

前回 K : 体 ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}$) 3.4

$$\det A \neq 0$$

$\Leftrightarrow A$ が正則

$$(\text{ある } A^{-1} \text{ があって } AA^{-1} = A^{-1}A = E_n)$$

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$$

3.4 余因子展開と余因子行列

(定義) $A: n \times n$ 行列, $1 \leq i, j \leq n$ と

$A_{ij}: (n-1) \times (n-1)$ 行列で

i 行と j 列をぬいた行列と

行列という (教科書を見よ)

例 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} 3 \times 3$

$\bar{i}=1, \bar{j}=2$

$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$

$A_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

$\det(A) = (-1)^{1+2} \det(A_{12}) + (-1)^{3+1} \det(A_{31}) = (-1)$

補題 (余因子展開)

$1 \leq \bar{i}, \bar{j} \leq n$

$\det(A) = (-1)^{\bar{i}+1} a_{\bar{i}1} |A_{\bar{i}1}| + (-1)^{\bar{i}+2} a_{\bar{i}2} |A_{\bar{i}2}|$

$+ \dots + (-1)^{\bar{i}+n} a_{\bar{i}n} |A_{\bar{i}n}|$

$= (-1)^{\bar{j}+1} a_{\bar{i}\bar{j}} |A_{\bar{i}\bar{j}}| + (-1)^{\bar{j}+2} a_{\bar{i}2} |A_{\bar{i}2}|$

$+ \dots + (-1)^{\bar{j}+n} a_{\bar{i}n} |A_{\bar{i}n}|$

$$|A| \neq 1, n=3$$

$$\det(A)$$

$$= a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|$$

($n=3$) = 3 は 2 行で 1 行は 0

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Thm 3.2.1E

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13}) = (a_{11}, 0, 0) + (0, a_{12}, 0) + (0, 0, a_{13})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ * & a_{22} & a_{23} \\ * & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ * & a_{21} & a_{23} \\ * & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ * & a_{21} & a_{22} \\ * & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ & \quad \quad \quad |A_{11}| \quad \quad \quad |A_{12}| \quad \quad \quad |A_{13}| \end{aligned}$$

$$= a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| \quad \square$$

$\begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$ $n=3, i=1$ で余因子展開が示せた.

一般の場合も同様のやり方でできる
 (教科 p.85 参照)

$$\square \quad |A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 & b \\ 0 & 1-a & b & 0 \\ b & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1-a & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + \dots$$

$$= a \begin{vmatrix} 1-a & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 1-a & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + \dots$$

... と言った方がよい (二重計算が少なくて済む)

定義 余因子行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| & \cdots & (-1)^{n+1}|A_{n1}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & & & \\ \vdots & & & & \\ (-1)^{n-1}|A_{1n}| & & & & \end{pmatrix}$$

を余因子行列という
 (AはAの成分の積で表す)

$|A|$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} |A_{11}| = a_{22} \\ |A_{12}| = a_{21} \\ |A_{21}| = a_{12} \\ |A_{22}| = a_{11} \end{cases}$
 (1行1列の21±)

$= \begin{pmatrix} a_{22} - a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し
 $\hat{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
 一方 A が正則ならば
 $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}$

一般に次が成り立つ。
 定理 3.4 3.4.4
 $A \cdot \hat{A} = \hat{A} \cdot A = (\det A) \cdot E_n$
 $\forall A$ が正則ならば
 $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}$

$$\text{証明 } A \tilde{A} \text{ の } i, k \text{ 成分は}$$

$$(A \tilde{A})_{ik} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \tilde{A}_{jk}$$

$$\tilde{A}_{jk} = \sum_{l=1}^n (-1)^{j+l} A_{lj} |A_{kl}|$$

$$(-1)^{j+l} |A_{kl}|$$

$$\text{よって } i=k \text{ のときは}$$

$$(A \tilde{A})_{ii} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} A_{ij} |A_{ji}|$$

$$(A \tilde{A})_{ii} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} A_{ij} |A_{ji}|$$

$$= (-1)^{i+1} A_{i1} |A_{i1}| + (-1)^{i+2} A_{i2} |A_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n} A_{in} |A_{in}|$$

$$= \det A$$

$$\text{余因子展開}$$

$i \neq k$ のときは

$$\begin{vmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \vdots \\ \overline{a_i} \\ \vdots \\ \overline{a_n} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} A_{2j} |A_{kj}|$$

