Einstein 規約

$$v^{\alpha} e_{\alpha} := \sum_{\alpha=1}^{k} v^{\alpha} e_{\alpha}$$

$$A^{\alpha}_{\boxed{\beta}} v^{\boxed{\beta}} := \sum_{\beta} A^{\alpha}_{\beta} v^{\beta}$$

例 $\displaystyle\sum_{\alpha,\beta,i,j} R^{\alpha}_{\beta\boxed{ij}}\, dz^{i}\wedge d\bar{z}^{j} \otimes e^{*\beta} \otimes e_{\alpha}$

・行列(g_{ij})の逆行列は(g^{ji})とかく

つまり

ここで

(See

つまり $\sum_k g^{ki} g_{jk} = \delta^i_j$

$$\sum_k g_{jk} g^{ki} = \delta^i_j$$

ここで $\delta^i_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$ とする

(See Ex0.3)

(今日)

$\boxed{\text{ベクトル束}}$

$\boxed{\text{計量}}$

h

(Chern)接続

(Chern)曲率

唯一に定まる

Def 1.1 X n-次元複素多様体

$\underset{\text{def}}{\iff}$ ・X 2nd countable Hausdorff

・$\exists\{U\}$ open cover, $\varphi_U : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{C}^n$ (open)
同相

・$\varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : \varphi_V(U \cap V) \longrightarrow \varphi_U(U \cap V)$

$C^\infty \rightsquigarrow$ 正則

$(U, z_U^{\boxed{1}}, \ldots, z_U^{\boxed{n}})$ を局所座標系、

Def 1.2 (1.3) E C^∞-2(n+r) 実多様体
(n+r)にくる

C^∞ map $\pi : E \to X$ が rank r の
正則

C^∞ 級複素ベクトル束とは
正則

(a)

(b) $\forall$

かつ

(a) $E_p = \pi^{-1}(p)$ dim r の $\mathbb{C}$上の ベクトル空間

p の fiber

(b) $\forall p \in X$, $p \in {}^{\exists}U \underset{\text{open}}{\subset} X$

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "{}^{\exists}\rho", "C^\infty \text{diffeo}"'] \arrow[dr] & & U \times \mathbb{C}^r \arrow[dl, "pr_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

かつ

とくに (U, ρ) を局所自明化 という

例 1.5 $X \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{pr_1} X$

は ベクトル束

自明束といって $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ とかく.

$C^\infty \rightsquigarrow$ 正則

$(U, \rho_U), (V, \rho_V)$ 局所自明化

$\rho_U \circ \rho_V^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{C}^r \to (U \cap V) \times \mathbb{C}^r$

$\boxed{\rho_U \circ \rho_V^{-1}(p, \cdot) : \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}^r \quad \exists p \in U \cap V}$ C^∞ (or 正則)

T_{UV}

<u>Def 1.6</u> $T_{UV} : U \cap V \to GL(r, \mathbb{C})$ C^∞ 正則

$T_{UV}(p) := \rho_U \circ \rho_V^{-1}(p, \cdot)$

すると $\boxed{\text{G-1}}$ $T_{UV} \circ T_{VW} \circ T_{WU} = Id_r$ $U \cap V \cap W$ 上

$\boxed{\text{G-2}}$ $T_{UU} = Id_r$

逆に開被覆 $\mathfrak{U}$

T_{UV} を $\boxed{\text{変換関数}}$ $U\cap V\to GL(r,\mathbb{C})$

で G-1, G-2 をみたすとき

$\displaystyle\coprod_{U\in\mathfrak{U}} U\times\mathbb{C}^r$ に同値類

$(x,u)\in U\times\mathbb{C}^r$ 　　(1.2)をみる

$(y,w)\in V\times\mathbb{C}^r$

$(x,u)\sim(y,w)$

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $y=x$ & $w=\underbrace{T_{VU}(x)}^{GL(r,\mathbb{C})}(\underset{\mathbb{C}^r}{u})$

とすると $\displaystyle\coprod_{U\in\mathfrak{U}} U\times\mathbb{C}^r/\sim$ は(正則)ベクトル束

Def 1.10 $\pi : E \to X$ C^∞ベクトル束

$s : X \to E$ $\overset{(\text{正則})}{C^\infty}$ map が $\overset{\text{正則}}{C^\infty}$ section

