昨日 E 正則ベクトル束

h Hermite計量

曲率

$$F_h = \boxed{R^{\alpha}_{\beta i \bar{j}}} \underbrace{dz^i \wedge d\bar{z}^j}_{(1,1)\text{ form}} \otimes \underbrace{e^{*\beta} \otimes e_\alpha}_{End(E)}$$

($z^1, \ldots, z^n$ 座標, $e_1, \ldots, e_r$ local frame

Chern類 $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{R})$

・存在する。(ちなみに位相不変量である)

(∵トポロジーでも定義できる)

・曲率をつかってていぎできる

$$c_1(E) = c_1(\det E)$$

$$= \left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E,h}\right] = \left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \frac{-\partial^2 \log\det h}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} dz^i \wedge d\bar{z}^j\right] \in H^2(X, \mathbb{R})$$

$$\left(ch_2(E) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4\pi^2} \mathrm{tr}(F_{E,h} \wedge F_{E,h})\right] \in H^4(X, \mathbb{R}) \right.$$

$$\Delta(E) = 2r\, c_2(E) - (r-1)\, c_1(E)^2$$

$$= \left[\frac{r}{4\pi^2} \mathrm{tr}(F^0_{E,h} \wedge F^0_{E,h})\right] \in H^4(X, \mathbb{R})$$

Here

$$F^0_{E,h} = F_{E,h} - \underbrace{\frac{1}{r}(\mathrm{tr} F_{E,h})}_{(1,1)\text{-form}} \mathrm{Id}_E$$

4 Hermite-Einstein計量

<u>Def 4.1</u> X n次元コンパクト複素多様体

ω Kähler form

$$\omega \underset{\text{local}}{=} \sqrt{-1}\, g_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

とかける.

$$\Lambda_\omega \left(\sum \sqrt{-1}\, \alpha_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j \right)$$

($L_\omega = \omega \wedge \cdot$ のずいはん)

$$\underset{\text{def}}{=} g^{\bar{j}i}\, \alpha_{i\bar{j}} \quad (C^\infty \text{ function})$$

ここで $g^{\bar{j}i}$ は $g_{i\bar{j}}$ の逆行列

$$\left(g^{\bar{k}i} g_{j\bar{k}} = \underbrace{\delta^i_j}_{\text{dirac delta}},\ g_{j\bar{k}} g^{\bar{k}i} = \delta^i_j \right)$$

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_h\right)$$

$$\underset{\text{def}}{=} \sqrt{-1}\Lambda_\omega\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^{\alpha}_{\beta i\bar{j}}\, dz^i\wedge d\bar{z}^j\otimes e^{*\beta}\otimes e_\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} g^{\bar{j}i} R^{\alpha}_{\beta i\bar{j}}\, \underbrace{e^{*\beta}\otimes e_\alpha}_{\mathrm{End}(E)}$$

Prop 4.4 α, β (1,1) form について

- $n\,\alpha\wedge\omega^{n-1} = (\Lambda_\omega\alpha)\cdot\omega^n$
- $n(n-1)\alpha\wedge\beta\wedge\omega^{n-2}$
  $= \left(\Lambda_\omega\alpha\,\Lambda_\omega\beta - \underbrace{\langle\alpha,\beta\rangle_\omega}_{\text{内積(資料に)}}\right)\omega^n$

(Cor 4.5 $\mathrm{tr}_{E,h}$ 版)

Def 4.6 h が E の Hermite-Einstein

$\Longleftrightarrow$ 定数 c があって、

$$\Lambda_\omega\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h}\right) = c\,\mathrm{Id}_E \quad (\text{in } \mathrm{End}(E)) \qquad (4.1)$$

$\Longleftrightarrow$ (右上) $\quad g^{\bar{j}i}R^{\beta}_{i\bar{j}\alpha} = c\,\delta^{\beta}_{\alpha} \quad {}^{\forall}\alpha,\beta = 1,\ldots,r$

Prop 4.7 (4.1) において

$$c = \frac{n\int_X \mathrm{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h}\right)\wedge\omega^{n-1}}{r\int_X \omega^n} = \frac{n\,c_1(E)\cdot[\omega]^{n-1}}{r[\omega]^n}$$

