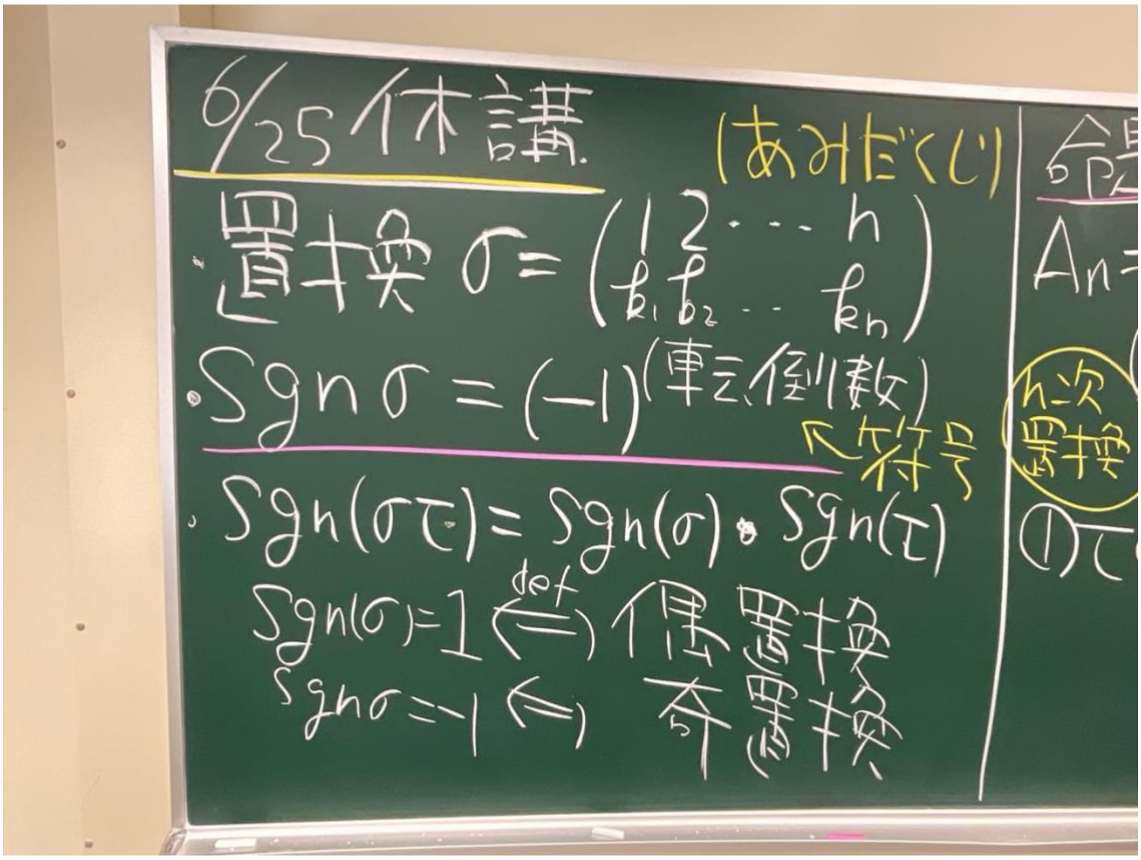


6/25 休講 (あみだくじ)

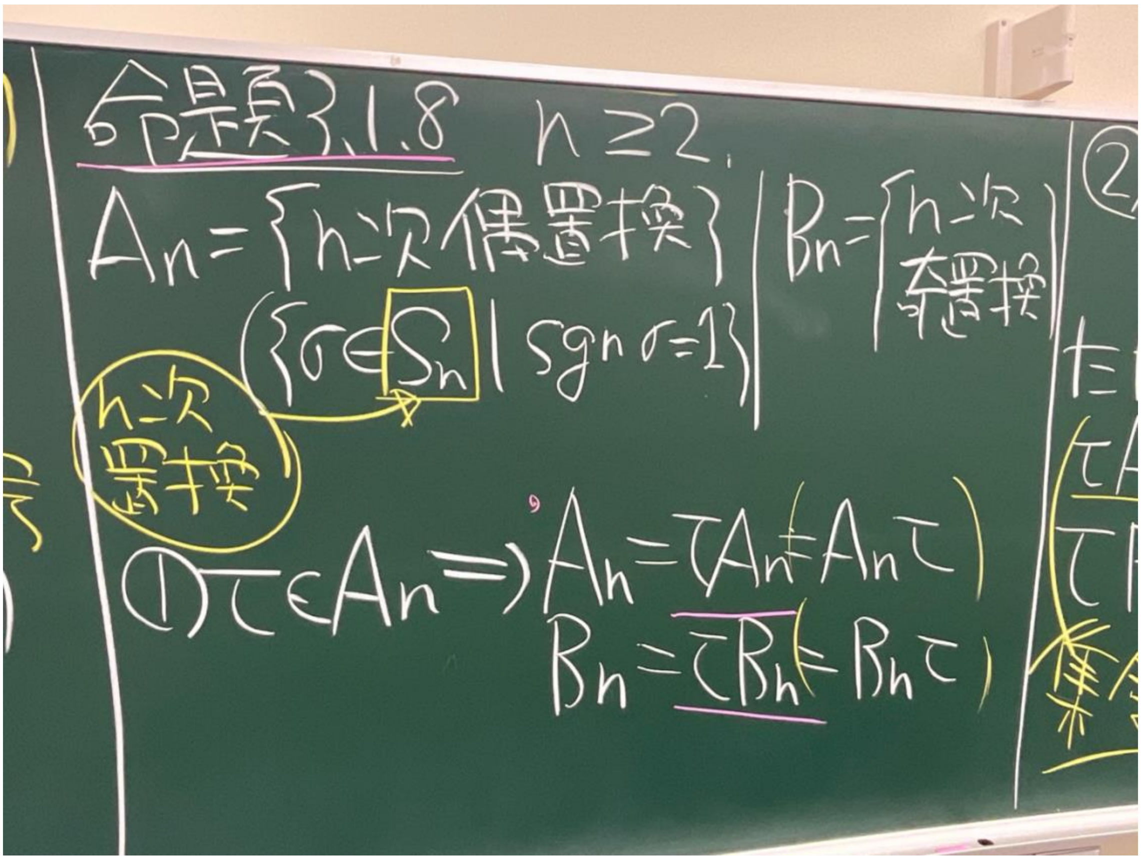
置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$

・$\mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^{(\text{転倒数})}$ ↖符号

・$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\mathrm{sgn}(\tau)$

$\mathrm{sgn}(\sigma)=1 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 偶置換

$\mathrm{sgn}\,\sigma=-1 \Longleftrightarrow$ 奇置換



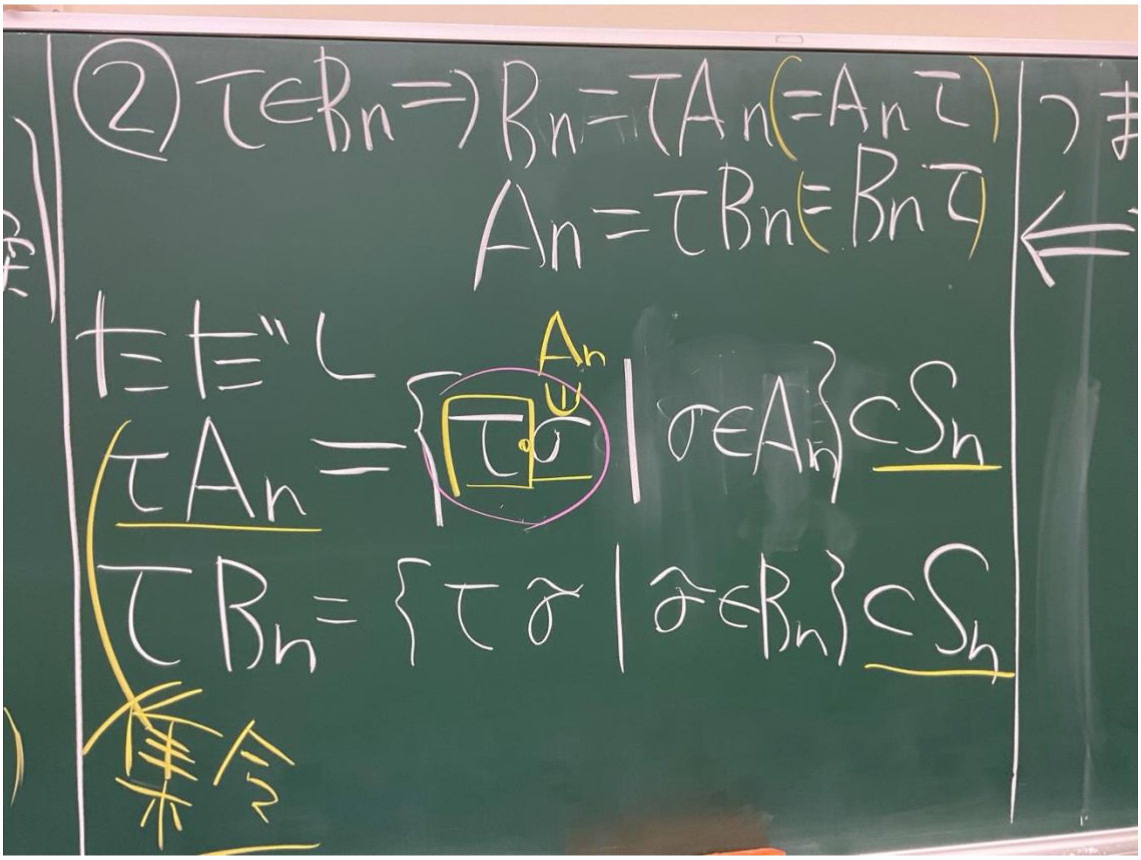
命題3.1.8 $n \geq 2$.

$A_n = \{n$次偶置換$\}$ $(\{\sigma \in \boxed{S_n} \mid \mathrm{sgn}\,\sigma = 1\})$ | $B_n = \{n$次奇置換$\}$

n次置換

① $\tau \in A_n \Longrightarrow A_n = \tau A_n = A_n \tau$

$B_n = \tau B_n = B_n \tau$



② $\tau \in B_n \Rightarrow B_n = \tau A_n \ (= A_n \tau)$

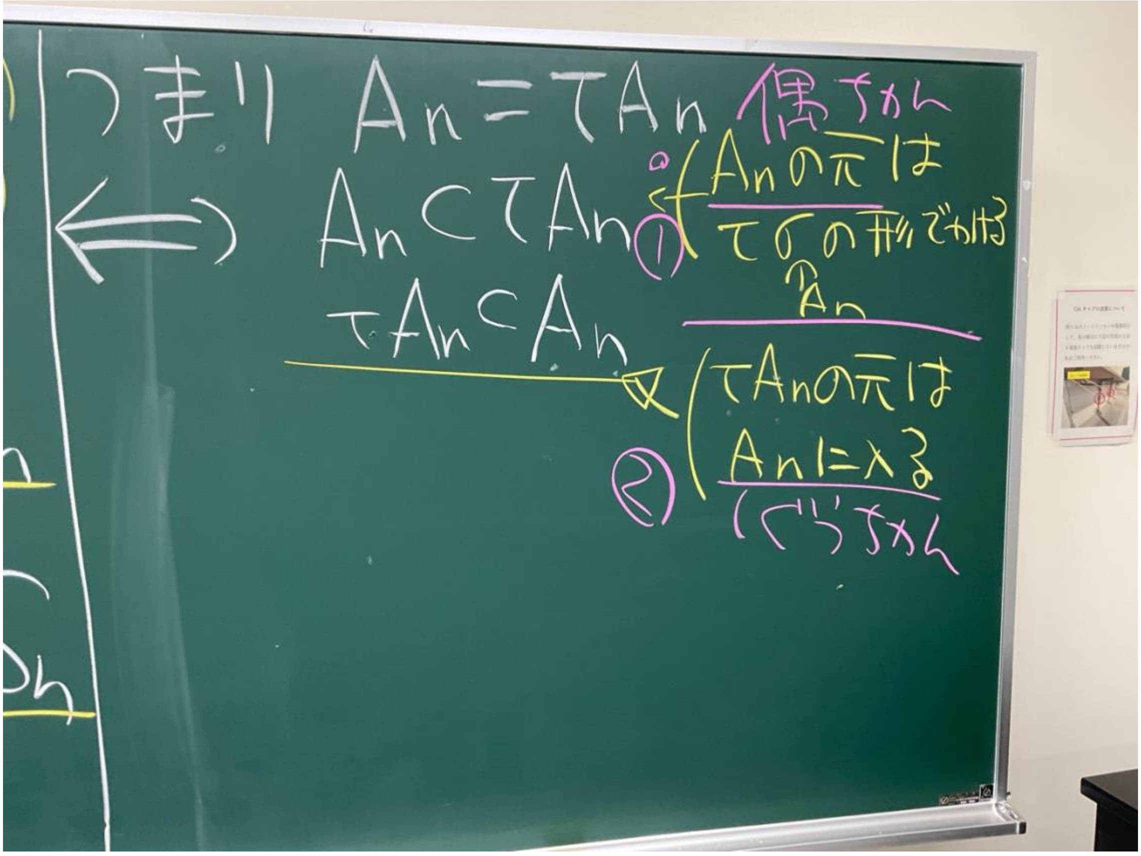
$A_n = \tau B_n \ (= B_n \tau)$

ただし

$\underline{\tau A_n} = \{\boxed{\tau}\overset{A_n}{\sigma} \mid \sigma \in A_n\} \subset \underline{S_n}$

