昨日

$(\mathfrak{U}=\{U\})$ 開被覆

$E \to X$ 正則ベクトル束

$\Longleftrightarrow \exists\, T_{UV} : U \cap V \to GL(r,\mathbb{C})$ 正則

$$\begin{cases} T_{UV}T_{VW}T_{WU} = Id_r \\ T_{UU} = Id_r \end{cases}$$

計量 h

$\Longleftrightarrow h_U : U \to GL(r,\mathbb{C})$ Hermite行列　C^∞ map 正定値

s.t. $h_V = {}^tT_{UV}\, h_U\, \overline{T_{UV}}$

$r=1 \Longrightarrow h_V = |T_{UV}|^2 h_U$

$h_U : U \to \mathbb{R}_{>0}$ C^∞

行列

曲率 F_h $\underbrace{\mathrm{End}(E)}_{E\otimes E^*}$ 値 (1,1) form

$$F_h \underset{\text{locally}}{=} \boxed{R^\alpha_{\beta i\bar j}}\ \underbrace{dz^i\wedge d\bar z^j}_{(1,1)\text{ form}} \otimes \underbrace{e_\alpha \otimes e^{*\beta}}_{E\otimes E^*}$$

hとhの2回びぶん　正則

($z^1,\ldots,z^n$ 座標　$e_1,\ldots,e_r$ local frame)

とくに

$$\mathrm{tr}(F_h) = \sum_{\alpha=1}^{r} R^\alpha_{\alpha i\bar j}\, dz^i \wedge d\bar z^j \quad (1,1)\text{ form}$$

Lem2.22 → $$= -\frac{\partial^2 \log(\det h)}{\partial z^i \partial \bar z^j} \quad \left(=: \partial\bar\partial \log(\det h)\right)$$

$r=1$　$$F_h = -\frac{\partial^2 \log h}{\partial z^i \partial \bar z^j} =: -\partial\bar\partial \log h$$

資料2.4 双対の曲率 (2.2.4)

$$F_{E^*} = -{}^{t}F_h \quad (E_1\otimes E_1^*)$$

$$F(E_1\oplus E_2) = \begin{pmatrix} F_{E_1} & 0 \\ 0 & F_{E_2} \end{pmatrix} \quad (E_2\otimes E_2^*)$$

$$F(E_1\otimes E_2) = F_{E_1}\otimes \mathrm{Id}_{E_2} + \mathrm{Id}_{E_1}\otimes F_{E_2}$$

$$F_{\det E_1} = \mathrm{tr}(F_{E_1})$$ (右上の式から)

資料2.5 X: n次元複素多様体 (Def 2.2.5)

g: X のHermite計量を T_X のHermite計量 h (=h) として

$$h\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right) = h_{i\bar{j}}$$ として

$$\omega = \sqrt{-1}\, h_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

をHermitian form

gがKähler $\overset{}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}}$ $d\omega = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial h_{j\bar{k}}}{\partial z^i} = \frac{\partial h_{i\bar{k}}}{\partial z^j}$$

$\boxed{\text{Kähler}}$の場合

Txのhermite計量のChern曲率 $=$ hから誘導されるRiemann計量の曲率

(Cor 2.27) $R_{i\bar{j}k\bar{l}} = R_{k\bar{l}i\bar{j}}$

演習2.6 $\mathbb{CP}^n$ はKähler計量をもつ

複素射影多様体もそう

($X \subset \mathbb{CP}^N$ submfd) Fubini–Study計量

L 直線束, h 計量

$$\rightsquigarrow F_h = -\frac{\partial^2 \log h}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} dz^i \wedge d\bar{z}^j \quad \text{(1,1) form}$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} dz^i \wedge d\bar{z}^j \quad (= \partial\bar{\partial}\varphi)$$

($h = e^{-\varphi}$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ (C^∞))

Def

L が

$\underset{def}{\Longleftrightarrow}$

Def 2.35

L が positive (semipositive)

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $\exists\, h = e^{-\varphi}$ C^∞ 計量

$\left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\right)$ という $n \times n$ 行列が (半)正定値

Thm 2.37 Kodaira うめこみ定理

X cpt, L ample $\iff$ L positive

とくにこのとき $X \underset{\text{sub}}{\subset} \mathbb{CP}^N$

$\boxed{\text{資料2.8}}$ $C^\infty \rightsquigarrow L^1_{loc}$ において広計量

(特異 Hermite 計量)