$(r = \mathrm{rank}(E))$

$\boxed{\text{pf}}$ $cr = \mathrm{tr}(c\,\mathrm{Id}_E) \underset{(4.1)}{=} \mathrm{tr}\left(\Lambda_\omega \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_h\right)$

$$\Rightarrow c\,\boxed{r\int_X \omega^n} = \int_X \mathrm{tr}_E\,\boxed{\left(\Lambda_\omega \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_h\right)\omega^n}$$

$$\underset{(\text{Prop } 4.4)}{=} \int_X n\,\mathrm{tr}_E\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_h\right)\omega^{n-1}$$

$\Longrightarrow c =$ (ほしい式)

最後について

$$\int_X \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{tr} F_h\right)\omega^{n-1}$$ (Chern類のていぎ)

$$= c_1(E)\,\omega^{n-1}$$

Prop 4.11 ① 直線束はHE（Hermite-Einstein）をもつ

② (E,h)が定数cのHE
$\iff$ (E^*,h^*)は定数$-c$のHE

③ (E_1,h_1), (E_2,h_2) が定数 c_1, c_2 のHEなら$(E_1\otimes E_2, h_1\otimes h_2)$も定数 c_1+c_2 のHE

④ $(E_1\oplus E_2, h_1\oplus h_2)$が定数$c$のHE
$\iff$ (E_i,h_i)が定数cのHE $(i=1,2)$

証 (2)

$F_{E^*, h^*} = \underline{R^{*\alpha}_{\beta i \bar{j}}} dz^i \wedge d\bar{z}^j \otimes e^{*\beta} \otimes e_\alpha$ とすると

$R^{*\alpha}_{\beta i \bar{j}} = - R^{\beta}_{\alpha i \bar{j}}$ となる

$(F_{h^*} = - {}^t F_h)$ □

③ $F_{E_1 \otimes E_2} = F_{E_1} \otimes I_{dE_2} + I_{dE_1} \otimes F_{E_2}$

④ $F_{E_1 \oplus E_2} = \begin{pmatrix} F_{E_1} & 0 \\ 0 & F_{E_2} \end{pmatrix}$

さつから（資料にくわしい証明）

Thm 9.12 Bogomolov-Gieseker不等式

Eが HE計量hをもつ

$$\Longrightarrow \Delta(E)[\omega]^{n-2} = \left(2r c_2(E) - (r-1)c_1(E)^2\right)[\omega]^{n-2} \geq 0$$

さらに等号成立するとき

$$F_{E,h} = \frac{1}{r}\underbrace{\mathrm{tr}(F_h)}_{(1,1)\text{form}} \cdot \mathrm{Id}_E$$ となる

(Projectively Hermition flat という)

Rem あとで slope semistable ⟹ BG不等式

Miyaokaよりで代数的証明

$\boxed{\text{証明}}$ $\alpha = \frac{1}{r}\operatorname{tr}(F_h)$ (1,1) form

$$\overset{\circ}{F}_{E,h} = F_h - \alpha \, \mathrm{Id}_E \quad \text{(trace free part)}$$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Lambda_\omega \alpha \underset{(\text{ていぎ})}{=} \frac{1}{r}\Lambda_\omega \operatorname{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_h\right)$$

$$\boxed{\Lambda_\omega\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_h\right) = c\,\mathrm{Id}_E} \; \mathrm{tr}$$

$$= \frac{c}{r}\operatorname{tr}(\mathrm{Id}_E) = c.$$

$$\Longrightarrow \Lambda_\omega\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\overset{\circ}{F}_{E,h}\right)$$

$$\underset{(\text{ていぎ})}{=} \Lambda_\omega\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_h\right) - \overbrace{(\Lambda_\omega \alpha)}^{c}\,\mathrm{Id}_E$$

$$\underset{\text{HE仮定}}{=} c\,\mathrm{Id}_E - c\,\mathrm{Id}_E = 0 \quad \square$$

$$\Delta(E)[\omega]^{n-2}$$

$$\overset{\text{昨日}}{=} \int_X \frac{r}{4\pi^2} \operatorname{tr}\left(F^0_{E,h} \wedge F^0_{E,h}\right) \wedge \omega^{n-2}$$

