

まとめ 186 (行列式の計算方法 2.). 行列に 0 が多めにある場合は余因子展開を用いても良い.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

例 187. 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  の行列式は次のように求められる.

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{2+1} a_{21} \det(A_{21}) + (-1)^{3+1} a_{31} \det(A_{31}) + (-1)^{4+1} a_{41} \det(A_{41}) \\ &= 2 \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 3 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 3 \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \times 7 \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (2 \times 3 - 5 \times 7) \times (9 \times 1 - 4 \times (-2)) = -493. \end{aligned}$$

問題 22. 実数係数の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 & & - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & \lambda x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ (\lambda + 1)x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 0 \end{cases}$$

が  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  以外の解を持つような  $\lambda$  の値を全て求めよ. (ヒント: 前回の演習追加プリントにある行列の正則性の特徴づけを用いる.)

問題 23. 次の行列の行列式をそれぞれ求めよ. (1).  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  (2).  $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

問題 24.  $a_0, \dots, a_n \in K$  かつ  $x$  を変数とする. 以下の等式を示せ.

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

(ヒント: 余因子展開と帰納法を用いる.)

問題 25. 整数からなる  $n$  次正方行列  $A$  について,  $\det A = 1$  ならば, 逆行列  $A^{-1}$  のどの成分も整数であることを示せ. (ヒント: 余因子行列を用いる.)

授業の最後に行っていた内容は次の定理のことである.

定理 188 (行列式の唯一性).  $n$  次正方行列の集合から体  $K$  への関数

$$\begin{aligned} f: \{n \text{ 次正方行列}\} &\rightarrow K \\ A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} &\mapsto f(A) = f \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で次を満たすとする.

1. (多重線形性)  $b_i \in K^n$  と  $\lambda, \mu \in K$  について

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \lambda a_i + \mu b_i & \cdots & a_n \end{pmatrix} \\ = \lambda f \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{pmatrix} + \mu f \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & b_i & \cdots & a_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. (交代性)  $1 \leq i < j \leq n$  なる  $i, j$  について,  $i$  番目と  $j$  番目を入れ替えると符号が変わる.

$$f(a_1, \dots, \underbrace{a_j}_i, \dots, \underbrace{a_i}_j, \dots, a_n) = -f(a_1, \dots, \underbrace{a_i}_i, \dots, \underbrace{a_j}_j, \dots, a_n)$$

このとき  $f(A) = f(E_n) \det A$  となる. 特に 1, 2 を満たす  $f$  で  $f(E_n) = 1$  となるものは行列式  $\det$  のみに限る.

(22)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \\ \lambda+1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

$$A\vec{x} = \vec{0} \text{ かつ } \vec{x} = \vec{0} \text{ の解を求めよ}$$

$$\Leftrightarrow \det A = 0$$

$$\det A = (2\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$\therefore \lambda = -1, \frac{1}{2}$$

(23)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot 3 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -9(8 + 1) + 3(4 + 1)$$

$$= -81 + 15$$

$$= -66$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 7 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \times 2 \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ 3 \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -10(50 + 6 - 35 + 6)$$

$$+ 5(25 + 3)$$

$$+ 3(50 + 6 - 35 + 6)$$

$$- (-3 - 35)$$

$$= -7 \times (27) + 5 \times 28 + 38$$

$$= -189 + 140 + 38$$

$$= -189 + 178 = -11$$

$$\boxed{24} \begin{vmatrix} a_0 - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & \cdots & \cdots & x \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_2 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & \cdots & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= a_0 x^n + (a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)$$

$\boxed{25}$   $A$  の余因子行列の成分は  $A$  の元 (整数) の和・差・乗で表わされる。よって  $\hat{A}$  の成分は整数 ( $A$  整数行列  $\Rightarrow \hat{A}$  整数)

よって  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}$  ( $\hat{A}$  整数)  $\hat{A} = \det A \cdot A^{-1}$  ( $\det A = 1$ )

3.9.4 (1)  $\hat{A} = (\det A) \cdot A^{-1} \Rightarrow \det \hat{A} = (\det A)^{n-1}$

(2)  $B = \hat{A}$  とおく

$$\tilde{B} = (\det B) \cdot B^{-1} = (\det A)^{n-1} \cdot \frac{A}{\det A}$$

$$\therefore \hat{A} \left( \frac{1}{\det A} A \right) = E_n \quad \hat{A} = (\det A)^{n-2} A$$

- 22, 23, 24, 25
- 3, 4, 4 (1)  $\neq$   $\det A \neq 0$  (2)  $\neq$
- 3, 5, 1 ~ 3, 5, 3 (時間あけ)

(もしあからない場合  
3, 4, 1 (1), 3, 4, 2 (1), (2), (3))