

教科書の定理 2.3.9, 2.4.8, 2.5.1, 2.5.4, 3.3.5 をまとめると以下のことが言える. これは正則行列の特徴づけともいえ重要である.

定理 184. 体  $K$  上の  $n$  次正方行列  $A$  に対して, 次の条件はすべて同値である.

- (1)  $\text{rank } A = n$ .
- (2)  $A$  は正則行列である. つまり逆行列  $A^{-1}$  が存在する.
- (3)  $A$  は有限個の基本行列の積で表される.
- (4) 拡大行列  $[A \mid E_n]$  は, 行基本変形によって  $[E_n \mid B]$  の形に変形できる.
- (5)  $A$  は行基本変形によって  $E_n$  に変形できる.
- (6) 任意の  $b \in K^n$  に対して, 連立一次方程式  $Ax = b$  はただ一つの解をもつ.
- (7) 同次連立一次方程式  $Ax = 0$  の解は  $x = 0$  のみである.
- (8)  $\det A \neq 0$

また, (4) において  $[A \mid E_n] \rightarrow [E_n \mid B]$  となったとき,  $B = A^{-1}$  である.

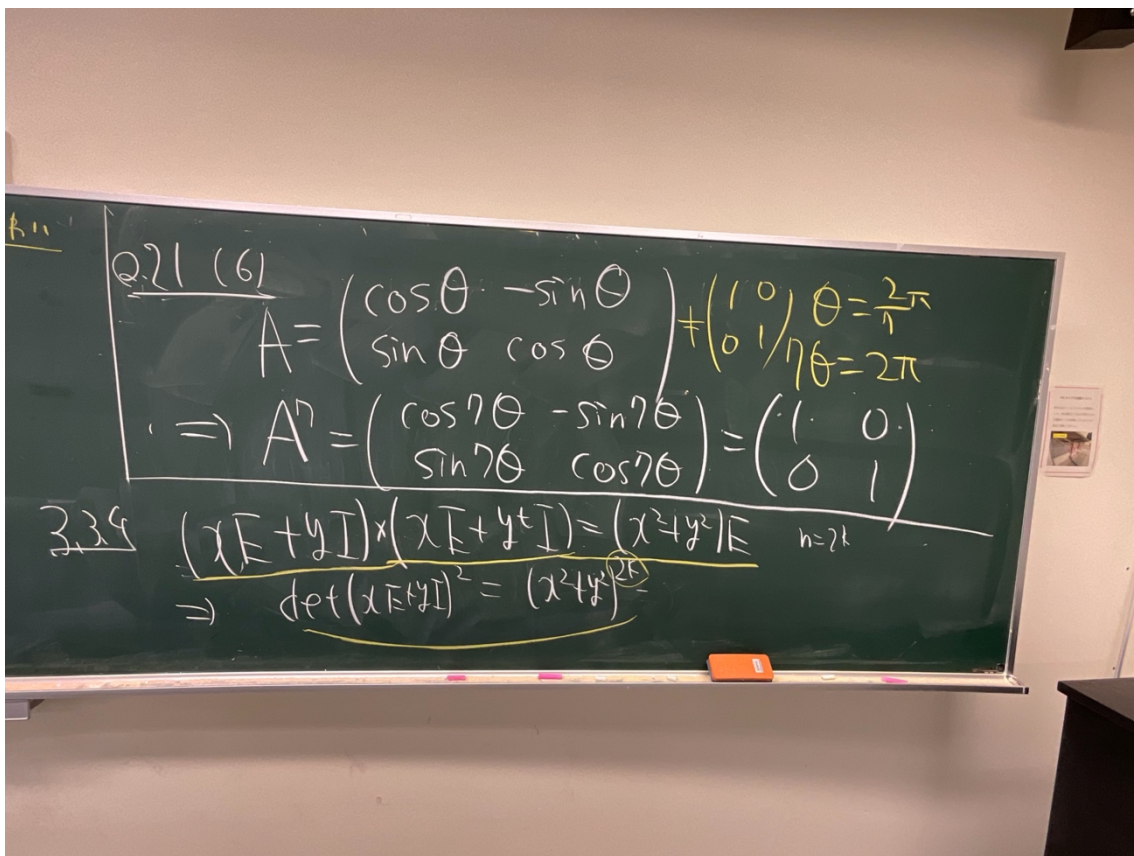
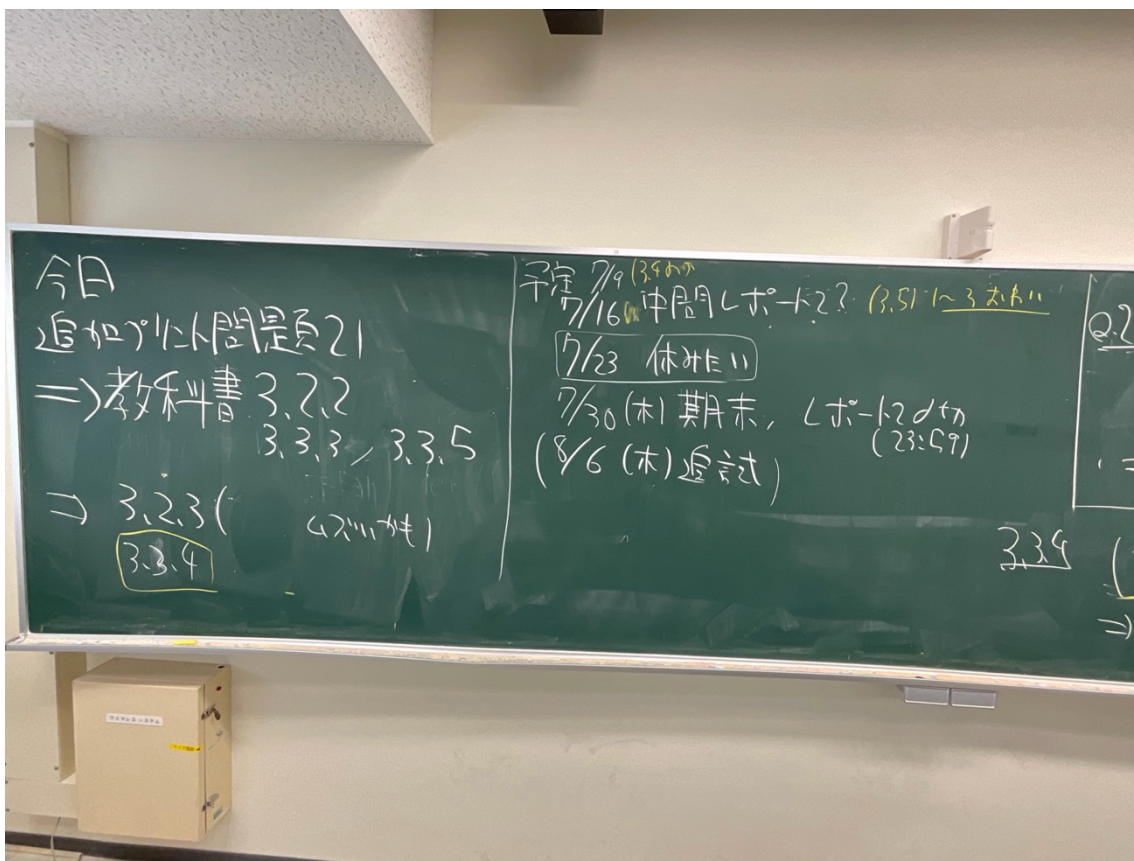
また行列式の次の性質は重要である.