$$= \int_X \frac{-r}{4\pi^2} \operatorname{tr}\left(\sqrt{-1}F^0_{E,h} \wedge \sqrt{-1}F^0_{E,h}\right) \wedge \omega^{n-2}$$

$$\Lambda_\omega\left(\sqrt{-1}\alpha_{i\bar j}\, dz^i \wedge d\bar z^j\right) = g^{\bar j i}\alpha_{i\bar j}$$

$$\left(\alpha \wedge \rho_h \wedge \omega^{n-2}\right.$$

$$\overset{\text{Prop 4.4 (Cor 4.5)}}{=} -\frac{1}{4\pi^2 n(n-1)} \int_X \operatorname{tr}\left[\underbrace{\left(\Lambda_\omega \sqrt{-1}F^0_h\right)^2}_{=0}\right]\omega^n$$

$$+ \frac{r}{4\pi^2 n(n-1)} \int_X \operatorname{tr}\left(\underbrace{\left\langle \sqrt{-1}F^0_h, \sqrt{-1}F^0_h \right\rangle_\omega}_{\geqq 0\ \text{内積}}\right)\omega^n$$

$$\geqq 0.$$

$= 0$ ならば

$\sqrt{-1}F_h^0 = 0$ より

$F_h^0 = 0$ であり

$$F_h = \frac{1}{r}(\mathrm{tr} F_h)\,\mathrm{Id}_E \quad \square$$

Cor 4.15 $c_1(E) = 0$ かつ

E が HE 計量 h をもつならば

$$c_2(E)[\omega]^{n-2} \geq 0.$$

$=$ 成立なら別の計量 h' があって

$$F_{h'} \equiv 0 \quad \text{(Hermitian flat という)}$$

$\boxed{\text{等号}}$ $c_2(E)[\omega]^{n-2} \geq 0$ (Thm 9.14より)

等号成立 $\Rightarrow$ $F_h = \alpha\,\mathrm{Id}_E$ ($\frac{1}{r}\mathrm{tr}(F_h)$)

$\Rightarrow \left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\alpha\right] = \left[\frac{1}{r}\boxed{\mathrm{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_h\right)}\right]$ — $c_1(E)$ の代表元

$\boxed{H^2(X,\mathbb{R})}$ $= \frac{1}{r}c_1(E) = 0$ (かてい)

$\Rightarrow$ α は d-exact

$\xRightarrow[\substack{\omega\ \text{Kähler} \\ (\partial\bar\partial\text{-Lem})}]{}$ $\alpha = -\partial\bar\partial\chi$ なる $\chi \in C^\infty(X)$ がある

よって $h' = e^{-\chi}h$ とすると

$F_{h'} \underset{(\text{テンソル積の曲率})}{=} (\partial\bar\partial\chi)\,\mathrm{Id}_E + F_h = -\alpha\,\mathrm{Id}_E + \alpha\,\mathrm{Id}_E = 0$

$\boxed{\text{資料4.5}}$ Kähler-Einstein計量

<u>Def</u> ω Kähler計量

$$\omega = \sqrt{-1}\, g_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

$$\mathrm{Ric}(\omega) \underset{\text{def}}{=} -\frac{\partial^2 \log(\det g)}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

とおく

$\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega$ となる計量を

Kähler-Einstein計量という

<u>Rem</u> ω Kähler計量

$\Longrightarrow$ T_X に Hermte計量が入る

Prop 4.20 ω が KE

⟹ T_X は HE をもつ

とくに
$$\left(c_2(T_X) - \frac{(n-1)}{2n} c_1(T_X)^2\right)[\omega]^{n-2} \geq 0.$$

($n=2 \Longrightarrow c_2(T_X) - \frac{1}{4} c_1(T_X)^2 \geq 0$)

Thm 4.21 [Chen-Ogiue 75] [Yau 77]

X が Kähler-Einstein 計量をもつとき,

$$\left(c_2(X) - \frac{n}{2(n+1)} c_1(X)^2\right)[\omega]^{n-2} \geq 0$$

Miyaoka-Yau

= 成立 ⟹ $X_{univ} \simeq \mathbb{CP}^n, \mathbb{C}^n$, open unit ball in $\mathbb{C}^n$