$\tau B_n = \{\tau\sigma \mid \sigma \in B_n\} \subset \underline{S_n}$

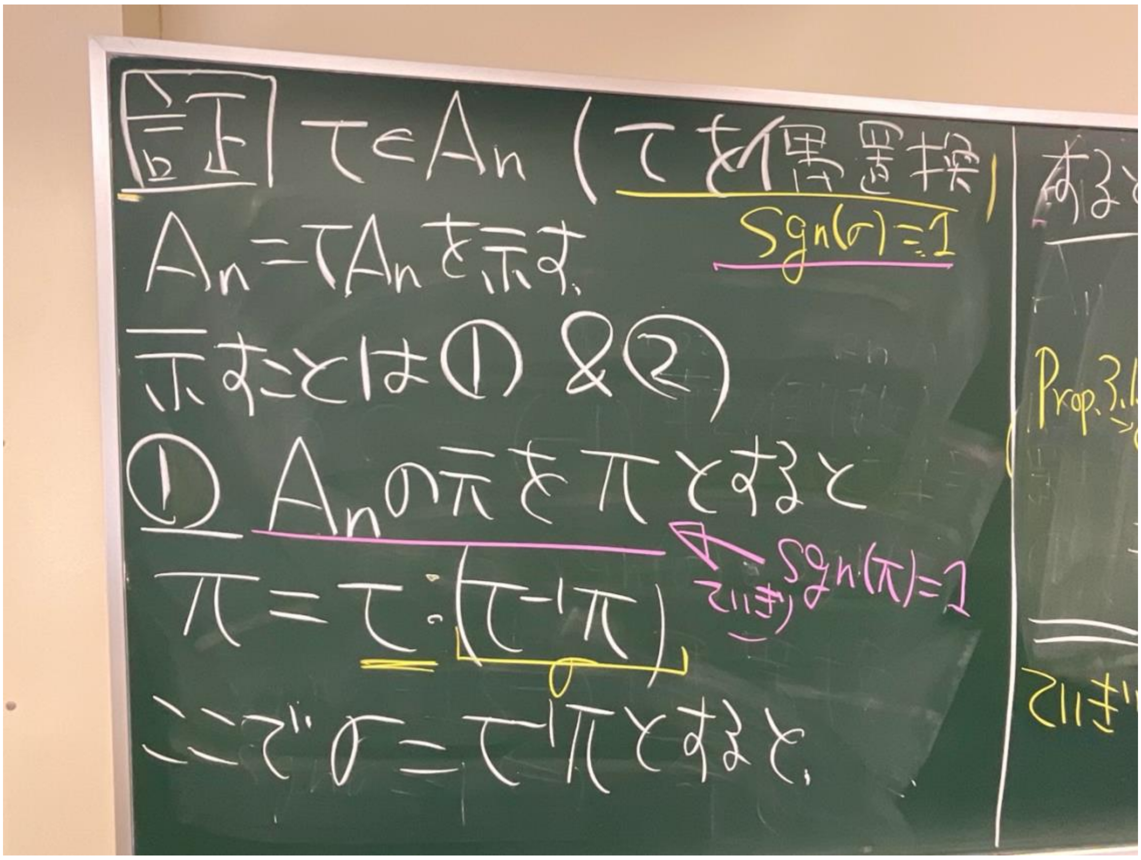
集合



つまり $A_n = \tau A_n$ 偶ちかん

$\Longleftrightarrow$ $A_n \subset \tau A_n$ ① Anの元は τσの形でかける $\underset{A_n}{\sigma}$

$\underline{\tau A_n \subset A_n}$ ② τAnの元は Anに入る 偶ちかん



$\boxed{証}$ $\tau \in A_n$ （τを偶置換）

$\mathrm{sgn}(\sigma)=1$

$A_n = \tau A_n$を示す。

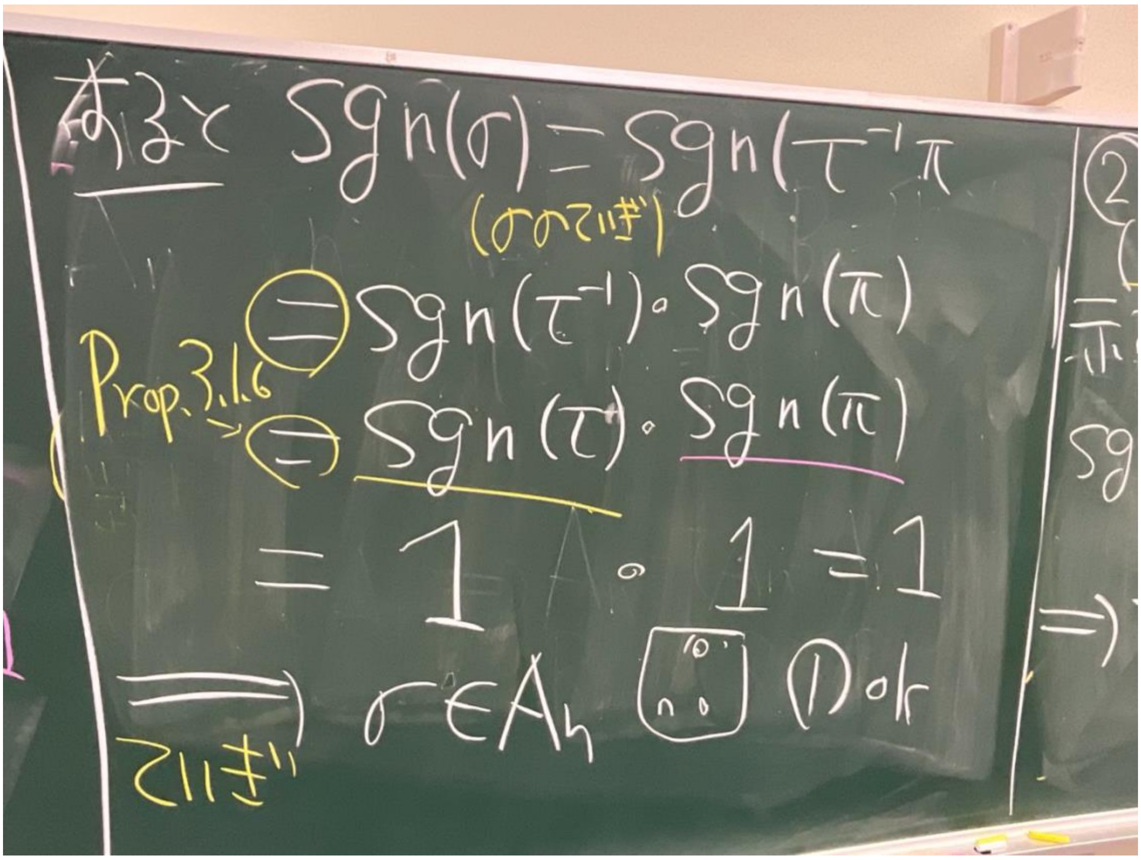
示すことは① & ②

① A_nの元をπとすると

$\overset{\text{ていぎ}}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{sgn}(\pi)=1$

$\pi = \underline{\tau} \circ \underbrace{(\tau^{-1}\pi)}_{\sigma}$

ここで$\sigma = \tau^{-1}\pi$とすると。



すると $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau^{-1}\pi$

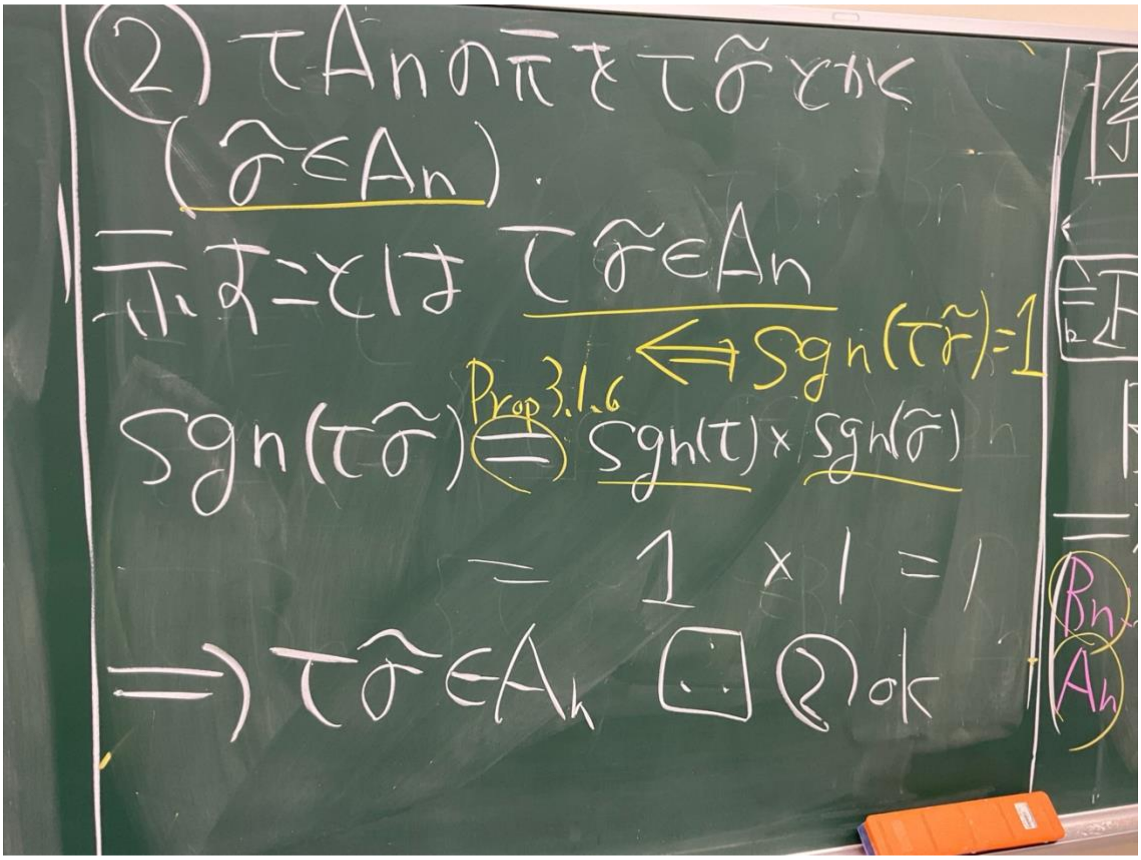
（σのていぎ）

$\textcircled{=} \mathrm{sgn}(\tau^{-1}) \circ \mathrm{sgn}(\pi)$

Prop.3.1.6 → $\textcircled{=} \underline{\mathrm{sgn}(\tau)} \circ \underline{\mathrm{sgn}(\pi)}$

