

前回 $A = (a_{ij})_{n \times n}$

$\det A$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

符号
置換

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

定理 3.2.5

① 第 i 行

② 第 i 行

③ 第 i 行

た

定理 3.2.5 (2つ)

① 第 i 行を c 倍すると $\det$ も c 倍

② 第 i 行と第 j 行を交換すると
 $\det$ (-1) 倍

③ 第 i 行に第 j 行の c 倍を
たしても $\det$ は不変

補足: 演習 3.2.3 より

左をみたし $\det(E_n) = 1$ となる
ものは唯一つに定まる

→ これを $\det$ の

「定義」と思ってもよい
(抽象的な方向もある)

以下言正明していく

なる
る

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とする

とみる

行列式 $= |A|$

定理 3.2.1 ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

s, t 数 ($s, t \in K$ 体)

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ s\vec{a}_i + t\vec{b}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix}$$

(多重)線形性
($s, t \in K$)

分配
法則

det の
211 法則

証明 簡単のため $i=1$ とする

$$\text{左辺} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) (s a_{1\sigma(1)} + t b_{1\sigma(1)}) \times a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\xrightarrow{\text{分配法則}} s \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + t \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\xrightarrow{\text{det の 211 法則}} \text{右辺}$$

定理 3.2.2.

$\sigma \neq 1$ について $\overline{a_{\sigma(i)}} = \overline{a_i}$ ならば $\det A = 0$

証明 簡単のため $n=1, n=2$ とする

$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

$\det A$ の
21 行

$A_n = \{ \text{偶置換} \}$
($\sigma \in S_n, \text{sgn } \sigma = 1$)

Prop 3.1.8

命題 3.1.8 より

$B_n = \{ \text{奇置換} \}$ $\sigma \in S_n, \text{sgn } \sigma = -1$

$\Rightarrow \{ (12) \cdot \pi : \pi \in A_n \}$

Prop 3.1.8

すなわち

$S_n = A_n \cup B_n, A_n \cap B_n = \emptyset$

$n=1$

定理 3.2.3.

$\lambda < j$ に対し $\vec{a}_\lambda$ と $\vec{a}_j$ を
 いれかえると $\det$ は (-1) 倍

(定理 3.2.2)

証明 簡単のため $\lambda=1, j=2$ とする

$$\text{すなわち } \begin{vmatrix} \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \\ \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} \stackrel{\text{定理 3.2.2}}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_2 \\ \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix}$$

(定理 3.2.1)

(定理 3.2.2)

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{a}_2 \\ \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{a}_2 \\ \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{右辺})$$

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_2 \\ \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} = \det A_{1,2}$$

定理 3.2.4 $i < j$ とする
 第 i 行に第 j 行の c 倍を
 加えても $\det$ は不変.

【証明】 $i=1, j=2$ とする

$$\begin{vmatrix} a_1 + ca_2 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} \stackrel{\text{定理 3.2.1}}{=} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a_2 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$$

① ←
 ② ←
 ③ ←

(定理 3.2.1) $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \det A$ $\square$

定理 3.2.5 (±, ±) の証明

① ← 定理 3.2.1
 ② ← 3.2.3
 ③ ← 3.2.4 $\square$

不補正

① 重要なのは

定理 3.2.1 行列系型

3.2.2 (3.2.33)

交代性

②

P_1

$\Rightarrow$

定理

② (注意 3.2.6)

$P_1, \dots, P_r$ 基本行列, A $n \times n$ 行列

$\Rightarrow \det(P_1 \dots P_r A)$

$\stackrel{(*)}{=} \det(P_1) \dots \det(P_r) \det A$

定理 3.2.5 と基本行列の行列式の計算

$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

定理 3.2.8. $\det({}^t A) = \det A$

証明 ${}^t A = (b_{ij})$ とする.

t の 211 ぎから $b_{ij} = a_{ji}$ である.

$$\det({}^t A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

($\det$ の 211 ぎ)

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

(t の 211 ぎ)

右辺は a_{ij} の 121 ぎの順に並べ替えることで $\det A$ と一致する.