3 Chern類のていぎ

3.1 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} / \sim$

$(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $z_i = \lambda w_i$ $i = 1, 2$

$$\mathbb{CP}^1 = U_0 \cup U_1$$

$$U_0 = \{[1 : z] \mid z \in \mathbb{C}\}$$

$$U_1 = \{[w : 1] \mid w \in \mathbb{C}\}$$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-1) \underset{\mathrm{def}}{=} \{([z_0 : z_1], (u_0, u_1)) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{C}\ z_0 = \lambda u_0, z_1 = \lambda u_1\}$$

正則直線束

$T_{U_0 U \ldots}$

$T_{U_1 U_0}$

を変…

$$T_{U_0U_1} : U_0 \cap U_1 \longrightarrow GL(1,\mathbb{C}) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$$
$$[z_0 : z_1] \longmapsto w = \frac{1}{z}$$

$$T_{U_1U_0} : U_0 \cap U_1 \longrightarrow GL(1,\mathbb{C})$$
$$[z_0 : z_1] \longrightarrow z \left(:= \frac{z_1}{z_0}\right)$$

を変換関数とする直線束

$$e_0 : U_0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-1)|_{U_0} \subset \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2$$

local frame

$$(z_0 : z_1) \longrightarrow ((1 : z), (1, z))$$
$$\left(z := \frac{z_1}{z_0}\right)$$

$$e_1 : U_1 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-1)|_{U_1}$$
$$(z_0 : z_1) \longmapsto ((w : 1), (w, 1)) \qquad w := \frac{z_0}{z_1}$$

$$(e_1 = e_0 T_{U_0U_1})$$

Lem3.1 $h_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$

$(1:z) \longmapsto 1+|z|^2$

$h_1 \ U_1 \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ とすると、

$(w:1) \longrightarrow 1+|w|^2$

これらは $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}}(-1)$ の Hermite 計量.

$\boxed{\text{証}}$ 「h_0, h_1 が Hermite 計量を与える

$\overset{☆}{\iff} h_1 = |T_{U_0U_1}|^2 h_0$ が成立」

$\underset{\in \mathbb{CP}^1}{(1:z)} = (w:1) \iff \boxed{zw=1}$ なので

$|T_{U_0U_1}|^2 \underline{h_0(1:z)} \underset{\text{右上}}{=} |w|^2(1+|z|^2) = |w|^2+1$

$= h_1(w:1)$

曲率

(公式)

$$F_h = -\partial\bar{\partial}\log h_0 \quad \text{on } U_0$$

$$= \frac{-dz\wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} \quad \text{on } U_0 \ (1:z)$$

あとでつかう

3.2 Chern類の定義

M: 実多様体 ($d\eta=0$ なる2form)

$$H^2(M,\mathbb{R}) \cong \frac{\{d\text{ closed 2 form}\}}{\{d\text{-exact 2 form}\}}$$

deRham ($\eta = d\xi$ なる2form)