$= 1 \circ 1 = 1$

$\underset{\text{ていぎ}}{\Longrightarrow}$ $\sigma \in A_n$ ① ok



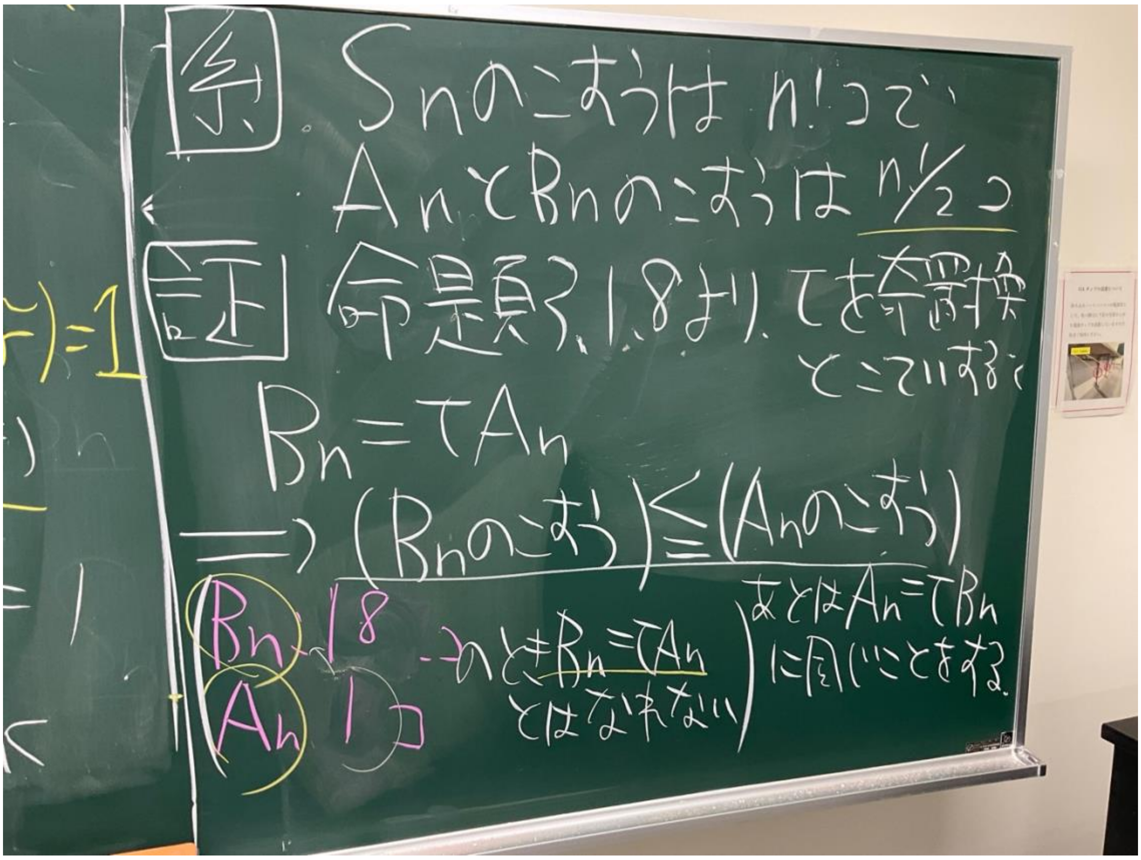
② τA_n の元を $\tau\hat{\sigma}$ とかく ($\hat{\sigma}\in A_n$).

示すことは $\tau\hat{\sigma}\in A_n \Longleftrightarrow \mathrm{sgn}(\tau\hat{\sigma})=1$

$$\mathrm{sgn}(\tau\hat{\sigma}) \overset{\text{Prop 3.1.6}}{=} \mathrm{sgn}(\tau)\times\mathrm{sgn}(\hat{\sigma})$$

$$= 1 \times 1 = 1$$

$\Longrightarrow \tau\hat{\sigma}\in A_n$ □ ② ok



系. S_n のこすうは $n!$ こで、A_n と B_n のこすうは $n!/2$ こ

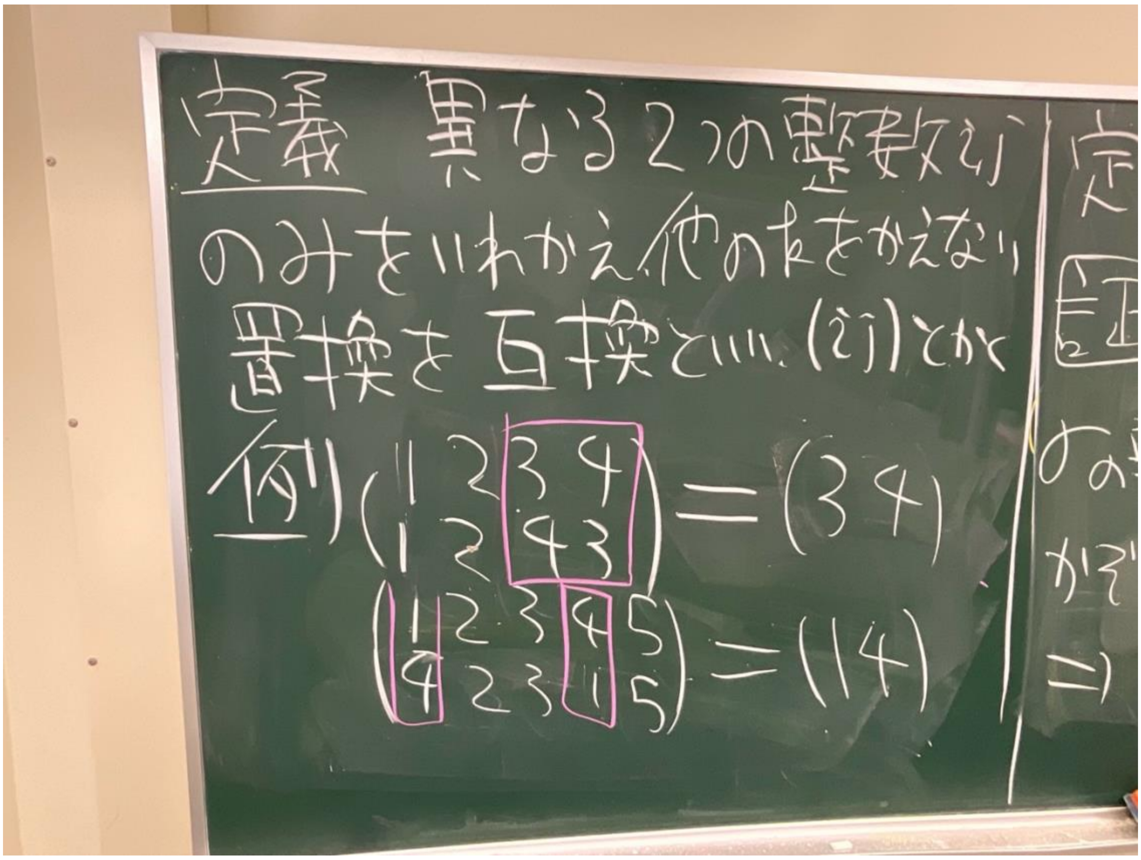
証 命題3.1.8より、τ を奇置換とこていすると

$B_n = \tau A_n$

$\Longrightarrow$ (B_n のこすう) $\leqq$ (A_n のこすう)

B_n 18
A_n 1こ
--> のとき $B_n = \tau A_n$ とはなれない

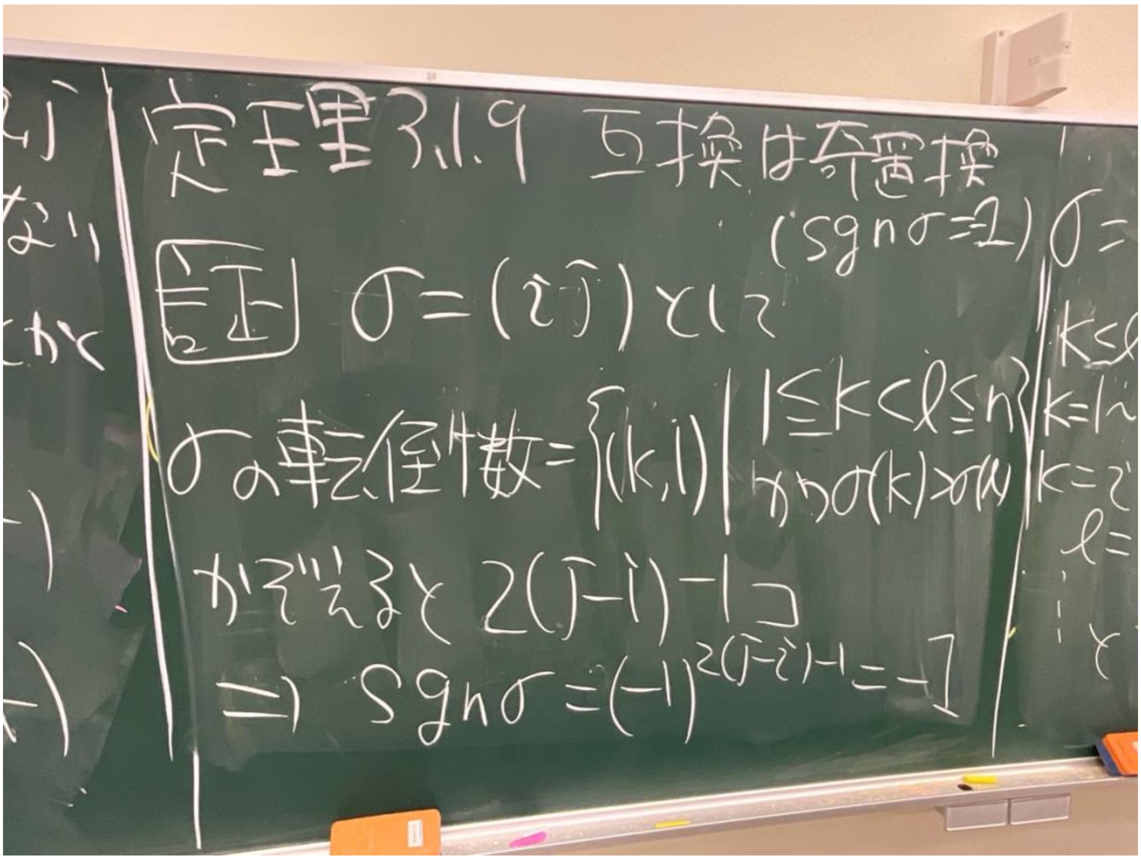
あとは $A_n = \tau B_n$ に同じことをする。



定義 異なる2つの整数i, jのみをいれかえ他の元をかえない置換を互換といい$(i\ j)$とかく

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (3\ 4)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 4)$



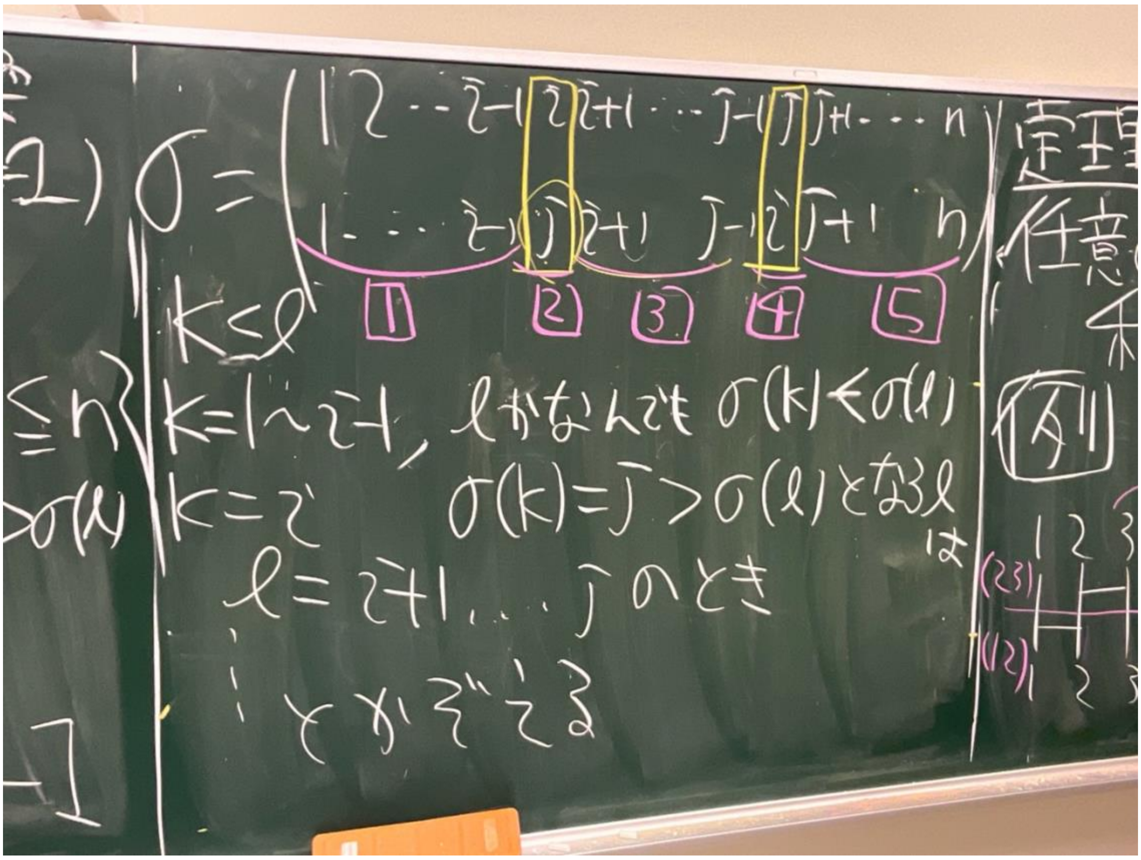
定理3.1.9 互換は奇置換 $(\mathrm{sgn}\,\sigma = -1)$