$n=2 \to (c_2 - \frac{1}{3} c_1^2)$

Thm (Yau 77)

K_X positive (ample) or $c_1(K_X)=0$

$\Longrightarrow \exists$ KE $\Rightarrow$ MY holds

$-K_X$ ample (Fano) は一般に KE をもたない。

Thm 4.26 (Druel-Guenancia-Păun 24, Greb-Kebekus-Peternell 22)

X Fano K semistable

$\Longrightarrow$ MY holds

5 Slope-Stability

torsion-free sheaf

$\cup$

ベクトル束 = locally free sheaf

Def 5.1 E torsion-free sheaf

$$\mu(E) = \frac{c_1(E)\cdot[\omega]^{n-1}}{\operatorname{rank} E}$$

slope

$$\underset{(E\text{ベクトル束})}{=} \frac{\int_X \operatorname{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_h\right)\wedge\omega^{n-1}}{\operatorname{rank} E}$$

E が (Mumford-Takemoto のいみで) stable とは $\operatorname{rank} F \neq \operatorname{rank} E$ なる $\forall F \subsetneq E$ ($0 \neq F$) となる torsion-free sheaf について

$$\mu(F) < \mu(E)$$

E semistable とは $\forall F \subseteq E$ ($0 \neq F$) について $\mu(F) \leqq \mu(E)$

レポート Lem5.4

$0 \to S \to E \to Q \to 0$ 完全

$\Rightarrow \operatorname{rank}(S)(\mu(E)-\mu(S))$

$\qquad + \operatorname{rank}(Q)(\mu(E)-\mu(Q)) = 0$

Hint $c_1(E) = c_1(Q) + c_1(S)$

$\operatorname{rank}(E) = \operatorname{rank}(Q) + \operatorname{rank}(S)$

Cr E stable (semistable) とは

$\forall E \twoheadrightarrow Q$ $Q \neq 0$ torsion free について

$\mu(Q) > \mu(E)$ $(\mu(Q) \geq \mu(E))$

Prop5.6 (1) 直線束は stable

(2) E stable (semistable) $\Rightarrow E^*$ もそう

HEと対応

(3) E_1, E_2 semistable

$\Longrightarrow E_1 \otimes E_2$ semistable.

(4) $E_1 \oplus E_2$ semistable

$\Longleftrightarrow E_1, E_2$ semistable

& $\mu(E_1) = \mu(E_2)$

Def 5.7 (Lazicのレクチャーノート)

$$\mu^{max}(E) = \sup\{\mu(F) \mid 0 \neq F \subseteq E \ (E = F \text{ も可})\}$$

$$\mu^{min}(E) = \inf\{\mu(Q) \mid E \twoheadrightarrow Q \neq 0, \ Q \text{ torsion free } (E = Q \text{ も可})\}$$

Prop 5.8 ① $\mu^{\max}(E) < +\infty$

② $\mu^{\max}(E) = \mu(E_{\mathrm{Max}})$ となる

一番(包含関係で)大きいものがある

③ E semistable $\iff \mu^{\max}(E) = \mu(E)$

$\iff \mu^{\min}(E) = \mu(E)$

④ $\mu^{\max}(E) = \mu^{\max}(E^{**}) = -\mu^{\min}(E)$

⑤ $\mu^{\max}((E_1 \otimes E_2)^{**}) = \mu^{\max}(E_1) + \mu^{\max}(E_2)$

⑤+③ $\Longrightarrow$ 上の(3.1)

目目目：次のfiltrationをつかう

(

Thm 5.9 (Harder-Narasimhan filtration)

E torsion free sheaf

$\Longrightarrow 0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_\ell = E$

となる torsion free sheaf の filtration で

① $G_i = E_i / E_{i-1}$ torsion free で semistable $\left(G_i \subset E/E_{i-1} \text{ で } \mu^{max}(E/E_{i-1}) = \mu(G_i) \right)$

② $\mu^{max}(E) = \mu(G_1) > \mu(G_2) > \cdots > \mu(G_\ell) = \mu^{min}(E)$

証) ①, ② と Th5.9.