$\sigma \in S_n$ について

$k_i = \sigma(i), l_j = \sigma^{-1}(j)$ とおくと

$$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n}$$

(1 列の 1 列番を k_i に変える)

$$= a_{1 l_1} \cdots a_{n l_n}$$

$$= a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

(211 ぎ)

$$\begin{aligned}
 \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} \\
 &\stackrel{\text{sgn} \sigma^{-1} \text{sgn} \sigma = 1}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \boxed{\text{sgn} \sigma^{-1}} A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} \\
 &\stackrel{\text{sgn} \sigma^{-1} = \text{sgn} \sigma}{=} \det A
 \end{aligned}$$

定理 3.2.9

定理 3.2.9(1) の証明
 定理 3.2.5 + 3.2.8 から □

定理 3.2.9

3.3 節

定理 3.3.2 (3.3.1 ㄟ)

$A = n-1$ 次正方形行列とする
 a 数として

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & & \\ * & A & & \end{vmatrix} = a \times \det A,$$

(例 1.3.1.13 の証明 ㄟ)

定理 3.3.4

A, B $n \times n$ 行列として

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$$

証

$A \xrightarrow{\text{行簡約化}} A'$ とする

すると基本行列 $P_1, \dots, P_\ell$ で

$$P_1 \cdots P_\ell A = A' \text{ となる}$$

① $\text{rank} A < n$ のとき

$\det(A'B)$ になる

A
=
よ
代
= 3.2.6
=

A' の一番下が $\begin{pmatrix} + \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$ となる

$\Rightarrow A'B$ も一番下が $\mathbb{P}$ の形になる

$$\text{よって } \det(A'B)$$

$$\stackrel{\text{代}}{=} \det(P_1 \cdots P_\ell A'B)$$

$$\stackrel{\text{3.2.6}}{=} \det(P_1) \cdots \det(P_\ell) \underbrace{\det(A'B)}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \det A' \\ = \det(A'B) = 0 \end{cases}$$

$$\text{--- 1.2' } \det A = \det(P_1 \cdots P_k A')$$

$$\Rightarrow \det(P_1) \cdots \det(P_k) \det A' = 0$$

$$\text{--- 2.2.6 } \det(AB) = (\det A)(\det B) = 0.$$

$$\text{--- 2.2.6 } \det(AB) = \det(P_1 \cdots P_k B) = \det(P_1) \cdots \det(P_k) \det B = \det A \det B$$

$$\text{--- 1.2' } \det(A) = \det(P_1 \cdots P_k A')$$

$$= \det(P_1) \cdots \det(P_k) \det A'$$

$$\text{--- 2.2.6 } \det(AB) = \det(A) \times \det(B)$$

定理 3.3.5

A $n \times n$ 行列
次の同値

① $\text{rank } A = n \iff A$ は

正則

② $\det A \neq 0$

証明

$P_1, \dots, P_l$

A'

$\det(A')$

証明 $A \rightarrow A'$ を行簡約化

$P_1, \dots, P_l$ 基本行列とする

$A' = P_1 \cdots P_l A$ となるものとする

$\det(A') = \det(P_1) \cdots \det(P_l) \det(A)$

3.2.6

$\neq 0$

これは

3.3

rank

rank

rank

rank

$(1) \Rightarrow$

3.2.4 の $\neq 0$ にかゝる

$$\text{rank } A < n \Rightarrow \det(A') = 0$$

$$\text{rank } A = n \Rightarrow \det(A') \neq 0$$

$$\text{よ、} \text{rank } A < n \Rightarrow \det A = 0$$

$$\text{A) } \text{rank } A = n \Rightarrow \det A \neq 0$$

よ、
(① $\Rightarrow$ ②) かつ ①の逆 $\Rightarrow$ ②の逆
(② $\Rightarrow$ ①) と同値)