§3.2 Chern 類の公理的定義

Axiom 1 実多様体 M の C^∞ 複素ベクトル束 E, 1以上の整数 i について

$$c_i(E) \in H^{2i}(X;\mathbb{R})$$ がある

さらに $c_0(E)=1$

$c(E) = \sum_{i=0} c_i(E)$ を全Chern類という

Axiom 2 $f: N \to M$ C^∞ map (N, M 実多様体) のとき $c(f^*E) = f^*c(E)$

Axiom 3 $E_1, \dots, E_q$ をC^∞複素直線束

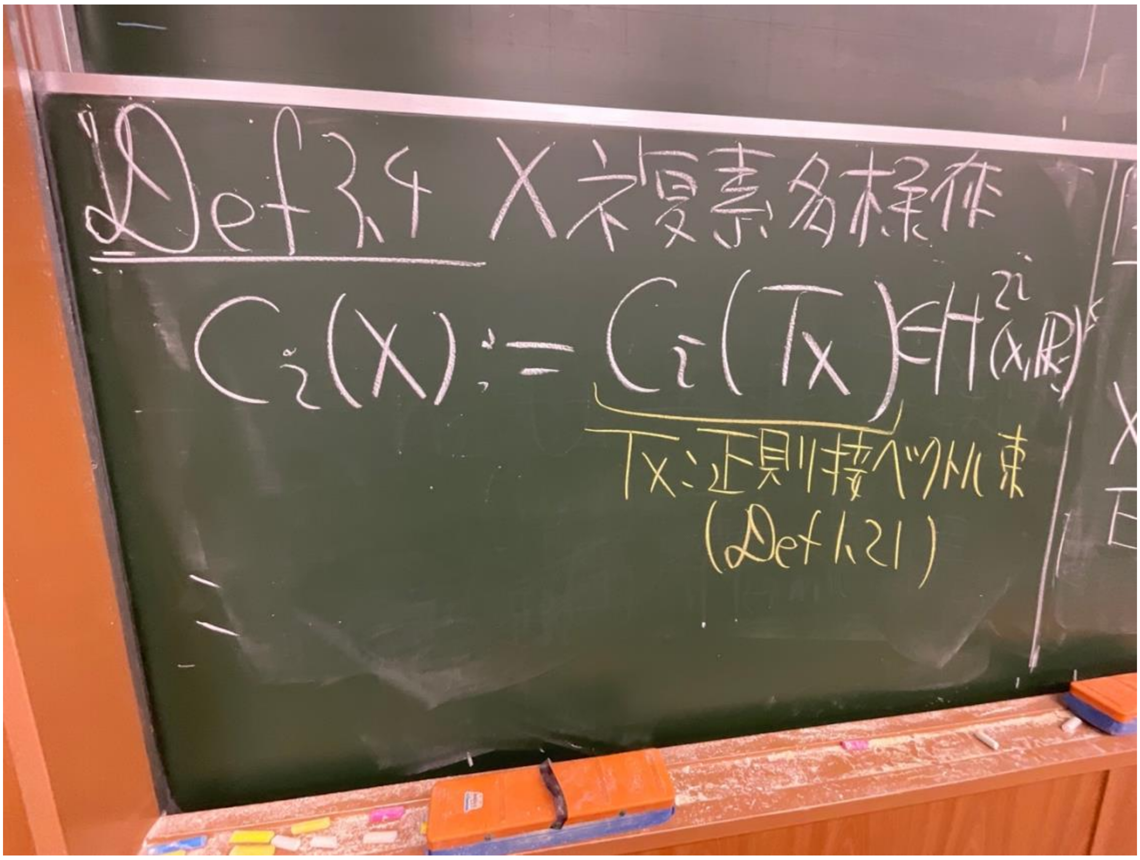
このとき $c(E_1 \oplus \cdots \oplus E_q) = c(E_1) \cdots c(E_q)$