$X \subset \mathbb{P}^N$ のとき $\exists$

$E \hookrightarrow A^{\oplus r}$　A: ample

$\Rightarrow \mu^{max}(E) \leq \mu^{max}(A^{\oplus r}) = r\mu(A) < \infty$

③ $A^{\oplus r}$ semistable

② 背理法 (Greb-Kebekus-Peternell 16)

Th5.9 は E_1 を E の sheaf で

$\mu^{max}(E) = \mu(E_1)$ となる

大きいものをとって、E/E_1 に帰納法

$\boxed{\mu(\text{torsion}) \geq 0}$

Thm 5.10 Jordan–Hölder filtration

E semistable

$\Rightarrow 0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_\ell = E$,

・ $G_i = E_i / E_{i-1}$ stable

・ $\mu(E) = \mu(G_1) = \cdots = \mu(G_\ell)$

Thm 5.11 Kobayashi–Hitchin対応

(Donaldson–Uhlenbeck–Yauの定理)

E ベクトル束について次は同値

① E が HE 計量をもつ

② $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_\ell$, E_i stable, $\mu(E_i)$ がすべてひとしい

(polystable)

$\boxed{\text{Cor 5.13}}$ E ベクトル束 BG

E stable $\Rightarrow$ $\left(2c_2(E)-(r-1)c_1(E)^2\right)[\omega]^{n-2} \geq 0$

"$=$" 成立 $\Rightarrow$ $\exists h$ 計量 $F_{E,h} = \frac{1}{r}(\mathrm{tr}\,F_h)\,\mathrm{Id}_E$

(stable $\underset{(\mathrm{Thm}\,5.11)}{\Longrightarrow}$ $\exists$HE $\underset{\mathrm{Thm}\,4.12}{\Longrightarrow}$ BG不等式)

$\boxed{\text{Thm 5.16}}$ E semistable $\Rightarrow$ BG不等式が成立

("$=$" 成立 $\Rightarrow$ $E\left\langle \frac{\det E^*}{r} \right\rangle$ nef)

(Thm 5.15) Hodge index Thm)

$$\left(c_1(E)^2[\omega]^{n-2}\right) \times \left([\omega]^n\right) \leq \left(c_1(E)[\omega]^{n-1}\right)^2$$

$\boxed{\text{Pf for Thm 5.16}}$ の Jordan-Hölder filtration をとる

$$\left(\frac{c_1(G_i)}{r_i} - \frac{c_1(G_j)}{r_j}\right)^2 \cdot [W]^{n-2} \qquad \left(r_i = \mathrm{rank}(G_i)\right)$$

$$\leq \frac{1}{[W]^n}\left[\left(\frac{c_1(G_i)}{r_i} - \frac{c_1(G_j)}{r_j}\right)[W]^{n-1}\right]^2$$

Hodge Index Thm
Thm 5.15

$$= \frac{1}{[W]^n}\left(\mu(G_i) - \mu(G_j)\right)^2 \qquad (\text{slope のていぎ})$$

$$= 0 \qquad (\text{JN のていぎ})$$

$$\frac{\Delta(E)}{r}[w]^{n-2} \qquad \left(\Delta(E) = 2r\,c_2(E) - (r-1)c_1(E)^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\Delta(G_i)}{r_i}[w]^{n-2} \quad (\geq 0 \text{ stable})$$

Prop 3.2.3 (レポート1)

$$- \underbrace{\frac{1}{r}\sum_{1\le i<j\le \ell} r_i r_j \left(\frac{c_1(G_i)}{r_i} - \frac{c_1(G_j)}{r_j}\right)^2 [w]^{n-2}}_{\geq 0}$$