(余因子展開)
(Th 2.2.2)

$$(A\tilde{A})_{ik} = \begin{cases} \det A & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

(Prop 2.5.3)

よって $A\tilde{A} = (\det A) E_n$

A が正則 $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$\Rightarrow \underline{A \left(\frac{\tilde{A}}{\det A} \right) = E_n}$$

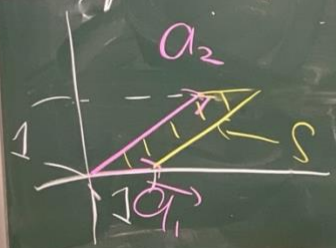
$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$$

(Prop 2.5.3)

3.5 行列式の応用

① 行列式 $\Rightarrow$ 体積

$n=2$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

The matrix A is shown with its columns labeled a_1 and a_2 .

(Sの面積) $\det B =$

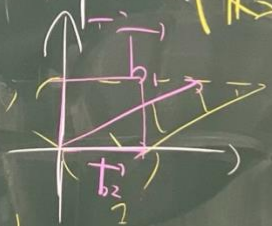
Sの面積 $n=3$ のとき

(Sの面積) $= 1 \times 1 = 1$

$|\det A| = |1 \times 1 - 0 \times 5| = 1$

$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

The matrix B is shown with its columns labeled b_1 and b_2 .



Sの面積 $= 1 = |\det B| = 1$

$n=3$ のとき $|\det A| = (\text{平行六面体の体積})$

行列
ひ

行列積を一般化したときに
に $\det$ が成りたつてほしい

(V1) $\det(E_n) = 1$

(V2) A' を A の第 i 行を k 倍したものとすると
 $\det(A') = k \det(A)$

(V3) A' を A の第 i 行目に
 第 j 行目の k 倍したものとすると
 $\det(A') = \det(A)$

体積

定理
 $\det$ は
 $\det(A) = \det(A)$

とすると $\det(A) = \det(A)$

(V4) A' を A の第 i 行と第 j 行
 をとりかえた行列とすると
 $\det(A') = -\det(A)$

定理 $V1 \sim V4$ を満たすものは
 存在し $\det(A) = |\det A|$

存在し $\det(A) = |\det A|$

存在し $\det(A) = |\det A|$

訂正 演習問題 3.2.3 と同様の Claim

$A \rightarrow B$: 行簡約化
 $\Leftrightarrow$ ある基本行列の積で
かたは P があって

$$PA = B$$

$$\text{よって } \underline{A = P^{-1}B} \quad (\star)$$

Claim $\mathcal{U}(P^{-1}B) = |\det P^{-1}| \mathcal{U}(B)$

二枚をみよ

$$\text{rank } A = n \Rightarrow B = E_n \Rightarrow \mathcal{U}(B) = 1$$

$$\text{よって } \mathcal{U}(A) = \mathcal{U}(P^{-1}B) \stackrel{\text{claim}}{=} |\det P^{-1}| \mathcal{U}(B)$$

$$= |\det A|$$

$$\text{rank } A < n \text{ かつ } \mathcal{U}(B) = \det A = 0 \text{ となる}$$

Claimの証明

P^{-1} は基本行列の積

よて、基本行列 Q , 行列 C に

$$\omega(QC) = (\det Q) \omega(C)$$

を示せばよい

(B) $Q = \begin{pmatrix} E_n(2,1) \\ E_n(2,1) \\ E_n(2,1) \end{pmatrix}$

基本変形, 1に x を

① $\leftarrow$

② $\leftarrow$

③ $\leftarrow$

あとは①~③で

$$\omega(QC) = |\det Q| \omega(C)$$

を示せばよい

① $\longleftrightarrow (V2)$

② $\longleftrightarrow (V4)$

③ $\longleftrightarrow (V3)$

一方 $|\det A|$ は $V1 \sim V4$ をみたす

(存在)

(近似的に)

行列式は

多重線型性

交代性

で特徴づけられる

(よく使われる)

Claim 2

に於て

$\text{rank } A =$

よ、 2×2

$\text{rank } A <$