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi \circ s = \mathrm{id}_X$ となるもの

$\underline{C^\infty(X, E)}$ {C^∞ section}, $\underline{H^0(X, E)}$ = {正則 section}

束

ion

(正則 section)

例 $\pi : X \times \mathbb{C} \to X$

C^∞ section $= \{ s : X \to X \times \mathbb{C},\ \underline{\pi \circ s = \mathrm{id}_X} \}$

$= \{ s : X \to X \times \mathbb{C}\ (s_0 : X \to \mathbb{C}) \}$

$x \longmapsto (x, s_0(x))$

$\underset{1\text{対}1}{\longleftrightarrow}$ $\{ X \to \mathbb{C}$ C^∞ map $s_0 \}$

Def

$e_1, \ldots$

$\forall p \in U$

E_p 上 基

Def 1.11 $U \subset X$ open

$e_1, \dots, e_r \in C^\infty(U, E) = \left\{ s : U \to E \;\middle|\; \pi \circ s = id_U \right\}$

$\forall p \in U$ で $e_1(p), \dots, e_r(p)$ が

E_p 上基底になるとき, $e_1, \dots, e_r$ を

local frame という.

例 $E = X \times \mathbb{C} \longrightarrow X$

$e : X \longrightarrow E = X \times \mathbb{C}$ local frame

$x \longmapsto (x, 1)$

(Section $e \circ \pi(x) = x$)

$\forall p \in X$ 上で $e(p)$ は $\{p\} \times \mathbb{C}$ のきてい、

[local frame をつかって $C^\infty(X,E)$ をあらわす

・$e_1^U, \dots, e_r^U$: U上の local frame

・$e_1^V, \dots, e_r^V$: V上の local frame

・$T_{UV} : U \cap V \to GL(r, \mathbb{C})$ 変換関数

~~すると~~ $\vec{e}_V = (e_V^1, \dots, e_V^r)$ とすると

$$\vec{e}_V = \vec{e}_U \, T_{UV} \quad (1.3\text{をみよ})$$

(U∩V上で)

今 $s \in C^\infty(X,E)$ section

$(\pi \circ s = id_X)$

すると $x \in U$ について

$$s(x) = \sum_{i=1}^{r} a^i_{(x)}\, e^U_i(x)$$

$\rotatebox{90}{$\in$}$ $E_x\,(\pi^{-1}(x))$

となる $a^i \in \mathbb{C}$ がある

よって $U \longrightarrow \mathbb{C}^r$ map をとる

$x \longmapsto (a^1, \dots, a^r_{(x)})$

よって $s^i_U : U \longrightarrow \mathbb{C}$ (C^∞ map)

$x \longmapsto a^i(x)$

(すると U 上で $s = \sum s^i_U(x)\, e_i(x)$

$\to$ section s $\rightsquigarrow$ U 上の $\mathbb{C}^r$ 値 map $U \to \mathbb{C}^r$

すると $S_U = \begin{pmatrix} s_U^1 \\ \vdots \\ s_U^r \end{pmatrix}$ とかくと

$U \cap V$ 上で $\boxed{S_U = T_{UV} S_V}$ となる ((1.4))

逆にこれをみたす $U \to \mathbb{C}^r$ の C^∞ map 体

section $C^\infty(X, E)$ をつくる

Summary 1.12

$$C^\infty(X, E) \ni s \xleftrightarrow[\text{対応}]{1:1} \left\{ s_U : U \to \mathbb{C}^r \text{ map s.t. } \boxed{S_U = T_{UV} S_V} \right\}$$

H^0　　正則

$r = 1$ のとき (直線束)

$\underline{s_U} : U \to \mathbb{C},\ s_U = \underbrace{T_{UV}}_{GL(1,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*} S_V$

Def 7.14 (Hermite計量)

$h = \{h_x\}_{x \in X}$ が $E \xrightarrow{\pi} X$ のHermite計量,

⇔ ① h_x : E_x 上 Hermite 内積

② h_x が C^∞ に変化する

(注) $\pi : E \to X$ が正則でも h は C^∞

$U \underset{\text{open}}{\subset} X$, $e_1^U, \dots, e_r^U$: C^∞ local frame,

$h_U : U \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})$

$x \longmapsto \left(h_x(\underbrace{e_\alpha^U(x)}_{\in E_x}, \underbrace{e_\beta^U(x)}_{\in E_x})\right)$.