証 $\sigma = (i\ j)$として

σの転倒数$= \{(k, l) \mid 1 \leq k < l \leq n$ かつ $\sigma(k) > \sigma(l)\}$ を

かぞえると $2(j-i)-1$コ

$\Rightarrow \mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^{2(j-i)-1} = -1$



$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 & \boxed{i} & i+1 & \cdots & j-1 & \boxed{j} & j+1 & \cdots & n \\ \underbrace{1 \ \cdots \ i-1}_{\boxed{1}} & & & & \underbrace{j}_{\boxed{2}} & \underbrace{i+1 \ \ j-1}_{\boxed{3}} & & & \underbrace{i}_{\boxed{4}} & \underbrace{j+1 \ \ n}_{\boxed{5}} & & \end{pmatrix}$$

$k<\ell$

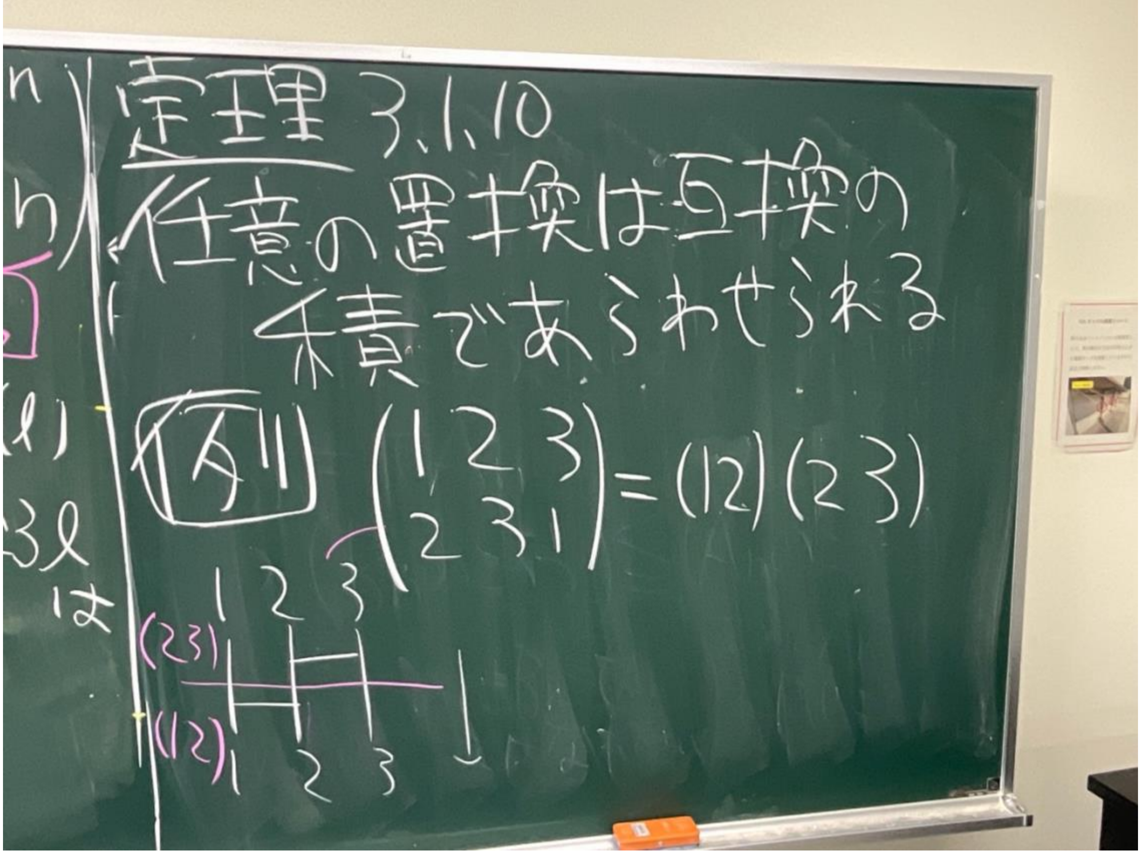
$k=1 \sim i-1$, ℓ がなんでも $\sigma(k)<\sigma(\ell)$

$k=i$ で　$\sigma(k)=j>\sigma(\ell)$ となる ℓ は

$\ell=i+1, \ldots, j$ のとき

⋮

とかぞえる

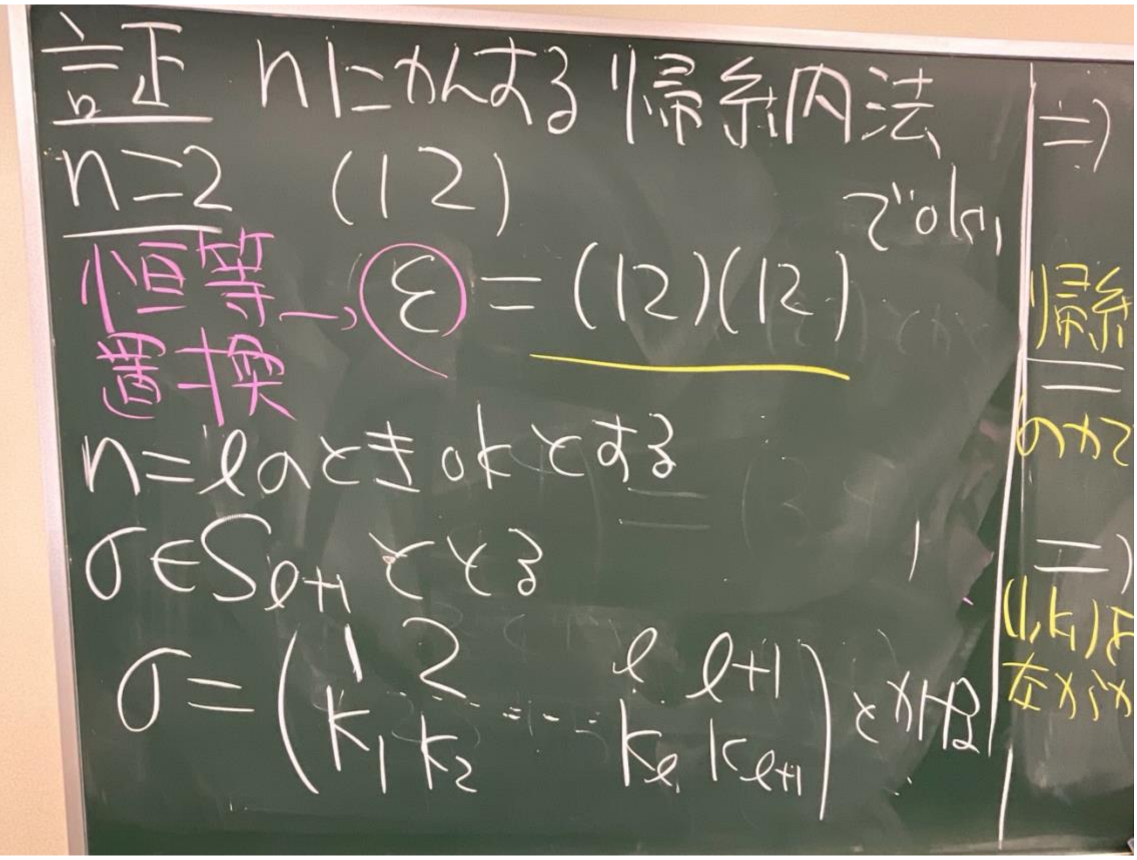


定理 3.1.10

任意の置換は互換の積であらわせられる

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2)(2\,3)$

1 2 3
(2 3)
(1 2)
1 2 3



証 nにかんする帰納法

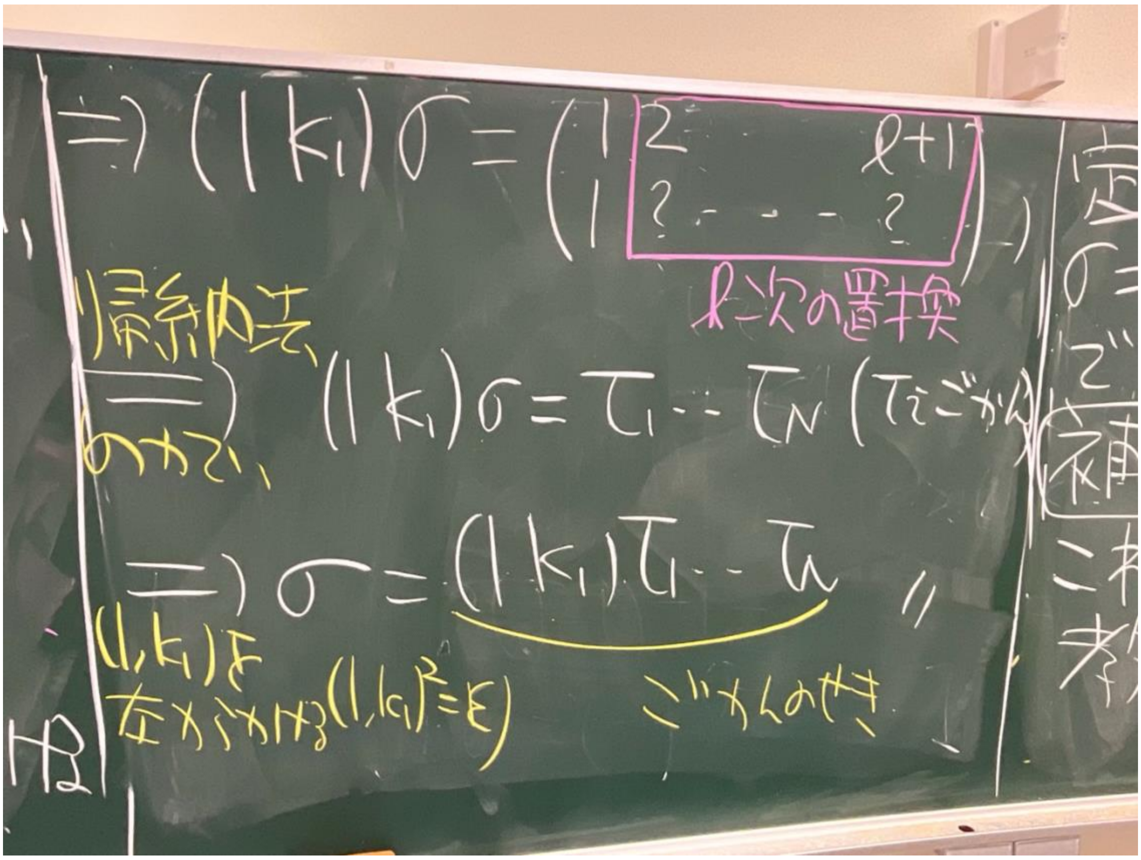
$n=2$ $(1\ 2)$ でok

恒等置換 → $\varepsilon = \underline{(1\ 2)(1\ 2)}$

$n=l$ のときok とする

$\sigma \in S_{l+1}$ をとる

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & l & l+1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_l & k_{l+1} \end{pmatrix}$ とかける



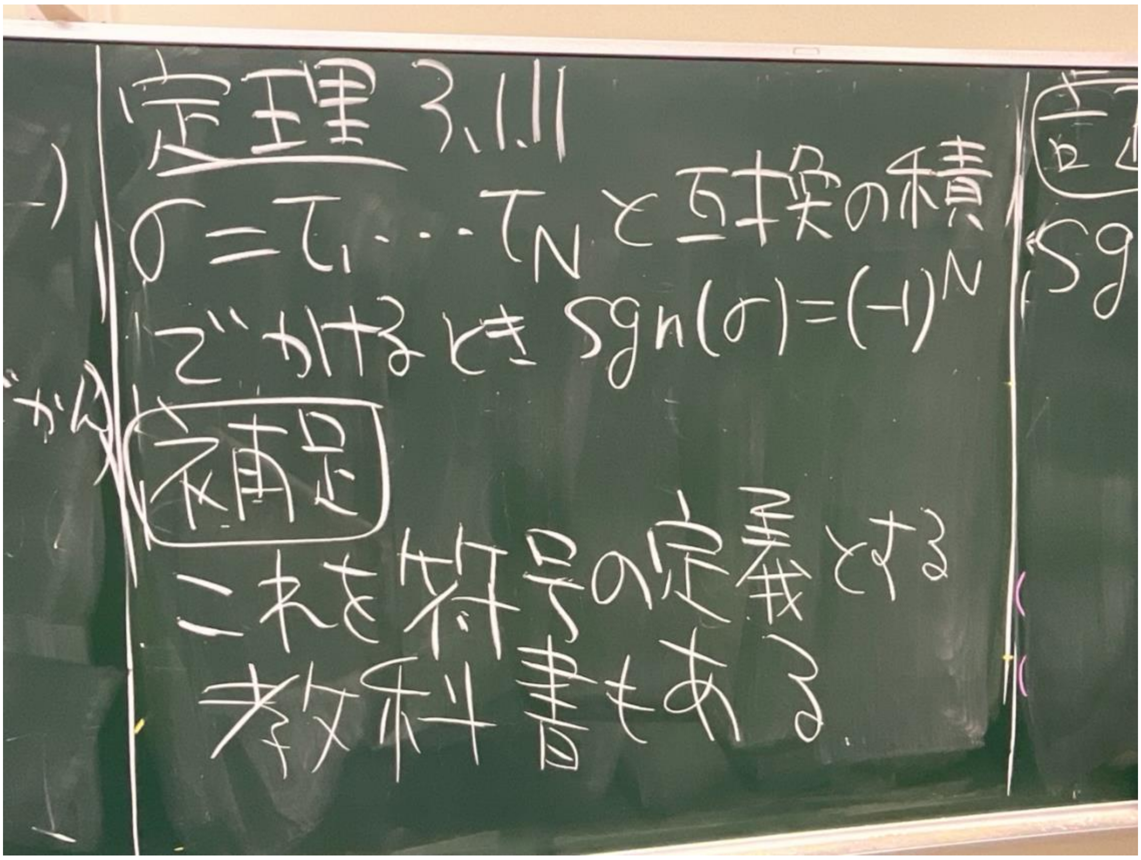
$\Rightarrow (1\ k_1)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} 2 & \cdots & l+1 \\ ? & \cdots & ? \end{matrix}} \\ 1 & \end{pmatrix}$

l次の置換

帰納法のかてい $\Rightarrow (1\ k_1)\sigma = \tau_1 \cdots \tau_N$ (τ_i ごかん

$\Rightarrow \sigma = \underbrace{(1\ k_1)\tau_1 \cdots \tau_N}_{\text{ごかんのせき}}$ //

