2026/06/18 第 7 回 線形代数 演義資料

授業で行列式を定義した．しかし定義だけで行列式を計算するのは難しい．そこで今日の演習では，とりあえず以下の定理を認めて行列式を計算できるようになることを目標とする．

定理 176. [教科書, 定理 3.2.5, 3.2.9] 行基本変形と行列式は以下のように対応する．

1. 第 i 行を c 倍すると，行列式も c 倍される．
2. $i \neq j$ について．第 i 行と第 j 行入れ替えると，行列式は -1 倍になる．
3. $i \neq j$ について．第 i 行に第 j 行の c 倍を足しても，行列式は不変である．

また”行”の部分を”列”に変えても同様のことが成り立つ．

定理 177. [教科書, 定理 3.3.2] A を $n-1$ 次正方行列とするとき，$a \in K$ について次が成り立つ．

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ * & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & * \\ 0 & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & a \end{vmatrix} = a|A|$$

定理 178. [教科書, 定理 3.2.8] $\det({}^tA) = \det(A)$

これを使うと行列式が計算できるようになる．

まとめ 179 (行列式の計算方法 1.)**.**

操作 1. 次の行基本変形を繰り返して操作 2 の左辺の形にする．

(I) ある行を λ 倍すると，行列式も λ 倍される．

(II) 二つの行を入れ替えると，行列式は -1 倍になる．

(III) ある行のスカラー倍を他の行に加えても行列式は不変である．

なお必要ならば，行列の転置をとってもいい．転置をとっても行列式は不変である．(もちろん列基本変形を用いても良い)．

操作 2. [教科書, 定理 3.3.2] を用いる．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

操作 3. 行列のサイズが 2 の場合は操作 4 に，そうでない場合は行列のサイズが 2 になるまで操作 1 と 2 を繰り返す．

操作 4. 行列の 2 の場合の行列式の公式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ を用いる.

ただし操作 3, 4 に関しては 3×3 行列の行列式の公式 (サラスの公式) を用いても良い.

例 180. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の行列式は次のように求められる.

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{操作 1 (I)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -8 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 2 & -4 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{操作 1 (III)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -47 \\ 0 & 0 & -1 & 19 \\ 0 & -1 & 4 & 21 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{操作 2}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -47 \\ 0 & -1 & 19 \\ -1 & 4 & 21 \end{vmatrix} \overset{\text{操作 1 (III)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -47 \\ 0 & -1 & 19 \\ 0 & 6 & -26 \end{vmatrix} \overset{\text{操作 2}}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 19 \\ 6 & -26 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{操作 4}}{=} (-1) \{(-1) \times (-26) - 6 \times 19\} = 88.
\end{aligned}
$$

例 181. [教科書, 例 3.1.13] 上三角行列の行列式は対角成分の積である.

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}
$$

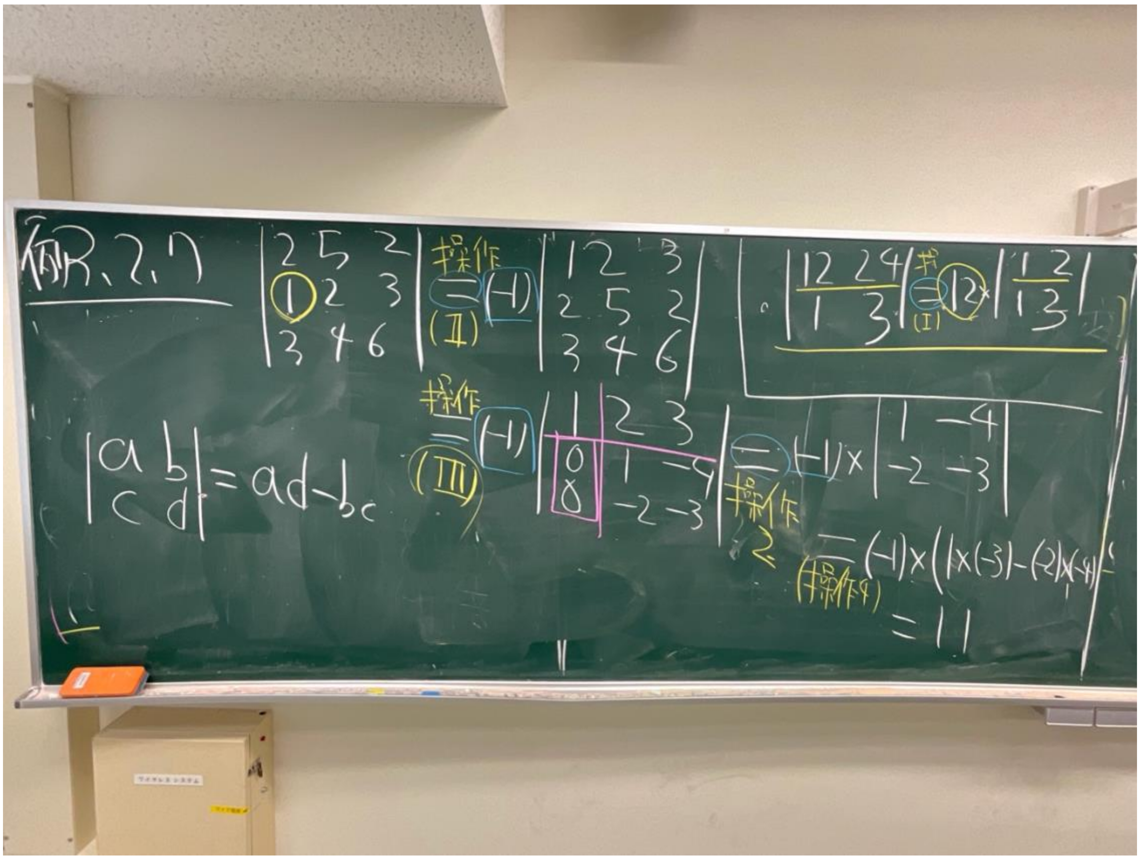
下三角行列も同様である. 授業で示したが, 上を用いてもわかる. 特に単位行列の行列式は 1.