$h_U = (h_{U\alpha\bar\beta})_{r \times r}$ 行列

① $\Longrightarrow$ h_U Hermite行列, 正定値

$\Longrightarrow \overline{h_{\alpha\beta}} = h_{\beta\alpha}$

h 計量 $\sim$ $h_U : U \xrightarrow{C^\infty} GL(r,\mathbb{C})$

$h_U(x)$ 上をみたす

$U \cap V$ 上で (1.6と1.7をみる.)

(1.8)

$$\boxed{h_V = {}^t\overline{T_{UV}}\, h_U\, \overline{T_{UV}}} \quad ☆$$

逆に $h_U : U \to GL(r,\mathbb{C})$ で

(正定値Hermite)

☆をみたすなら計量 h をとる

$r=1$のとき

$h_U : U \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ で

$$\boxed{h_V = |T_{UV}|^2 h_U \text{ on } U\cap V}$$

なら $\{h_U\}$ は E の計量となる

(1.3) $E \rightsquigarrow E^*,\ E_1 \otimes E_2$

ベクトル束

$$\begin{cases} (E^*)_p = E_p^* \\ (E_1 \otimes E_2)_p = E_{1p} \otimes E_{2p} \end{cases}$$

Ex 1.19　X n次元ふくそ.

$(U, z_U^1, \dots, z_U^n)$ 座標

$\exists \Omega_X$, $(dz_U^1, \dots, dz_U^n)$ が local frame となるものがある

(※) $T_{UV} : U \cap V \to GL(n, \mathbb{C})$

(1.9) $\qquad z \mapsto \left(\dfrac{\partial z_V^i}{\partial z_U^j} \right)$

$\rightsquigarrow$ ベクトル束 Ω_X がつくれる

(G-1, G-2 をみたす)

これの C^∞ sectionは？ （微分形式）

localに $\underline{f_1^U dz_U^1 + \cdots + f_n^U dz_U^n}$

とかける（$f_i^U : U \to \mathbb{C}$ C^∞ map）もので、

はりあわせ $\boxed{f^U = T_{UV} f^V}$ をみたす。

Def 1.20
1.21

Ω_X を正則（余接）ベクトル束という

$T_X = \Omega_X^*$ （双対束）

を正則接ベクトル束という

T_X の Hermite 計量

||

X の Hermite 計量

$\left(h\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) = h_{i\bar{j}} \right)$

Def 2.1 X 上の $(1,1)$ form とは

local に $f_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j$

かける微分形式.

$(f_{ij} : U \to \mathbb{C}$ C^∞ map$)$

ベクトル束のことばでいうと

$$C^\infty(X, \underbrace{\Omega_X^1}_{\text{正則余接}} \otimes \underbrace{\overline{\Omega_X^1}}_{\text{複素共役}})$$

例 $f : X \to \mathbb{C}$ C^∞ map

$$\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} d\bar{z}^i$$

$$\partial(\bar{\partial} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \overbrace{dz^i}^{1} \wedge \overbrace{d\bar{z}^j}^{1}$$

(1,1) form

$\boxed{\text{Def 2.6}}$

同様に $f_i dz^i$ (1,0) form

$\boxed{\text{Def 2.2 を参照}}$

(p,q) form

$f_{\bar{j}} d\bar{z}^j$ (0,1) form

$f_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ (2,0) form

(p,q) form のあつまりは $A^{p,q}(X)$

Prop 2.4 $A^k(X) = \{\mathbb{C}$値 k-次微分形式$\}$ とかく

$\Rightarrow A^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(X)$

<u>sketch</u> 1 form $f_i dx^i + g_j dy^j$

$$x^i + \sqrt{-1}\, y^i = z^i$$

なる $(x^1, y^1, \dots x^n, y^n)$ 実座標

$\Rightarrow dz^i = dx^i + \sqrt{-1}\, dy^i$ を代入する

$$d\bar{z} = dx^i - \sqrt{-1}\, dy^i$$

$$\rightsquigarrow f_i dx^i + g_j dy^j$$

$$= \underbrace{F_i dz^i}_{(1,0)\text{ form}} + \underbrace{G_j d\bar{z}^j}_{(0,1)\text{ form}}$$