$(1, k_1)$を左からかける ($(1, k_1)^2 = \varepsilon$)

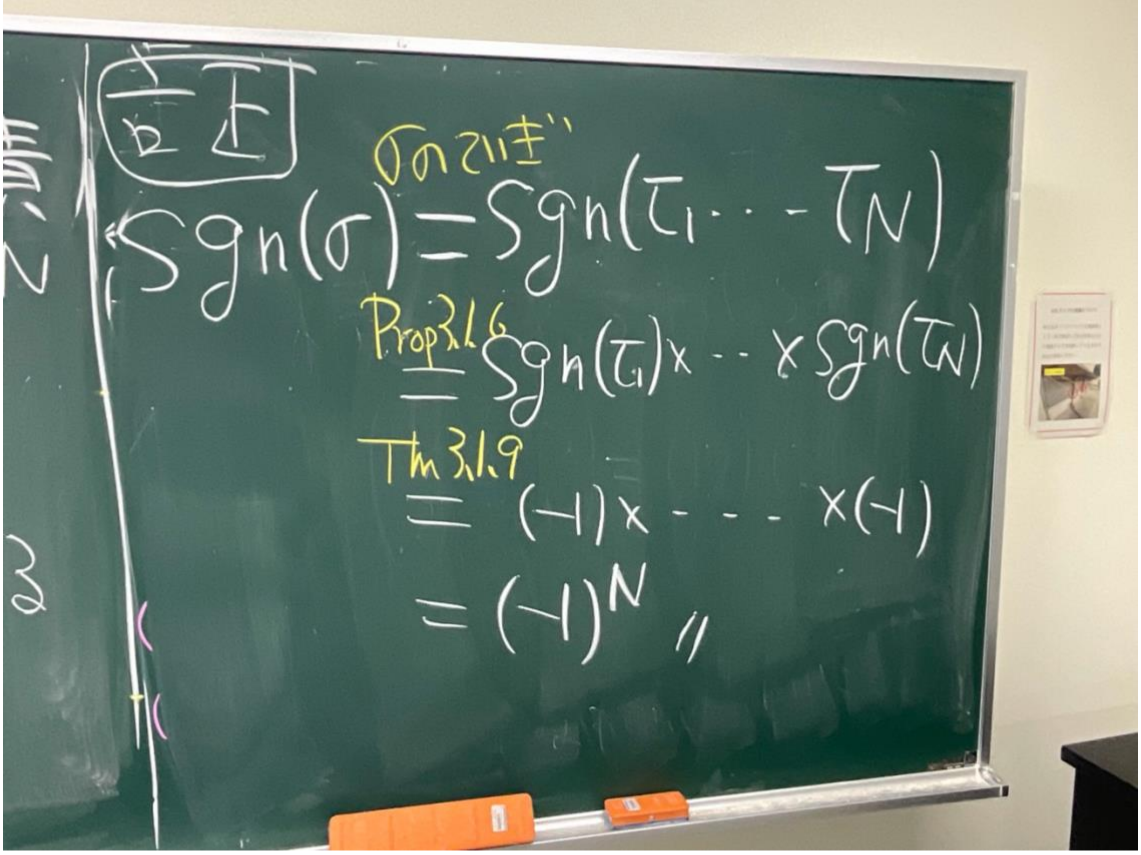


定理3.1.11

$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_N$ と互換の積でかけるとき $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^N$

$\boxed{\text{補足}}$

これを符号の定義とする教科書もある



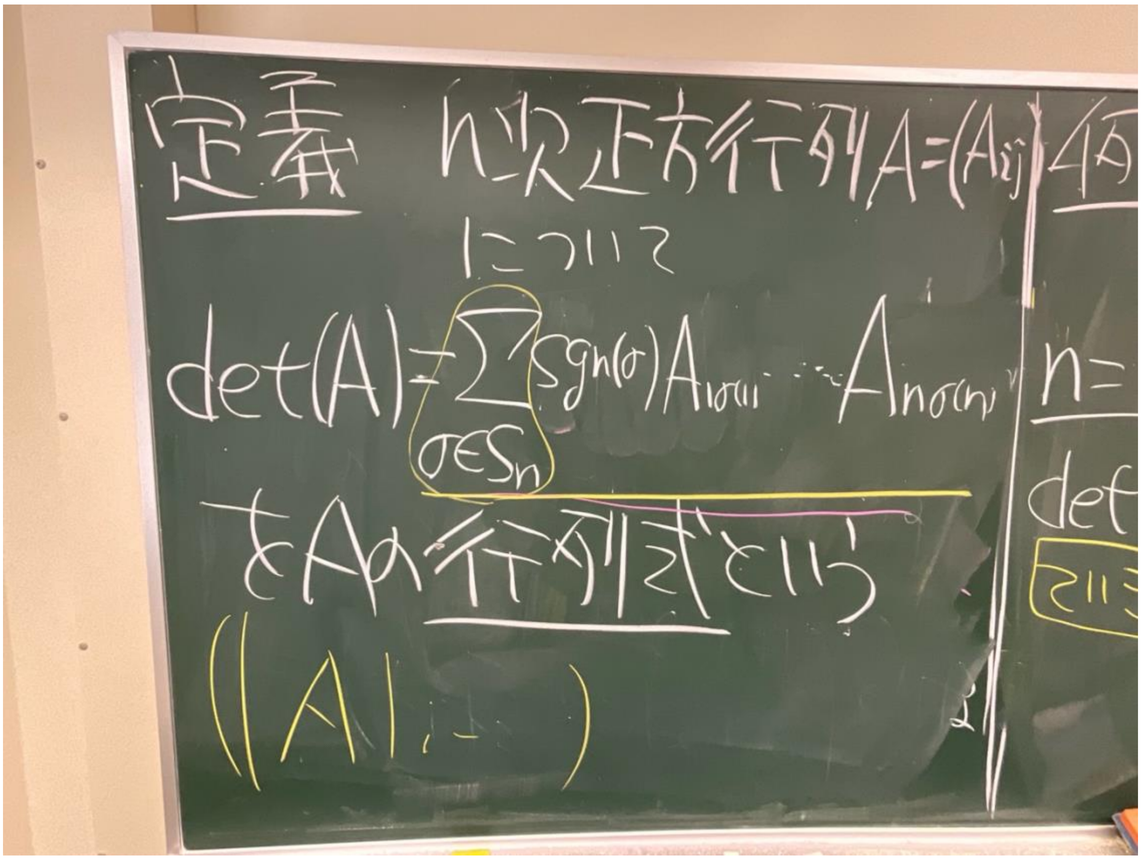
$\boxed{\text{証明}}$

$$\mathrm{sgn}(\sigma) \overset{\sigma\text{のていぎ}}{=} \mathrm{sgn}(\tau_1 \cdots \tau_N)$$

$$\overset{\text{Prop3.1.6}}{=} \mathrm{sgn}(\tau_1) \times \cdots \times \mathrm{sgn}(\tau_N)$$

$$\overset{\text{Thm3.1.9}}{=} (-1) \times \cdots \times (-1)$$

$$= (-1)^N \quad //$$

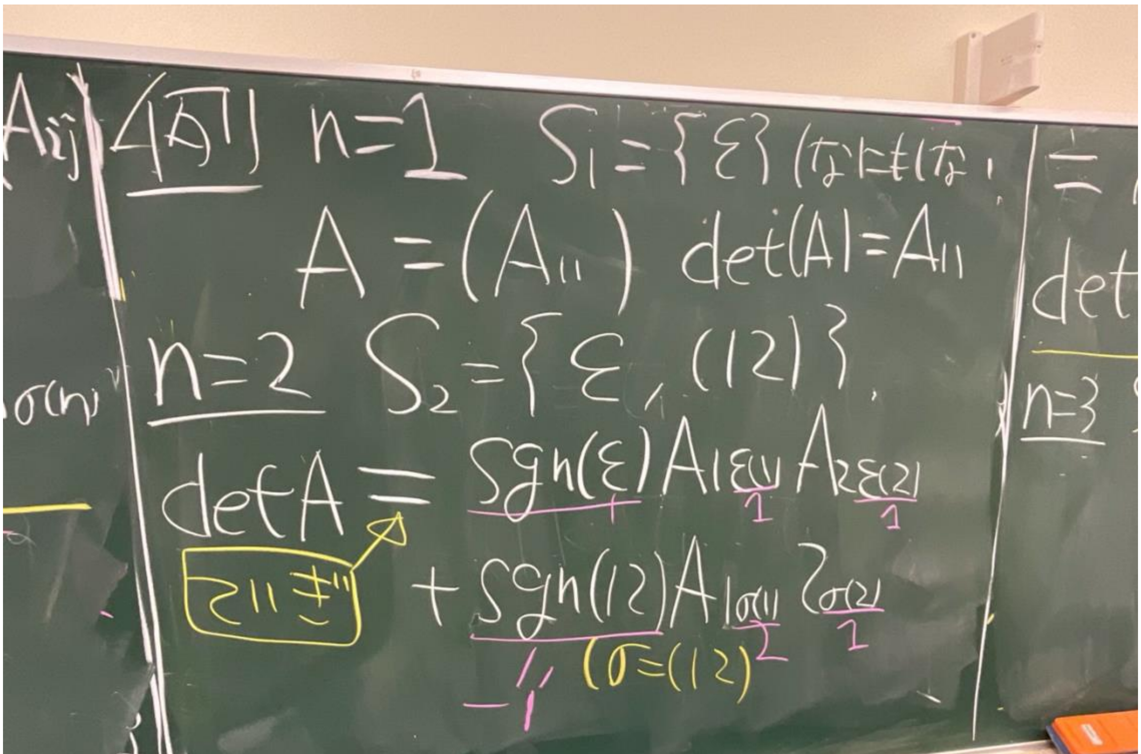


定義 n次正方行列$A=(A_{ij})$について

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)A_{1\sigma(1)}\cdots\cdots A_{n\sigma(n)}$$

をAの行列式という

$(|A|, -)$



例 $n=1$　$S_1=\{\varepsilon\}$ (なにもな

$A=(A_{11})$　$\det(A)=A_{11}$

$n=2$　$S_2=\{\varepsilon, (12)\}$,

$$\det A=\underset{1}{\underline{\mathrm{sgn}(\varepsilon)}}A_{1\underset{1}{\underline{\varepsilon(1)}}}A_{2\underset{1}{\underline{\varepsilon(2)}}}$$

