text{ の } f \text{ の$

② $f_w = w^2 \times \frac{1}{(w-1)^3}$
 $\Rightarrow \text{ord}_{[1:0]}(f) = 2$

$[0:1]$	1	$\mathbb{C}_z$
$[1:1]$	-3	
$[1:0]$	2	

1.4 $\mathbb{CP}^1$ から $\mathbb{CP}^1$ への正則写像
 定義 1.29 $f: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ の正則写像
 $\iff p \in \mathbb{CP}^1, z = f(p) \in \mathbb{CP}^1$ とするとき

(1) p, q がともに $[1:0]$ でないとき
 $F_1(z) = t(f(z=1))$ が正則
 (t, s は $\mathbb{CP}^1$ の座標系)
 $\hookrightarrow$ まい $f(z=1) = (g(z=1), h(z=1))$
 $t(f(z=1)) = \frac{h(z=1)}{g(z=1)}$ と表わす

Commutative diagram:
 $\begin{array}{ccc} \mathbb{CP}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{CP}^1 \\ \cup_{(a_0:a_1)} [z=1] & \xrightarrow{f} & \cup_{(b_0:b_1)} [z=1] \\ \downarrow \frac{a_0}{a_1} & & \downarrow \frac{b_0}{b_1} \\ \mathbb{C}_z & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}_z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}_z & \xrightarrow{t(f(z=1))} & \mathbb{C}_z \end{array}$

1.3 of $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ | 正則写像の正則性
 $(X_0: X_1) \rightarrow (X_0^2: X_1^2)$
 $[z=1] \xrightarrow{f} [z^2=1^2]$

Commutative diagram:
 $\begin{array}{ccc} \cup_{(a_0:a_1)} [z=1] & \xrightarrow{f} & \cup_{(b_0:b_1)} [z=1] \\ \downarrow \frac{a_0}{a_1} & & \downarrow \frac{b_0}{b_1} \\ \mathbb{C}_z & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}_z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}_z & \xrightarrow{z^2} & \mathbb{C}_z \end{array}$

③ $p=1$ のとき ($q=[1:0]$ は必ず存在)
 $(X_0: X_1) \rightarrow (X_1: X_0 - X_1)$
 ① $p \neq 1$ のとき
 $\cup_{[z=1]} \rightarrow \cup_{[1:z-1]}$
 $\downarrow \uparrow$
 $\mathbb{C}_z \xrightarrow{z} \mathbb{C}_z$

Commutative diagram:
 $\begin{array}{ccc} \cup_{[z=1]} & \xrightarrow{f} & \cup_{[1:z-1]} (b_0:b_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}_z & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}_z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}_z & \xrightarrow{z-1} & \mathbb{C}_z \end{array}$

$\frac{1}{2} p z = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{2} p z}$
 $\propto \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{2} p z}$