定理 185. [教科書, 定理 3.3.4] 体  $K$  上の  $n$  次正方行列  $A, B$  に対して,

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

問題 21. 以下の問題は他学科の期末試験で出した証明問題である. 次の問題に答えよ.

- (1)  $n \times n$  行列  $A, B, C$  について,  $\det(ABC) = \det(BAC)$  であることを示せ.
- (2)  $n \times n$  行列  $A, B$  について,  $A$  と  $B$  が正則ならば,  $AB$  もまた正則行列であることを示せ.
- (3)  $n \times n$  行列  $A, B$  について,  $AB$  が正則行列であるならば,  $A$  も  $B$  も正則であることを示せ.
- (4) 実数係数の  $n \times n$  行列  $A$  について,  ${}^tAA = E_n$  ならば,  $\det(A) = \pm 1$  であることを示せ. ここで  ${}^tAA$  は  ${}^tA$  と  $A$  の積のことである.
- (5) 実数係数の  $n \times n$  行列  $A$  について,  $A^7 = E_n$  ならば,  $\det(A) = 1$  であることを示せ.
- (6) 実数係数の  $2 \times 2$  行列  $A$  について,  $A^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  かつ  $A \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  となるものの例を一つあげよ.



3.2.3

Claim  $P$ : 基本行列

$$D(PA) = \det(P) D(A)$$

①  $P = E_n(i, c)$  型の時

(基本変形1. 第  $i$  行  $c$  倍)

$$\det(P) = c \quad (3.2.6)$$

$$D(PA) \stackrel{(1)}{=} c D(A) = \det(P) D(A)$$

②  $P = E(i, j)$  型の時

(基本変形2. 第  $i$  行と第  $j$  行の入れ替え)

$$\det P = -1$$

$$D(PA) = -1 D(A) = \det(P) D(A)$$

③  $P = E(i, j, c)$  型の時

$$\det P = 1 \quad D(PA) \stackrel{(3)}{=} D(A) = \det(P) D(A)$$

$D(A) = (\det A) D(E)$  を示す。

①  $\text{rank } A < n$  のとき  $(\Leftrightarrow \det A = 0)$

$D(A) = 0$  を示すには、  
 $A \rightarrow A'$  を簡約化すると  
 $A' = \begin{pmatrix} * & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$  と下に 0 が並ぶ。  
 よって 第  $n$  行を 2 倍すると  $D(A')$  は 2 倍される。

よって  $D(A') = 2 D(A') \Rightarrow D(A') = 0$ 。  
 よって  $PA = A'$  となる基本行列の積をとれば、  
 $D(PA) \stackrel{\text{Chim}}{=} (\det P) D(A) \Rightarrow D(A) = 0$   
 $D(A') \stackrel{\text{Chim}}{=} 0$

②  $\text{rank } A = n$  のとき  $A \rightarrow E_n$  と簡約化される。  
 よって  $PA = E_n$  なる基本行列の積をとれば、  
 $D(E_n) = D(PA) \stackrel{\text{Chim}}{=} (\det P) D(A)$   
 今  $\det P \in \det P' \in \det A$  より  $D(A) = (\det A) D(E)$