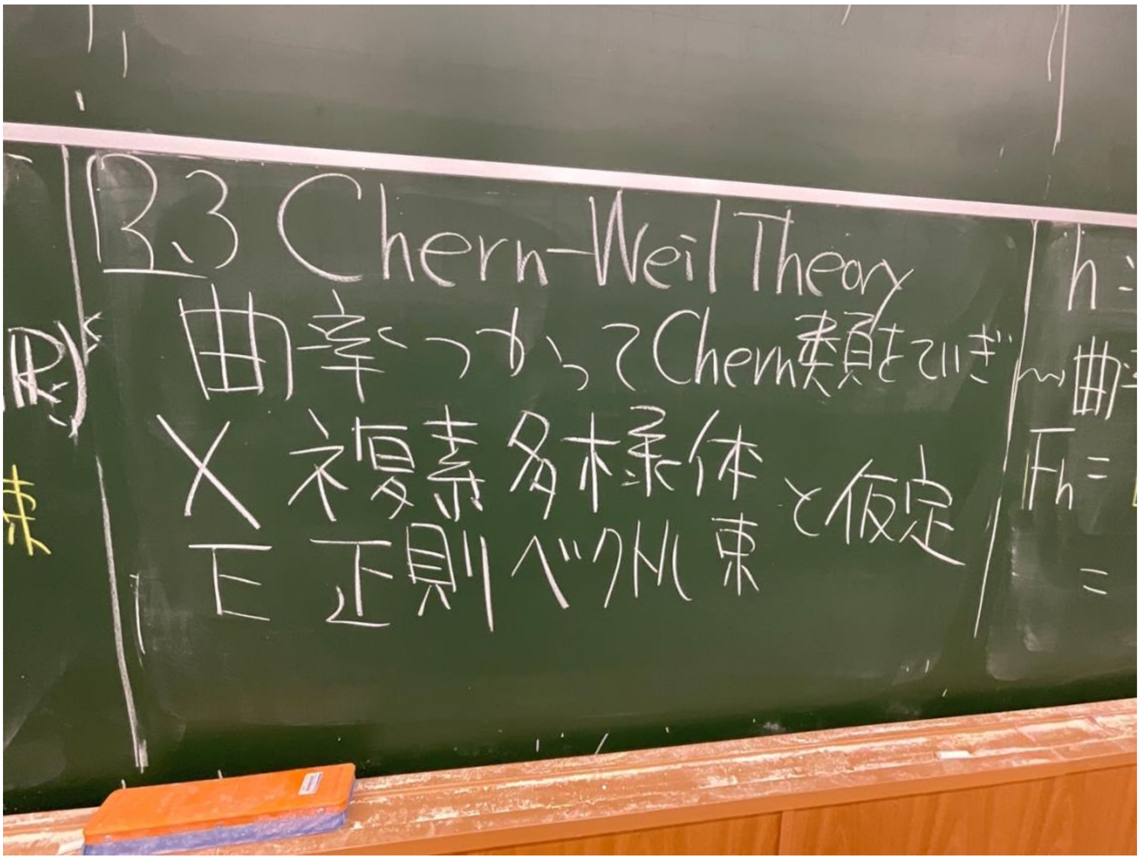
Axiom 4

$$\int_{\mathbb{CP}^1} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-1)) = -1$$

この公理1〜4をみたすChern類が一意に存在し

さらに $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ となる


Def 3.4 X 複素多様体
$c_i(X) := c_i(T_X) \in H^{2i}(X, \mathbb{R})$
T_X: 正則接ベクトル束
(Def 1.21)


§3.3 Chern-Weil Theory
曲率つかってChern類をていぎ
X 複素多様体
E 正則ベクトル束
と仮定

h : E の Hermite 計量

⇝ 曲率：

$$F_h = \boxed{R^{\alpha}_{\beta i \bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j} \otimes e_\alpha \otimes e^{*,\beta}$$

$$= R^{\alpha}_{\beta}\, e_\alpha \otimes e^{*,\beta}$$

Here $R^{\alpha}_{\beta} = R^{\alpha}_{\beta i \bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j$ (1,1) form

$$\rightsquigarrow \det\left(\mathrm{Id}_r + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E,h}\right) \quad \boxed{(3,3)\text{ もみよ}}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^1_1 & \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^1_2 & \cdots & \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^1_r \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

$$\text{展開} = \underbrace{1}_{c_0} + \underbrace{c_1(E,h)}_{(1,1)\,\text{form}} + \cdots + \underbrace{c_r(E,h)}_{(r,r)\,\text{form}}$$

例 $r=1$

$$F_h = \overset{(1,1)\,\text{form}}{R^1_1} \quad (\alpha=\beta=1)$$

$$\rightsquigarrow \det\left(I_1 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_h\right) = \underbrace{1}_{c_0} + \underbrace{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_h}_{c_1(E,h)}$$

$r=2$

$$\det\left(I_2 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_h\right) = \det\begin{pmatrix} 1+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^1_1 & \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^1_2 \\ \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^2_1 & 1+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^2_2 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\left(R^1_1 + R^2_2\right)}_{\substack{= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\operatorname{tr}(F_h) = c_1(E,h) \\ (1,1)\,\text{form}}} - \frac{1}{4\pi^2}\underbrace{\left(R^1_1\wedge R^2_2 - R^1_2\wedge R^2_1\right)}_{= (2,2)\,\text{form}\ c_2(E,h)}$$

$\mapsto [c_i(E,h)] \in H^{2i}(X,\mathbb{R})$

$$= \left(\frac{\{\text{closed } 2i \text{ form}\}}{\{\text{exact } 2i \text{ form}\}}\right)$$