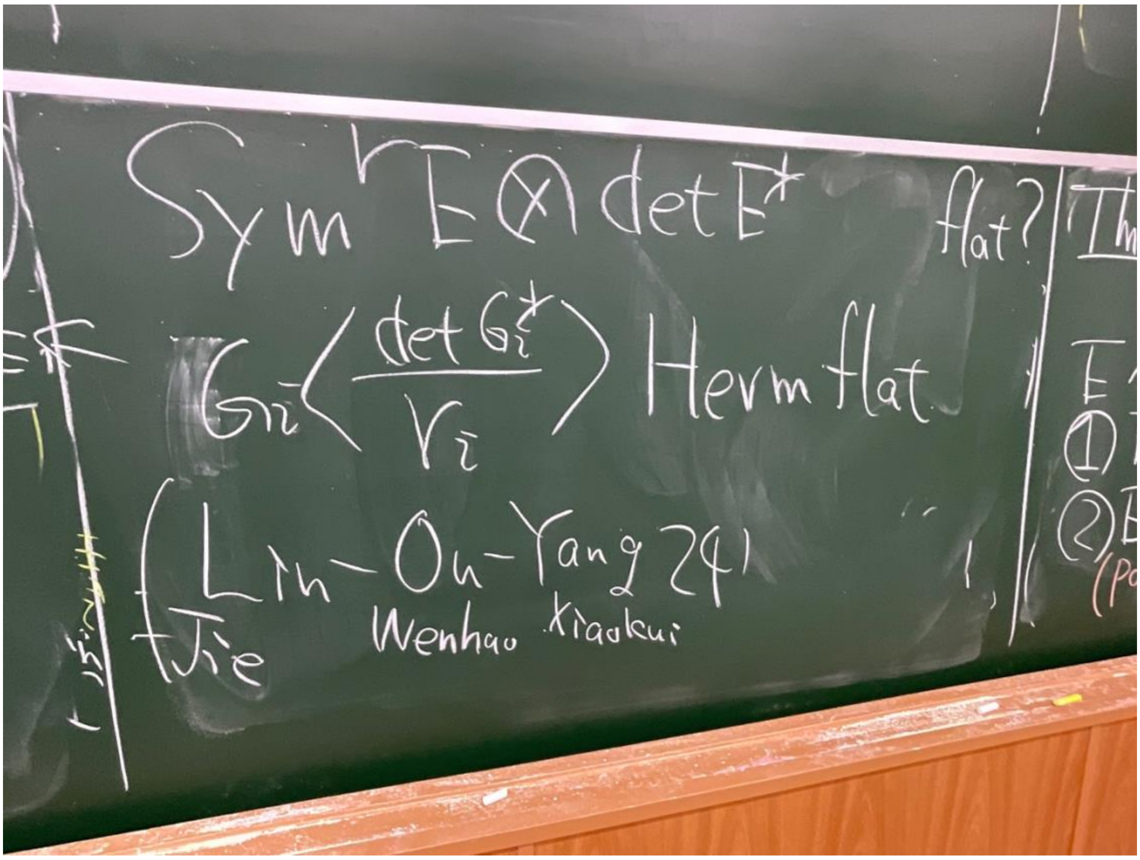
$$\geq 0 \;//$$

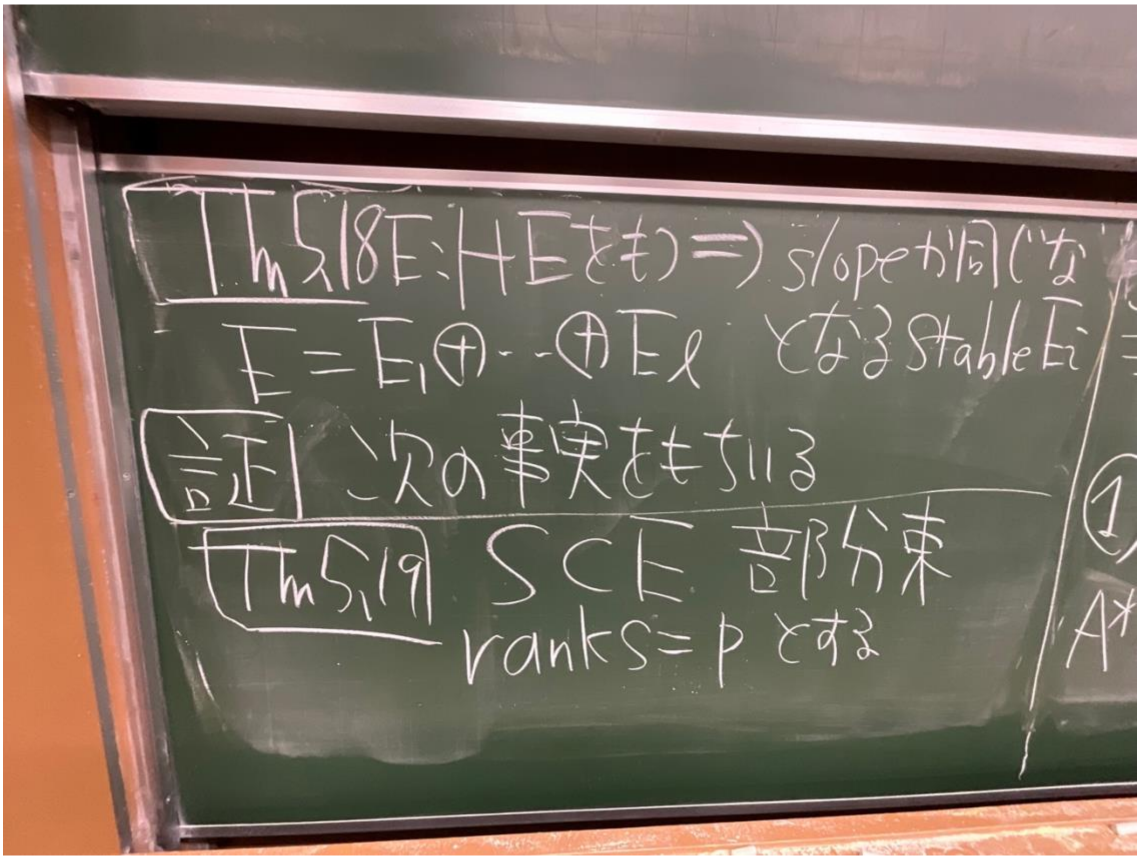
(等号成立

① $\Delta(G_i)[w]^{n-2} = 0 \Rightarrow \exists h \; F_{G_i,h} = \alpha \mathrm{Id}_E$

② $\dfrac{c_1(G_i)}{r_i} = \dfrac{c_1(E)}{r} \Rightarrow \alpha = \dfrac{c_1(E,h)}{r}$

Hodge index


Sym^r E ⊗ det E^* flat?
G_i ⟨det G_i^* / r_i⟩ Herm flat
(Lin-Ou-Yang '24)
Jie Wenhao Xiaokui


Thm 5.18 E: HE をもつ ⟹ slope が同じな
E = E_1 ⊕ ⋯ ⊕ E_l となる stable E_i
証) 次の事実をもちいる
Thm 5.19 S ⊂ E 部分束
rank S = p とする

このとき $0 \to S \to E \to Q \to 0$ 完全

$\exists A$ $\underbrace{\mathrm{Hom}(S,Q)}_{S^* \otimes Q}$ 値 $(1,0)$ form,

① $F_{E,h_E}|_S = F_{S,h_S} - A^* \wedge A$ End(S) 値 (1,1) fm

A^* は $h(A\xi, \eta) = h(\xi, A^*\eta)$ $\forall \xi \in A^0(S)$, $\forall \eta \in A^0(Q)$

② $A = 0 \Rightarrow E \simeq Q \oplus S$ 正則同型

Pf of Thm 5.18

$\forall S \subset E$ について $\mu(S) \leqq \mu(E)$ と