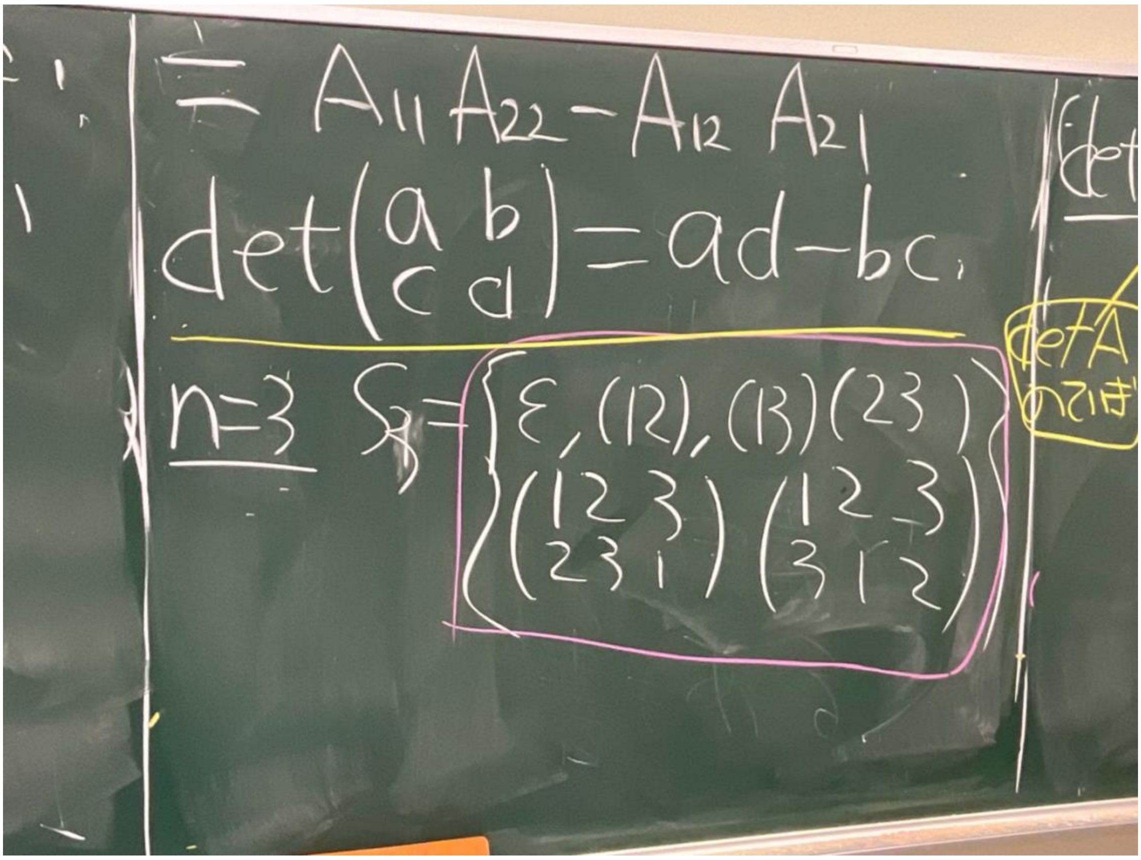
$$+\underset{-1}{\underline{\mathrm{sgn}(12)}}A_{1\underset{2}{\underline{\sigma(1)}}}2_{\underset{1}{\underline{\sigma(2)}}}$$

$(\sigma=(12)$

$\boxed{\text{ていぎ}}$

$n=3$

det

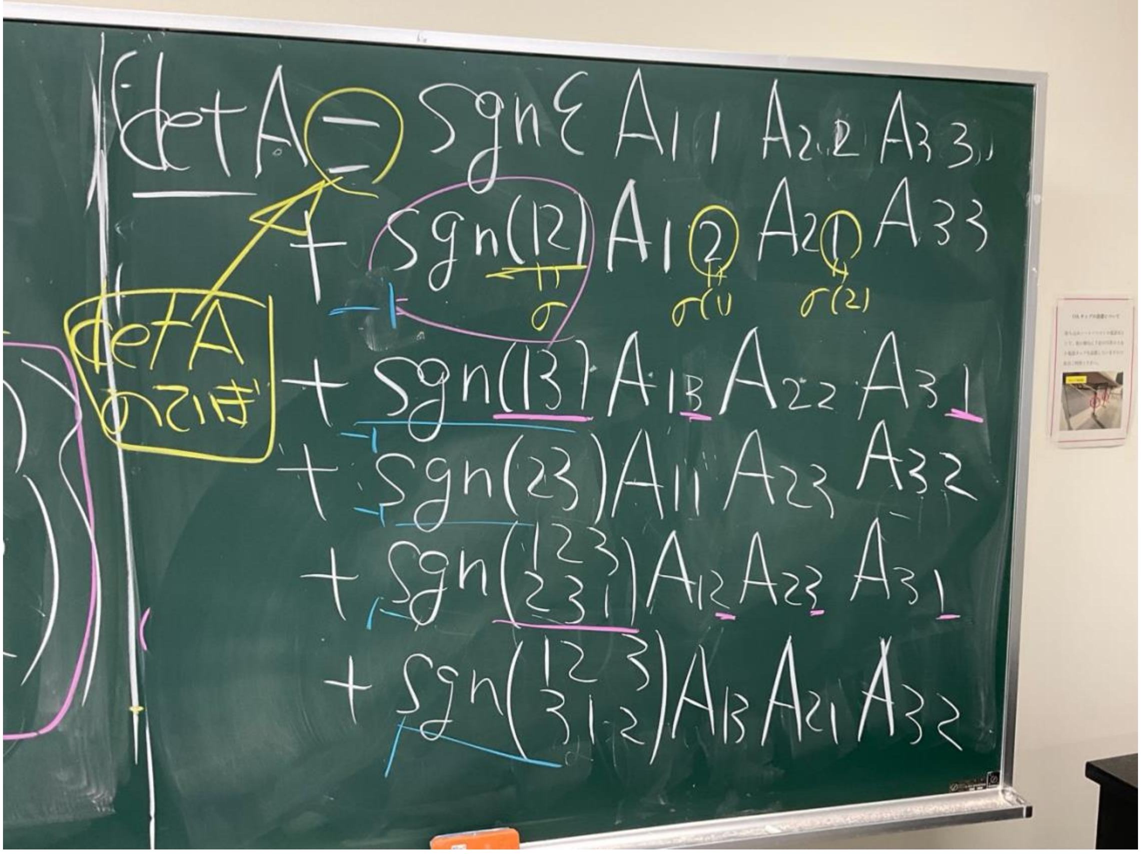


$= A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$

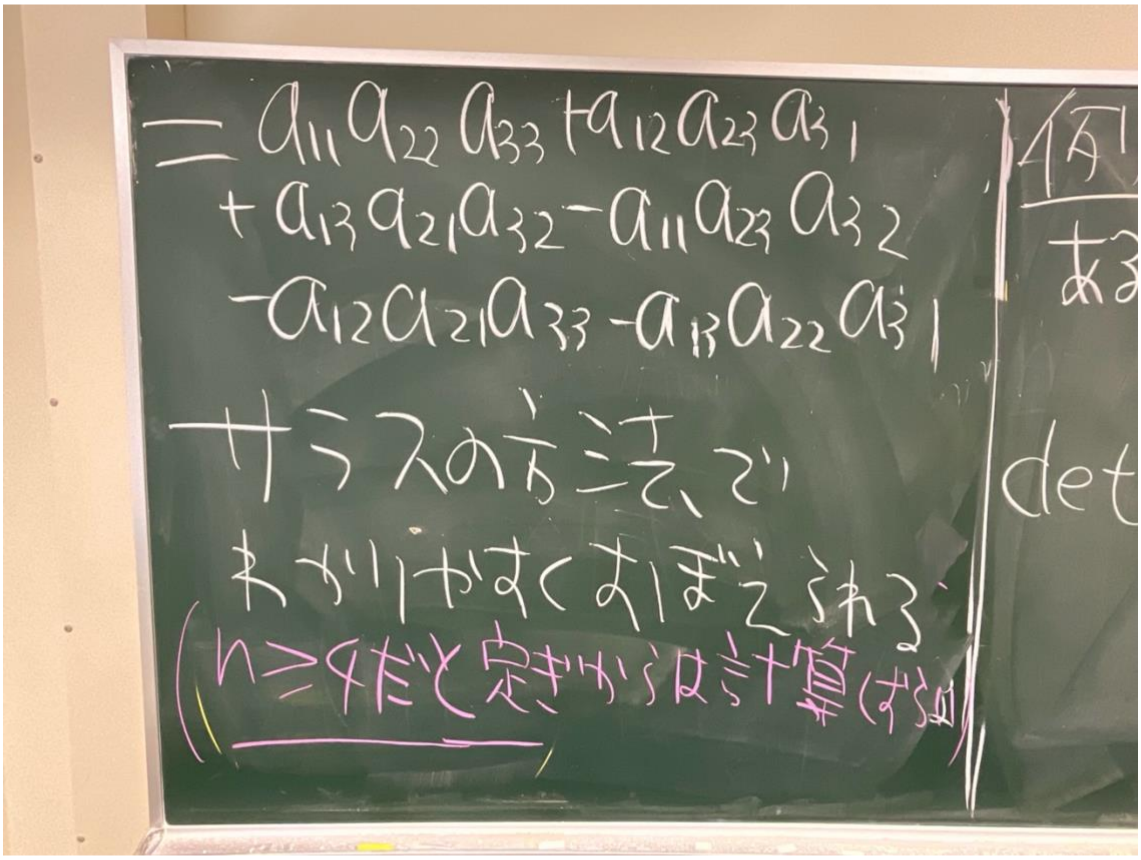
$\underline{n=3}$ $S_3 = \boxed{\left\{ \varepsilon, (12), (13), (23), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}}$

detA のていぎ



$$\begin{aligned} \underline{\det A} \;=\; & \operatorname{sgn}\varepsilon\, A_{11}A_{22}A_{33} \\ & + \underset{-1}{\operatorname{sgn}}\underset{\sigma}{\underset{\parallel}{(12)}}\, A_{1\underset{\sigma(1)}{\underset{\parallel}{②}}}A_{2\underset{\sigma(2)}{\underset{\parallel}{①}}}A_{33} \\ & + \underset{-1}{\operatorname{sgn}}\underline{(13)}\, A_{1\underline{3}}A_{22}A_{3\underline{1}} \\ & + \underset{-1}{\operatorname{sgn}}(23)\, A_{11}A_{23}A_{32} \\ & + \underset{1}{\operatorname{sgn}}\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}\, A_{1\underline{2}}A_{2\underline{3}}A_{3\underline{1}} \\ & + \underset{1}{\operatorname{sgn}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\, A_{13}A_{21}A_{32} \end{aligned}$$