Thm 3.6

h' を E の別の計量として $[c_i(E,h')] = [c_i(E,h)]$

Thm 3.7 $c_i(E) = [c_i(E,h)]$ とていぎする。 ($\in H^{2i}(X,\mathbb{R})$)

すると Axiom 1〜4 をみたす。

(ただし Axiom 2 の $f: N \to M$ は正則とする)

証 Axiom1 $c_0(E)=1$

$c_i(E)\in H^{2i}(X,\mathbb{R})$ ok

Axiom2 $f: N\to M$ 正則

$\rightsquigarrow$ $F_{f^*E,\, f^*h} = f^*F_E$ より

(2.4節)

Axiom3 E_1, E_2 正則ベクトル束

$$\rightsquigarrow F_{(E_1\oplus E_2)} = \begin{pmatrix} F_{E_1} & 0 \\ 0 & F_{E_2} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\det\left(I_{\mathrm{rank}(E_1+E_2)} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{(E_1\oplus E_2)}\right)}_{c(E_1\oplus E_2)}$$

$[c_1(E,h)]$

$$\det\begin{pmatrix} I_{\mathrm{rk}E_1} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E_1} & 0 \\ 0 & I_{\mathrm{rk}E_2} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E_2}\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\det\left(I_{\mathrm{rk}E_1} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E_1}\right)}_{c(E_1)} \cdot \underbrace{\det\left(I_{\mathrm{rk}E_2} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E_2}\right)}_{c(E_2)}$$

<u>Axiom 4</u> $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-1)$ の計量 h.

$$F_h = -\frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} \quad (U_0\text{上}) \quad (\text{さっき})$$

$$\Rightarrow c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-1)) = \left[\frac{-dz\wedge d\bar{z}}{1+|z|^2}\right]$$

$$\int_{\mathbb{CP}^1} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-1)) \qquad U_0 \cong \mathbb{C},\ (1:z) \to z$$

$$= \int_{U_0} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-1))$$

$$= \int_{\mathbb{C}} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \frac{-dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$$

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{-2r\,dr\,d\theta}{(1+r^2)^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{-2r}{(1+r^2)^2} dr = \left[(1+r^2)^{-1}\right]_0^\infty$$

$$= -1 \qquad \square$$

Cor 3.9

$$c_1(E,h) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{tr}F_{E,h} \quad \in H^2(X,\mathbb{R})$$

$$c_1(E) = c_1(\det E) = \left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{tr}F_{E,h}\right]$$

$$= \left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\left(-\partial\bar{\partial}\log(\det h)\right)\right]$$

証 $F_{\det E,} = \mathrm{tr}F_{E,h}$ より

(2.4節)

以下 $\begin{cases} X & n\ \mathrm{dim}\ 複素多様体 \\ E & \mathrm{rank}\ r\ 正則ベクトル束 \end{cases}$

Prop 3.10 $c_i(E)=0 \quad \forall i>\min\{n,r\}$

証 $c(E,h)=\det\left(I_r+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h}\right)$
よりでてくるのは $c_r(E)$ まで。$H^{2i}(X,\mathbb{R})=0 \quad i>n$。

Prop 3.11 $c_i(E^*)=(-1)^i c_i(E)$

Prf $F_{E^*,h^*}=-{}^tF_{E,h}$ より
(資料になげる)

Prop 3.12 $L_1,\dots,L_r$ 直線束として,

$c(L_1 \oplus \cdots \oplus L_r) = \prod_{\alpha=1}^{r} (1 + c_1(L_\alpha))$

とくに $x_i = c_1(L_i) \in H^2(X, \mathbb{R})$ とすると

$c_1(L_1 \oplus \cdots \oplus L_r) = x_1 + \cdots + x_r$

$c_2(L_1 \oplus \cdots \oplus L_r) = \sum_{1 \leq i < j \leq r} x_i x_j$ …

(Axiom 2から)

Lem 3.14

$0 \to S \to E \to Q \to 0$

ベクトル束の完全列 (see Def 3.13) とする

すると $c(E) = c(S)c(Q)$

証 $E \underset{\boxed{C^\infty}\text{同型}}{\xrightarrow{\ \cong\ }} S \oplus Q$

(∵) localに $\rho_U : Q|_U \to E|_U$ で

$\pi|_U \circ \rho_U = \mathrm{id}_{Q|_U}$ (where $E \xrightarrow{\pi} Q$)