$\exists S$, $\mu(S) = \mu(E) \Rightarrow E \simeq S \oplus E/S$ 正則同型を示す.

(E は HE 計量 h をもつ

$$\Longrightarrow \sqrt{-1}\Lambda_\omega\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_h\right) = c\,\mathrm{Id}_E$$

$$c \underset{\text{prop 5.1.7}}{=} \frac{n\,C_1(E)[\omega]^{n-1}}{r[\omega]^n} \underset{\text{slope のていぎ}}{=} \frac{n}{\int_X \omega^n}\,\mu(E)$$

$$\Longrightarrow F_{S,h_S} \underset{\text{Thm5.18}}{=} F_{E,h_E}\big|_S + A^*\wedge A \qquad \exists A \in \mathrm{Hom}(S,Q)_{(1,0)}$$

$$\Longrightarrow \mu(S) \underset{\text{(ていぎ)}}{=} \frac{1}{r_S}\int_X \mathrm{tr}_S\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{S,h_S}\right)\wedge\omega^{n-1}$$

$$(=)\ \underbrace{\frac{1}{\mathrm{rk}\,S}\int_X \mathrm{tr}_S\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h_E}|_S\right)\wedge\omega^{n-1}}_{\text{HE}\quad \left(\overset{\text{HE}}{=}\mu(E)\ \text{Claim 5.20}\right)}$$