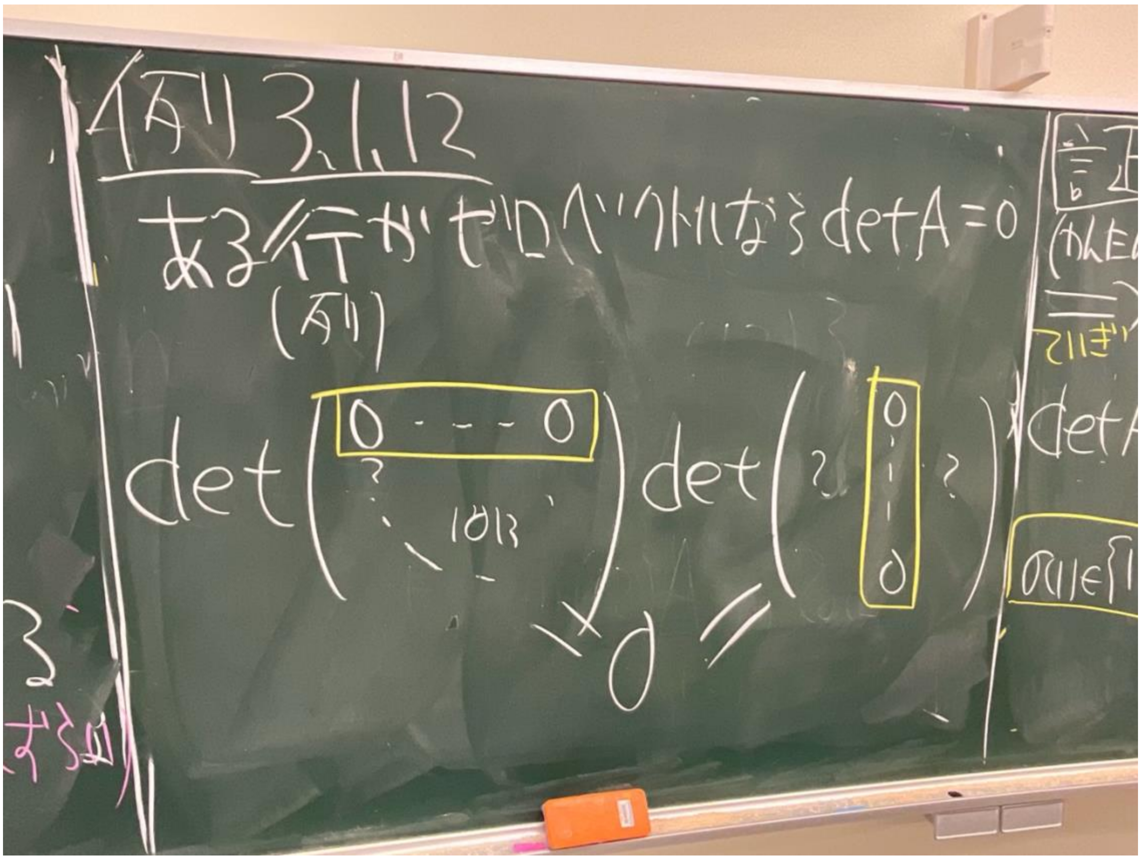
detA のていぎ



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

サラスの方法で
わかりやすくおぼえられる

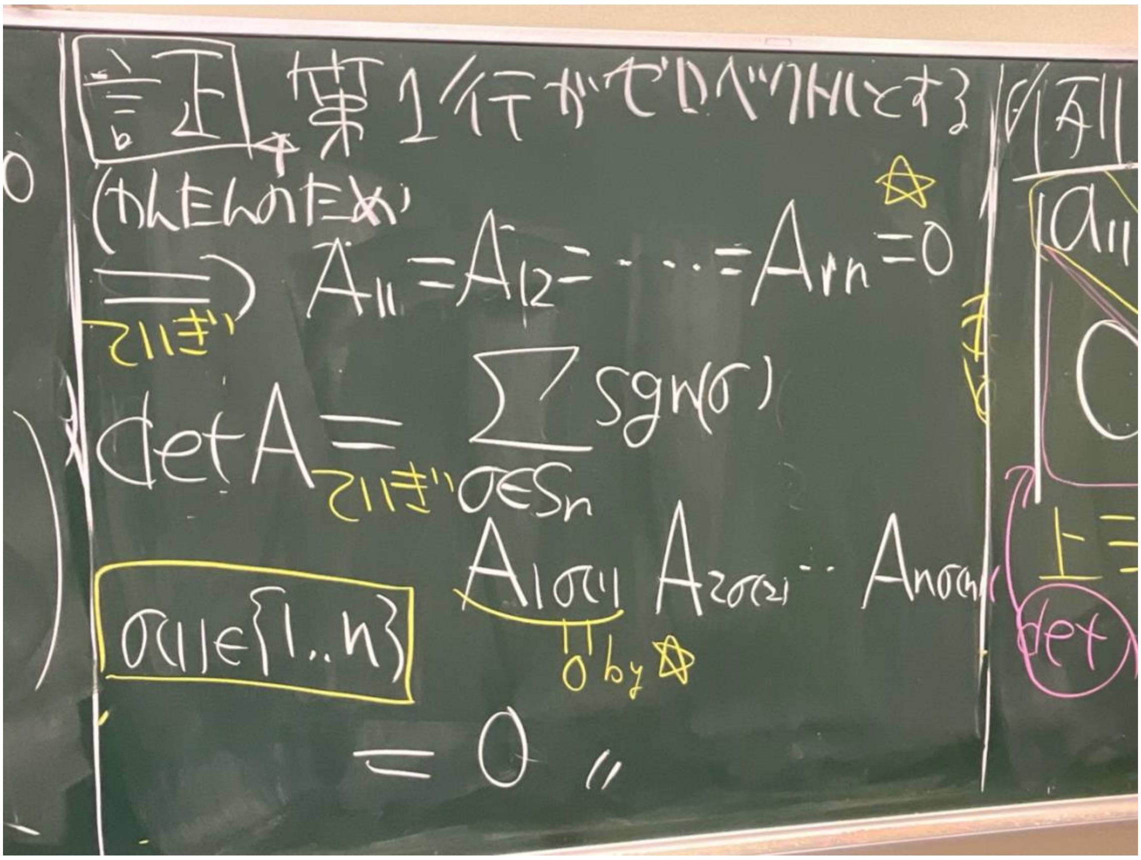
（n≧4だと定義から計算する!!）



例 3.1.12

ある行（列）がゼロベクトルなら $\det A = 0$

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{0 \cdots 0} \\ ? \\ [illegible] \end{pmatrix} = 0 \qquad \det\begin{pmatrix} ? & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} & ? \end{pmatrix} = 0$$



証明 第1行がゼロベクトルとする ☆

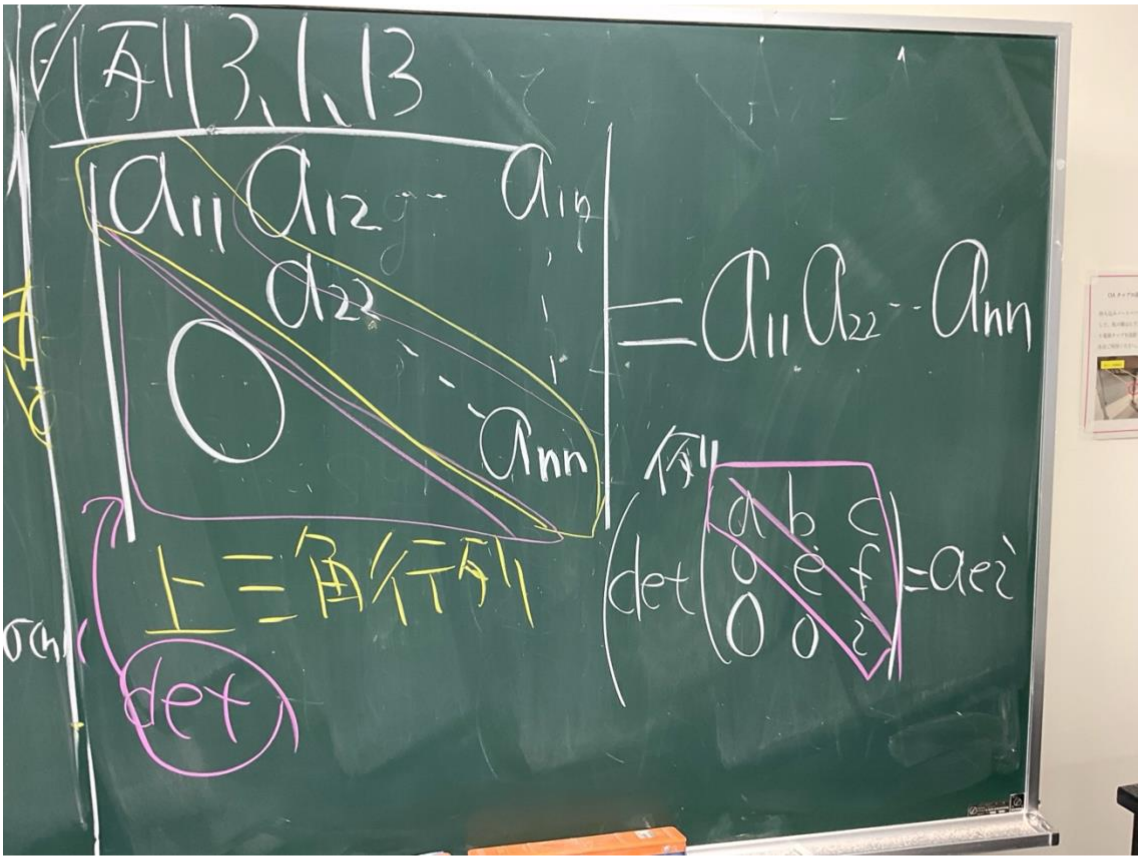
(かんたんのため)

$\overset{\text{ていぎ}}{\Longrightarrow}$ $A_{11} = A_{12} = \cdots = A_{1n} = 0$

$$\det A \overset{\text{ていぎ}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \underbrace{A_{1\sigma(1)}}_{0 \text{ by } ☆} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)}$$

$\boxed{\sigma(1) \in \{1, .., n\}}$

$= 0$ //



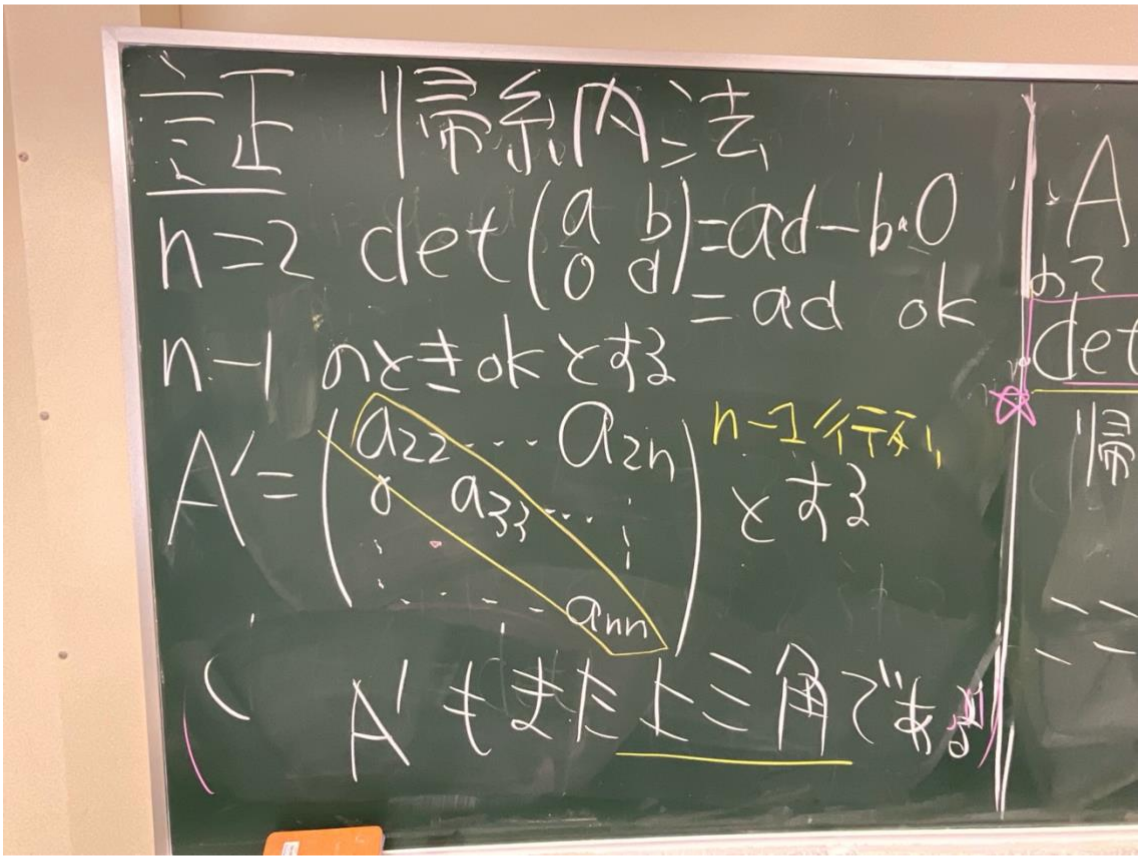
例3.1.13

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

上三角行列

det

例 $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = aei$



証　帰納法

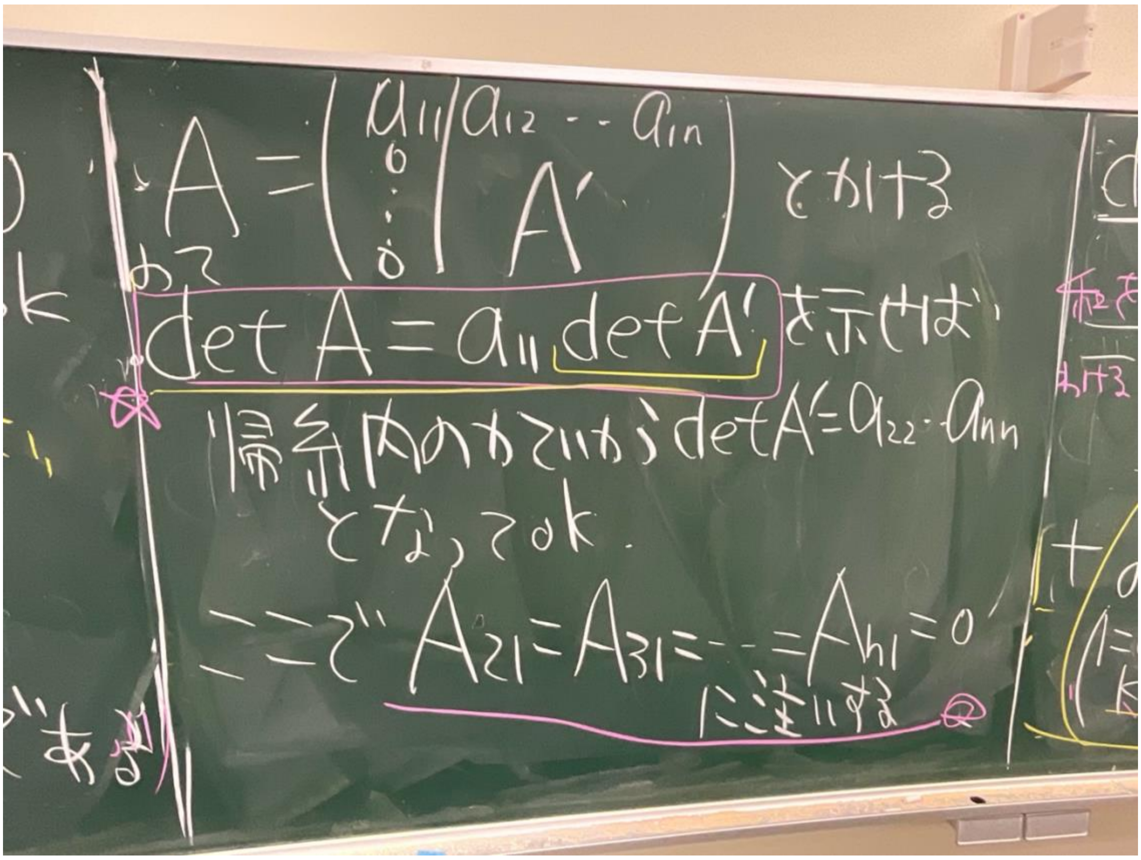
$n=2$ $\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = ad - b\cdot 0$