がある。これを $\underbrace{\boxed{1\text{の分割}}}_{C^\infty}$ ではって

$\exists \rho : Q \to E$ C^∞

s.t. $\pi \circ \rho = \mathrm{id}_Q$ とできる。

あとは Axiom 2 より

$c(E) = c(Q)c(S)$ □

(C^∞ で $E = \oplus L_i$ とする)

3.5 Chern character

Def 3.16 E 正則ベクトル束

h : Hermite計量

$$\mathrm{ch}(E) = \left[\mathrm{tr}\left(\exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E,h}\right)\right)\right]$$

$$= r + \underbrace{\mathrm{ch}_1(E)}_{\in H^2(X,\mathbb{R})} + \underbrace{\mathrm{ch}_2(E)}_{\in H^4(X,\mathbb{R})} + \cdots + \mathrm{ch}_n(E)$$

$$\mathrm{ch}_1(E) = \left[\mathrm{tr}\left(\frac{i}{2\pi}F_{E,h}\right)\right] \in H^2(X,\mathbb{R})$$

$$= c_1(E)$$

$$\mathrm{ch}_2(E) = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{4\pi^2}\right)\mathrm{tr}\left(\boxed{F_{E,h}\wedge F_{E,h}}\right)\right]$$

$$\cap \quad H^4(X,\mathbb{R})$$

$F_{E,h}$を行列$\begin{pmatrix} R^1_1 & R^1_2 & \cdots & R^1_r \\ \vdots & & & \\ R^r_1 & \cdots & & R^r_r \end{pmatrix}$と思うと

$$\overbrace{F_{E,h}\wedge F_{E,h}}^{\text{行列のかけざん}}$$ とみる

$\boxed{\text{Prop 3.17}}$ $\mathrm{ch}_2(E) = \frac{1}{2}c_1(E)^2 - c_2(E)$

$\mathrm{ch}_2(E) \in H^{2,2}(X,\mathbb{Q})$

Prop 3.18 $ch_i(E) = 0 \quad i > \min(n, r)$

$$ch_i(E^*) = (-1)^i ch_i(E)$$

Prop 3.19

$$ch(E_1 \oplus E_2) = ch(E_1) + ch(E_2)$$

$$ch(E_1 \otimes E_2) = ch(E_1)\, ch(E_2)$$

さらに

$0 \to S \to E \to Q \to 0$ 完全

$$\Rightarrow ch(E) = ch(S) + ch(Q)$$

$\boxed{\text{証明}}$ $F_{E_1\oplus E_2} = \begin{pmatrix} F_{E_1} & 0 \\ 0 & F_{E_2} \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_1\oplus E_2}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \exp \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_1} & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_2}\right) \end{pmatrix}$$

両辺 trace をとると

$$\mathrm{ch}(E_1 \oplus E_2) = \mathrm{ch}(E_1) + \mathrm{ch}(E_2)$$

tensor も同じ

Cor 3.20 $c_1(\underbrace{\mathrm{End}(E)}_{E^*\otimes E}) = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} c_2(\mathrm{End}(E)) &= ch_1(E)^2 - 2r\,ch_2(E) \\ &= 2r\,c_2(E) - (r-1)\,c_1(E)^2 \end{aligned}}$$

Def 3.21

$$\Delta(E) = 2r\,c_2(E) - (r-1)\,c_1(E)^2 \in H^4(X,\mathbb{R})$$
$$= ch_1(E) - 2r\,ch_2(E)$$

を Bogomolov-discriminant という

Pf of Cor 3.20 ①

$$\mathrm{ch}(E\otimes E^*) = \mathrm{ch}(E)\cdot \mathrm{ch}(E^*)$$

$$\| \qquad \mathrm{ch}_1(\mathrm{End}\,E)+\mathrm{ch}_2(\mathrm{End}\,E)$$

$$= (r+\mathrm{ch}_1(E)+\mathrm{ch}_2(E)\cdots)(r-\mathrm{ch}_1(E)+\mathrm{ch}_2(E))$$

$$= r^2 + 0 + \bigcirc$$

Prop 3.22 E : 正則 rank r ベクトル束 この

$$\mathring{F}_{E,h} = F_{E,h} - \frac{1}{r}\overbrace{\mathrm{tr}(F_{E,h})}^{(1,1)\text{ fcn}}\underbrace{\mathrm{Id}_E}_{\mathrm{End}\,E}$$