$\boxed{\text{外微分}}$ $A^0(X) \xrightarrow{d} A^1(X)$

(0 form) (1 form)

Def 2.6 $A^0(X) \to A^{1,0}(X)$

$\partial : f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial z^i} dz^i$

$\bar{\partial} : A^0(X) \to A^{0,1}(X)$

$f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} d\bar{z}^i$

すると $df = \partial f + \bar{\partial} f$ になる

($\bar{\partial} f = 0 \iff f$ 正則)

がんばって $\partial : A^{p,q}(X) \longrightarrow A^{p+1,q}(X)$

(Def 27) $\bar{\partial} : A^{p,q}(X) \longrightarrow A^{p,q+1}(X)$

Def 28 E ベクトル束

$\boxed{A^{\cdot,\cdot}(E)} = C^\infty(E \otimes \Omega_X^{\cdot} \otimes \bar{\Omega}_X^{\cdot})$

(E値(p,q) form)

localには $(e_1, \dots, e_r)$ を local frame として

$(z_1, \ldots, z_n)$ 座標として

$$\sum \boxed{\varphi^{\alpha}_{i\bar{j}}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j \otimes e_\alpha$$

$(U \to \mathbb{C}\ C^\infty \mathrm{map})$

とかけて はりあわせ (T_{UV}) をつかった条件をみたすもの α

Def 2.9 (接続)

E C^∞ rank r 複素ベクトル束

$D: A^0(E) \to A^1(E)$ $\mathbb{C}$ 線形

で $f \in A^0(X)$, $\sigma \in A^0(E)$ $\Longrightarrow$ $D(f\sigma) = df \otimes \sigma + fD\sigma$ となるものを接続

例 $d: A^0(\mathcal{O}_X) \to A^1(\mathcal{O}_X)$

$f \mapsto df$

local frame $(e_1^U, \dots, e_r^U)$ をとると

$T_{UV} \quad U \cap V \to GL(r, \mathbb{C})$

変換関数 ...

$D(e_{U,\alpha}) \in A^1(E) \quad \alpha = 1, \dots, r$

$$= \sum_{\beta=1}^{r} \underbrace{A_{U\alpha}^{\beta}}_{\text{U上の1form}} \otimes \underbrace{e_\beta}_{\text{local fram}}$$

(右上をみると)

において

となる。

Def 2.11 U上の r×r 行列値 1form

$$A_U = \left(A_{U\,\alpha}^{\ \ \beta}\right)$$ を

connection form という

はりあわせ条件

☆ $$A_V = T_{UV}^{-1} A_U T_{UV} + T_{UV}^{-1} dT_{UV}$$

逆に U上の r×r 行列 1form で

☆ をみたすなら接続 D がきまる

$$D : A^0(X) \longrightarrow A^1(X)$$ (Sumary 2.12 など)

$$\rightsquigarrow D' : A^0(X) \longrightarrow A^{1,0}(X)$$

$$D'' : A^0(X) \longrightarrow A^{0,1}(X)$$

接続 $D : A^0(E) \longrightarrow A^1(E)$

$$\rightsquigarrow D : A^k(E) \longrightarrow A^{k+1}(E)$$

$$D(\sigma\varphi) = (-1)^k \varphi \wedge D\sigma$$

$$(\sigma \in A^0(E), \varphi \in A^k(X)) \quad + d\varphi\, \sigma$$

Def 2.13

$D\circ D : A^0(E)\to A^2(E)$

をDの曲率という

(F_D とかく)

$F(e^U_\alpha) = R_{U\alpha}^{\ \ \beta}\, e^U_\beta \in A^2(E)$

となるU上の2 formのr×r行列の2 formがある

Lem 2.14

$$\boxed{R_U = dA_U + A_U\wedge A_U}$$

Lem 2.15

F は $\overset{E\otimes E^*}{\mathrm{End}(E)}$ 値 2form になる

local に $F = \underbrace{\varphi_\alpha^\beta}_{2\mathrm{form}} \underbrace{e^{*\alpha}}_{E^*\ \mathrm{local}} \otimes \underbrace{e_\beta}_{E}$