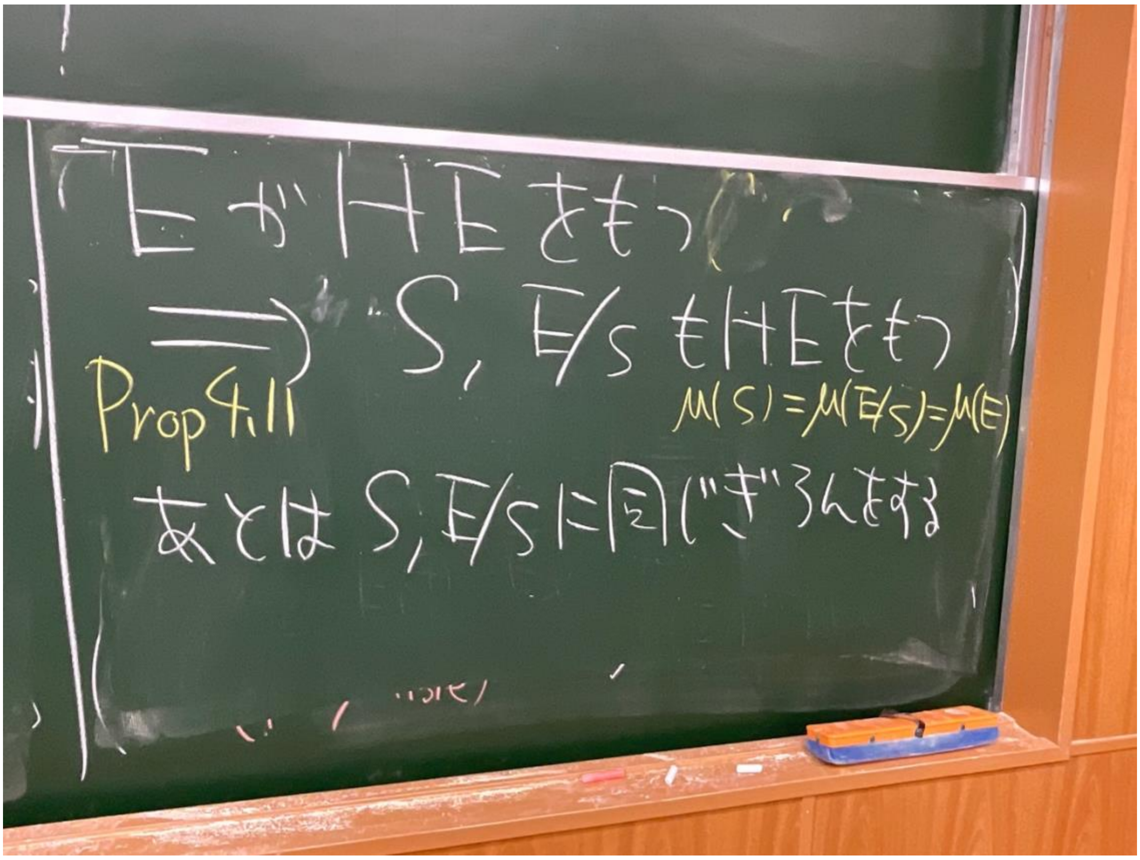
$$+\underbrace{\frac{1}{\mathrm{rk}\,S}\int_X \mathrm{tr}_S(A^*\wedge A)\wedge\omega^{n-1}}_{\text{一般論}\ \left(\leqq 0\ \text{で},\ =0 \iff A\equiv 0\quad \text{Claim 5.20}\right)}$$

$$\Longrightarrow\ \mu(S)\leqq\mu(E)\quad \forall S\subset E\ ?$$

If $\mu(S)=\mu(E)\Longrightarrow A=0$

$$\Longrightarrow\ E\ \underset{\text{正則同型}}{\cong}\ S\oplus E/S.$$

Thm 5.19


「EがHEをもつ」
⟹ S, E/S もHEをもつ
Prop 4.11
μ(S)=μ(E/S)=μ(E)
あとは S, E/S に同じぎろんをする