演習問題 3.3.2 を解く上では必要であり, かつ下の性質は重要なので書いておく.

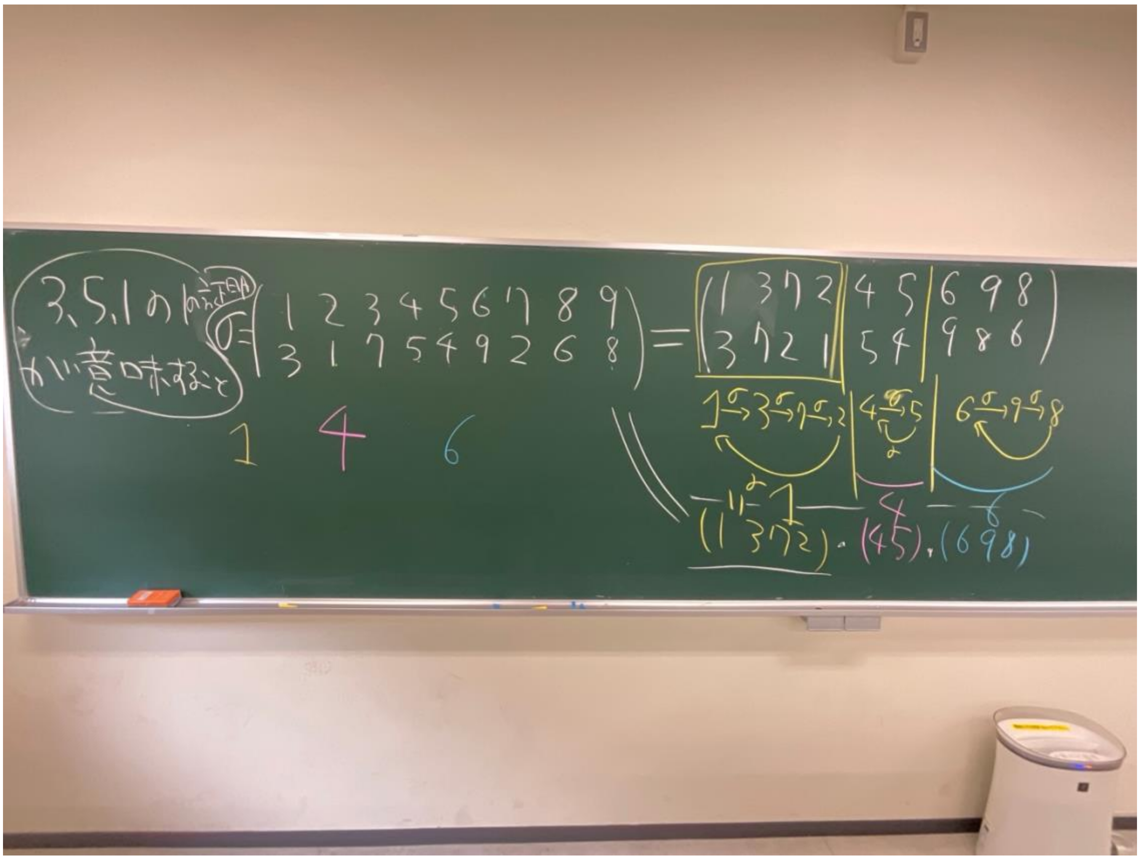
定理 182. [教科書, 定理 3.3.4] $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

補足 183. 演習問題 3.2.3 によって基本変形での振る舞いと $\det E_n = 1$ という条件があれば det はただ一つに定まる. 他にも交代性 (基本変形の 2 つ目) と多重線形性 (基本変形の 1 つ目と [教科書, 定理 3.2.1]), そして $\det(E_n) = 1$ という条件があれば det はただ一つに定まる.

なので det の形が理解できなくてもそこまで問題ない. 実際上の唯一性を用いて det を定義している教科書もある.



例R、2、7
2 5 2
1 2 3
3 4 6
操作
(II)
= (−1)
1 2 3
2 5 2
3 4 6
12 24
1 3
= 12×
1 2
1 3
操作
(III)
= (−1)
1 2 3
0 1 −4
0 −2 −3
= (−1)×
1 −4
−2 −3
操作 2
= (−1)×(1×(−3)−(−2)×(−4))
(操作4)
= 11
a b
c d
= ad−bc


3,5,1の例証明が意味すること
σ = (1 2 3 4 5 6 7 8 9 / 3 1 7 5 4 9 2 6 8) = (1 3 7 2 / 3 7 2 1)(4 5 / 5 4)(6 9 8 / 9 8 6)
1 4 6
(1 3 7 2)・(4 5)・(6 9 8)