+はりあわせ

2.3 Chern 接続と曲率

$E \to X$ 正則ベクトル束とする

Prop 2.17 h: E の計量

$\exists!\ D_h : A^0(E) \to A^1(E)$ 接続

① $D_h'' : A^0(E) \to A^{0,1}(E)$ が $\bar{\partial}$ に等しい

② $\xi, \eta \in A^0(E)$

$\Rightarrow d(h(\xi,\eta)) = h(D_h\xi, \eta) + h(\xi, D_h\eta)$

D_h を Chern 接続

証 U上の r×r 行列 1form を

$$A_U := {}^t\left((\partial h_U)\cdot h_U^{-1}\right)$$

変換則 (正しい表記は証明をみる)

$\to A_V = T_{UV}^{-1} A_U T_{UV} + T_{UV}^{-1} dT_{UV}$ をみたす

$\to D_h$ をとる

Def 2.18 $F_{E,h} := D_h \circ D_h : A^0(E) \to A^2(E)$

をChern曲率という

$\mathrm{End}(E)$値2form

$(1,1)$

Lem 2.19 $F_{E,h}$: $\underset{E^*\otimes E}{\underline{\mathrm{End}(E)}}$の$(1,1)$form

$R_U = (R^{\beta}_{U\alpha})$ $r\times r$行列 $(1,1)$ formとすると $\left(F(e^U_\alpha) = R^{\beta}_{U\alpha}\, e^U_\beta\right)$

$R_U = \bar{\partial} A_U$ となる

もっとlocalに

$(z_1, \dots, z_n)$ 座標

$(e_1, \dots, e_r)$ Eのlocal frame

$\Rightarrow (e^{*1}, \dots, e^{*r})$ E^* local frame

$F_{E,h}$ $\underset{(E^* \otimes E)}{\mathrm{End}(E)}$ (1,1) formになる

$\mathrm{End}(E) \cong E^* \otimes E$

localに

$$F_{E,h} = \sum \overbrace{R^{\alpha}_{\beta i \bar{j}}}^{(\mathbb{C}\text{値のmap})} \underbrace{dz^i \wedge d\bar{z}^j}_{(1,1)\text{ form}} \otimes \boxed{e^{*\beta} \otimes e_\alpha}$$

$$R_{\beta\gamma\xi\eta} = h_{\gamma\alpha} R^{\alpha}_{\ \beta\xi\eta}$$

すると

$$R_{\beta\gamma\xi\eta} = -\frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial \xi^{\eta} \partial \xi^{\xi}} + h^{\xi\delta} \left(\frac{\partial h_{\beta\xi}}{\partial \xi^{\xi}}\right)\left(\frac{\partial h_{\delta\gamma}}{\partial \xi^{\eta}}\right)$$

をみたす

"なので"

計量 h

$\longrightarrow R_{\beta\gamma\xi\eta}$ を右上でていぎして

$R^{\alpha}_{\beta i \bar{j}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} h^{\bar{\gamma}\alpha} R_{\beta \bar{\gamma} i \bar{j}}$ として

$$F_{E,h} \stackrel{\mathrm{def}}{=} R^{\alpha}_{\beta i \bar{j}} \overbrace{dz^i \wedge d\bar{z}^j}^{(1,1)\ \mathrm{form}} \otimes \overbrace{e^{*\beta} \otimes e_{\alpha}}^{\mathrm{End}\,E}$$

曲率 をていぎにしてもよい

Lem 2.22

$$\mathrm{tr}(F_{E,h}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{\alpha=1}^{r} R^{\alpha}_{\alpha i \bar{j}} \overbrace{dz^i \wedge d\bar{z}^j}^{(1,1)\ \mathrm{form}}$$

とすると

$$\mathrm{tr}(F_{E,h}) = -\frac{\partial^2 \log(\det h_{\alpha\bar{\beta}})}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

とくにrank E=1なら

$$F_{E,h} = -\frac{\partial^2 \log h}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

$$(-\partial\bar{\partial}\log h)$$

$h = e^{-\varphi}$ を代入 $= \boxed{\partial\bar{\partial}\varphi}$

$\boxed{2.5}$ T_X Hermite計量 ρ_h もとに

$X_{\mathbb{R}}$ Riemann計量

T_Xの

h Kähler

Chern曲率 = Riemann曲率

Chern接続 = Levi-Civita接続

$(e_1, \dots$

$(e^{*1}, \dots$