End E 値 (1,1) fcn

$$\boxed{\mathrm{tr}(\mathring{F}_{E,h}) = 0}$$

このとき

$$\Delta(E) = \left[\frac{r}{4\pi^2}\mathrm{tr}\left(F^0_{E,h} \wedge F^0_{E,h}\right)\right] \in H^4(X,\mathbb{R})$$

$\boxed{\text{証}}$

$$\Delta(E) = ch_1(E)^2 - 2r\,ch_2(E)$$

(ていぎ)　(chの定義)

$$= \frac{-1}{4\pi^2}\left[\mathrm{tr}(F_h) \wedge \mathrm{tr}\,F_h - r\,\mathrm{tr}(F_h \wedge F_h)\right]$$

今 $\alpha = \frac{1}{r}\mathrm{tr}(F_h)$ とすると (1,1) form

$$F_h = F_h^0 + \alpha\, \mathrm{Id}_E$$

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{tr}(F_h)\wedge \operatorname{tr}F_h - r\operatorname{tr}(F_h\wedge F_h)\\
&= \operatorname{tr}(F_h^0-\alpha \mathrm{Id})\wedge \operatorname{tr}(F_h^0-\alpha \mathrm{Id}_E)\\
(*)\quad &\quad - r\operatorname{tr}\big((F_h^0-\alpha \mathrm{Id}_E)\wedge(F_h^0-\alpha \mathrm{Id}_E)\big)\\
&= \operatorname{tr}(-\alpha \mathrm{Id}_E)\wedge \operatorname{tr}(-\alpha \mathrm{Id}_E)\\
&\quad - r\operatorname{tr}(F_{E,h}^0\wedge F_{E,h}^0 + \alpha\wedge\alpha\, \mathrm{Id}_E)
\end{aligned}
$$

$\operatorname{tr}F_h^0 = 0$

$$
= -r\operatorname{tr}(F_h^0\wedge F_h^0)
$$

Prop 3.23 (レポート)

(ヒント $\forall i\quad 0\to E_{i-1}\to E_i\to G_i\to 0$ 完全

$\Rightarrow ch_2(E_i) = ch_2(E_{i-1}) + ch_2(G_i)$

$$ch_2(E) = \sum_{i=1}^{\ell} ch_2(G_i)$$

$i=1,\ell$ たす

完全

3.6 Riemann-Roch

Thm3.24 X コンパクト複素多様体

E: 正則ベクトル束

・ $H^i(X, E)$ sheaf $\mathcal{O}(E)$ の ith cohomology

とくに $\chi(X,E) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(X,E)$

とすると

$$\chi(X,E) = \int_X ch(E)\, \underbrace{td(T_X)}_{\text{Todd類}}$$

$\underline{n=1}$ $\rightsquigarrow$ $\chi(X,E) = \deg E + r(1-g)$

$\underline{n=2}$ ≒ Noether's formula

$\underline{n=3}$, $E = \mathcal{O}_X$

$$\chi(X,\mathcal{O}_X) = -\frac{1}{24} c_1(K_X)\, c_2(T_X)$$

$(K_X = \det \Omega_X^1)$

Def 3.27 (3.7節)

X コンパクト複素 (n dim) 多様体

$L_1, \dots, L_n$ 正則直線束

$$L_1 \cdots L_n := \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}}}{c_1(L_1)} \cdots c_1(L_n) \in H^{2n}(X, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}[X] \cong \mathbb{R}$$

$$= \int_X \underbrace{\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{L_1,h_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{L_n,h_n}\right)}_{(n,n)\text{ form}} \quad \uparrow \mathbb{R}$$

ω Kähler form (Def 2.25をみよ)

$$c_i(E) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}}}{[\omega]^{n-i}} := \int_X \underbrace{c_i(E,h)}_{(i,i)\text{ form}} \wedge \underbrace{\omega^{n-i}}_{(n-i,n-i)\text{ form}} \text{ として}$$

$$c_1(E)\cdot[\omega]^{n-1} = \int_X \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E,h}\right)\wedge \omega^{n-1} \qquad \square$$