B　レポート問題

問題 1. ベクトル束の filtration

$$0 =: E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_l := E.$$

となる filtration で各 $G_i := E_i/E_{i-1}$ が rank r_i の ベクトル束になるものが存在すると仮定する.

1.$\Delta(E) := c_1(E)^2 - 2\mathrm{rank}(E)\mathrm{ch}_2(E)$ と定義する.

$$0 \to E_{i-1} \to E_i \to G_i \to 0$$

に Chern character の加法性を用いることで,

$$\frac{\Delta(E)}{r} - \sum_{i=1}^{l} \frac{\Delta(G_i)}{r_i} \quad = \quad \left(\frac{c_1(E)^2}{r} - \sum_{i=1}^{l} \frac{c_1(G_i)^2}{r_i} \right) \text{を示せ.}$$

2.

$$r \left(\sum_{i=1}^{l} \frac{c_1(G_i)^2}{r_i} - \frac{c_1(E)^2}{r} \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq l} r_i r_j \left(\frac{c_1(G_i)}{r_i} - \frac{c_1(G_j)}{r_j} \right)^2 \text{を示せ.}$$

3. 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\Delta(E)}{r} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\Delta(G_i)}{r_i} - \frac{1}{r} \sum_{1 \leq i < j \leq l} r_i r_j \left(\frac{c_1(G_i)}{r_i} - \frac{c_1(G_j)}{r_j} \right)^2 \in H^4(X, \mathbb{R})$$

問題 2. (X, ω) をコンパクト Kähler 多様体とし, rank r のベクトル束 E の slope を次で定める.

$$\mu(E) := \frac{c_1(E) \cdot [\omega]^{n-1}}{\mathrm{rank}(E)}$$

ベクトル束の完全系列 $0 \longrightarrow S \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ について, 以下の等式を示せ.

$$\mathrm{rank}\, S(\mu(E) - \mu(S)) + \mathrm{rank}\, Q(\mu(E) - \mu(Q)) = 0$$

問題 3. ベクトル束 E について maximum slope , minimal slope を次で定義する.

$$\mu^{\max}(E) := \sup \{\mu(F) \mid 0 \neq F \subseteq E,\ F \text{ torsion-free}\}.$$

$$\mu^{\min}(E) := \inf \{\mu(Q) \mid E \twoheadrightarrow Q,\ Q \text{ torsion-free and } Q \neq 0\}.$$

ここで $F = E$, $Q = E$ も含めることに注意する. この時 E-semistable は $\mu^{\max}(E) = \mu(E)$ と同値であり, また $\mu^{\min}(E) = \mu(E)$ と同値であることを示せ

問題 4. 1 以上の整数 $r_1, \ldots, r_l$, 2 以上の整数 n, 実数 $\mu_1, \ldots, \mu_l, d$ (ただし $d > 0$) が

$$\mu_1 > \cdots > \mu_l \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{l} r_i \mu_i = d \quad \sum_{i=1}^{l} r_i = n$$

を満たしているとする. この時次が成り立つことを示せ

1. $d - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{l} r_i \mu_i^2 \geq 0.$
2. $l \geq 2$ かつ上の等号が成立する時, $l = 2, \mu_1 = d, \mu_2 = 0, r_1 = 1, r_2 = n - 1$ が成り立つ

問題 5. 1 以上の整数 $r_1, \ldots, r_l$, 3 以上の整数 n, 実数 $\mu_1, \ldots, \mu_l, d$ (ただし $d > 0$) が

$$\mu_1 > \cdots > \mu_l \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{l} r_i \mu_i = d \quad \sum_{i=1}^{l} r_i = n$$

を満たしているとする.

この時次が成り立つことを示せ

1. $l \geq 2$ を仮定するとき, $\frac{1}{d} \sum_{i=2}^{l} r_i \mu_i^2 \leq \mu_1 - \frac{r_1 \mu_1^2}{d}$ である.
2. $l \geq 2, r_1 \geq 2$ を仮定する時

$$\begin{aligned} -\frac{r_1^2}{d(r_1+1)} \mu_1^2 - \frac{1}{d} \sum_{i=2}^{l} r_i \mu_i^2 + d &\geq \frac{1}{d} \left(\frac{r_1}{r_1+1} \mu_1^2 - d\mu_1 \right) + d \\ &\geq \left(\frac{1}{r_1(r_1+1)} - \frac{1}{r_1} + 1 \right) d \geq \frac{2}{3} d \end{aligned}$$

   という不等式が成り立つ. (ヒント 一つ目の不等式は 1 を使う. 二つ目の不等式は $\mu_1 \leq \frac{d}{r_1}$ と 2 次関数の最大最小問題. 三つ目の不等式も $r_1 \geq 2$ の最大最小問題.)
3. 2 の等号が全て成立する時, $l = 2, \mu_1 = \frac{d}{2}, \mu_2 = 0, r_1 = 2, r_2 = n - 2$ が成り立つことを示せ
4. $l \geq 2$ かつ $r_1 = 1$ を仮定する時

$$d - \frac{1}{d} \sum_{i=2}^{l} r_i \mu_i^2 \geq d - \mu_1 + \frac{\mu_1^2}{d} \geq \frac{3}{4} d.$$

   という不等式が成り立つ
5. $l \geq 2$ かつ $r_1 = 1$ を仮定する時, $d - \frac{1}{d} \sum_{i=2}^{l} r_i \mu_i^2 > \frac{3}{4} d$ である.(つまり等号は成立しない)