$= ad$ ok

$n-1$ のときokとする

$A' = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ とする　n−1 行列

A'もまた上三角である



$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right)$ とかける

よって

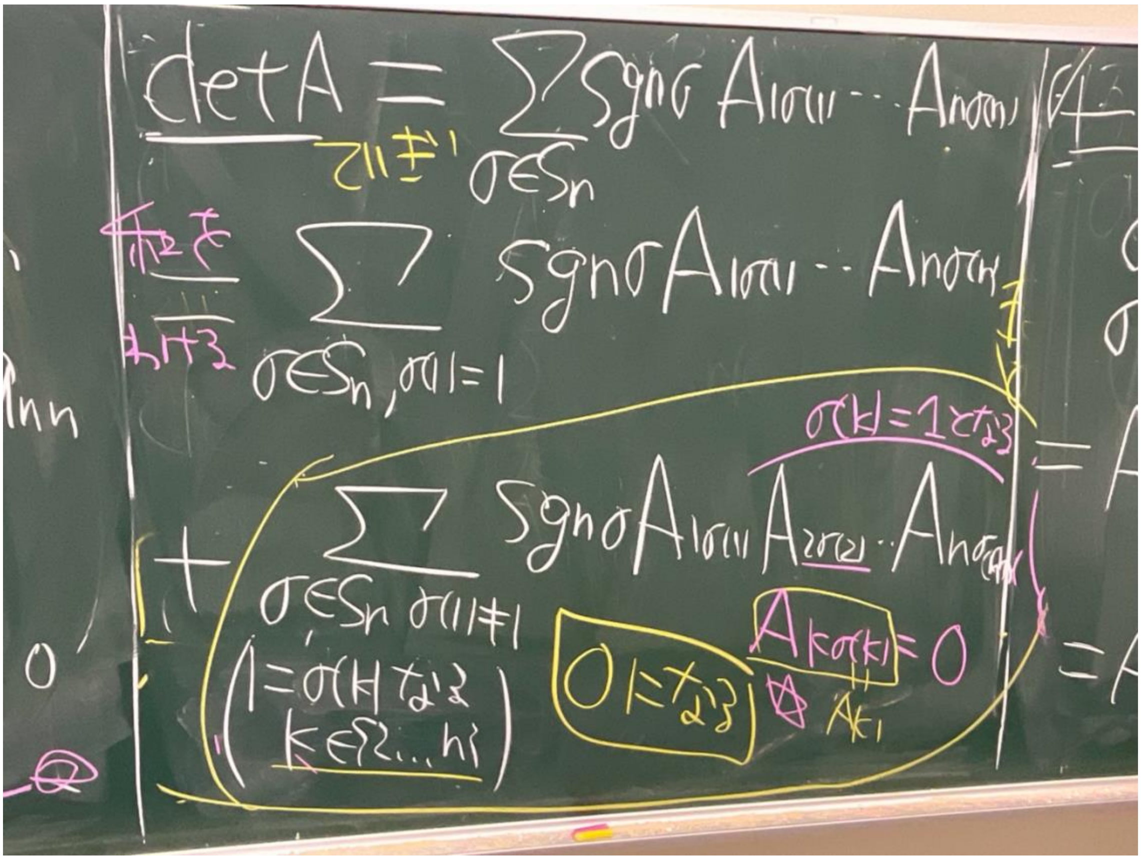
$\det A = a_{11} \det A'$ を示せば

帰納法のかていから $\det A' = a_{22} \cdots a_{nn}$

となってok.

ここで $A_{21} = A_{31} = \cdots = A_{n1} = 0$

に注意する



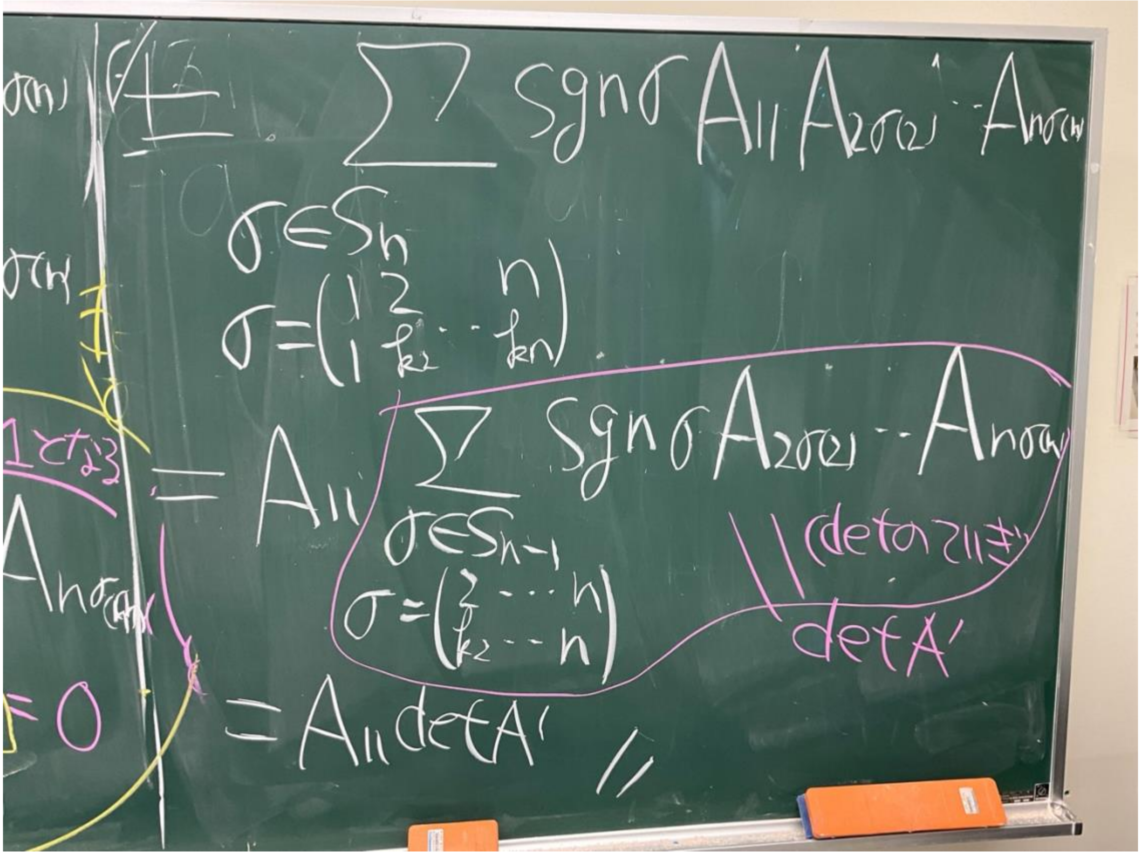
$$\det A \underset{\text{ていぎ}}{=} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, A_{1\sigma(1)}\cdots A_{n\sigma(n)}$$

$$\underset{\text{和をわける}}{=} \sum_{\sigma\in S_n,\ \sigma(1)=1} \operatorname{sgn}\sigma\, A_{1\sigma(1)}\cdots A_{n\sigma(n)}$$

$$+ \sum_{\sigma\in S_n\ \sigma(1)\neq 1} \operatorname{sgn}\sigma\, A_{1\sigma(1)}\overbrace{A_{2\sigma(2)}\cdots A_{n\sigma(n)}}^{\sigma(k)=1\text{となる}}$$

$$\left(\begin{matrix}1=\sigma(k)\text{なる}\\ k\in\{2,\dots,n\}\end{matrix}\right) \quad \boxed{0\text{になる}} \quad \boxed{A_{k\sigma(k)}}=0$$

$$A_{k\sigma(k)} \,\|\, A_{k1}$$



$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, A_{11} A_{2\sigma(2)}\cdots A_{n\sigma(n)}$$

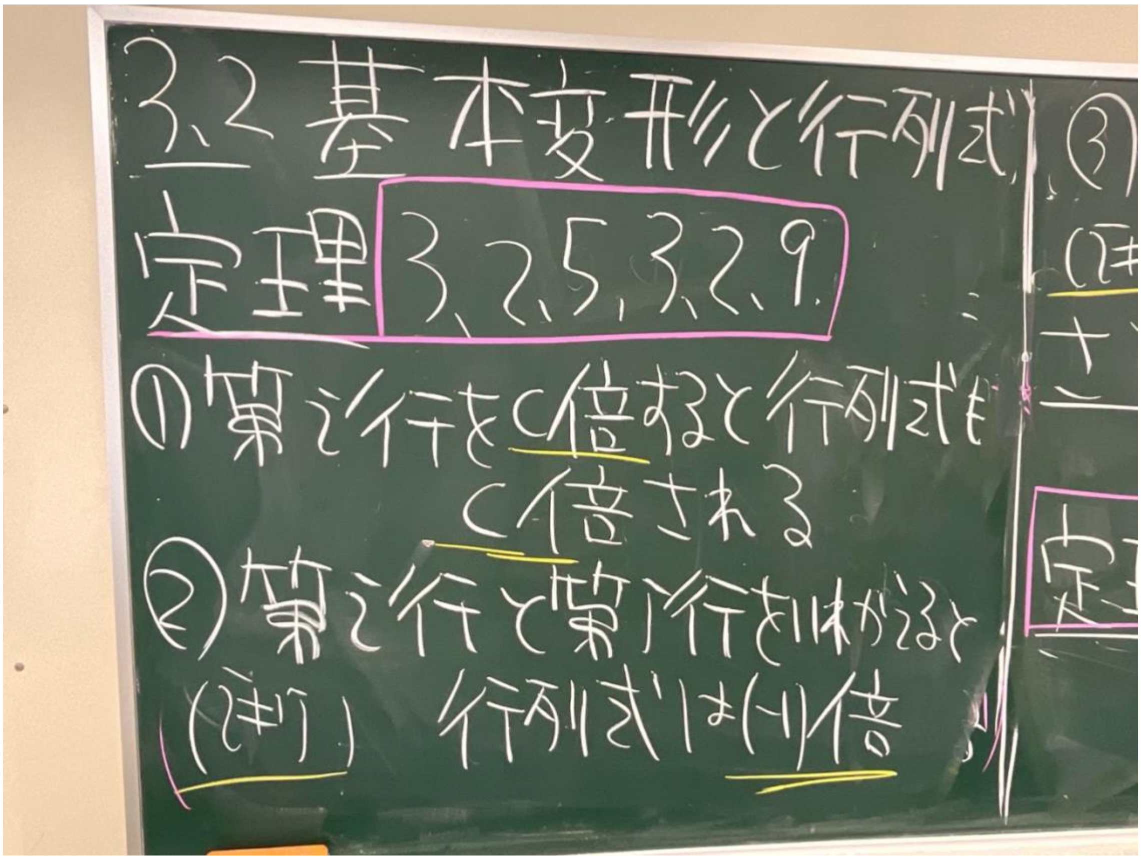
$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & k_2 & \cdots & k_n\end{pmatrix}$$

$$= A_{11} \sum_{\substack{\sigma\in S_{n-1}\\ \sigma=\begin{pmatrix}2 & \cdots & n\\ k_2 & \cdots & n\end{pmatrix}}} \operatorname{sgn}\sigma\, A_{2\sigma(2)}\cdots A_{n\sigma(n)}$$

$$\| \ (\det\text{のていぎ})$$

$$\det A'$$

$$= A_{11}\det A' \quad //$$



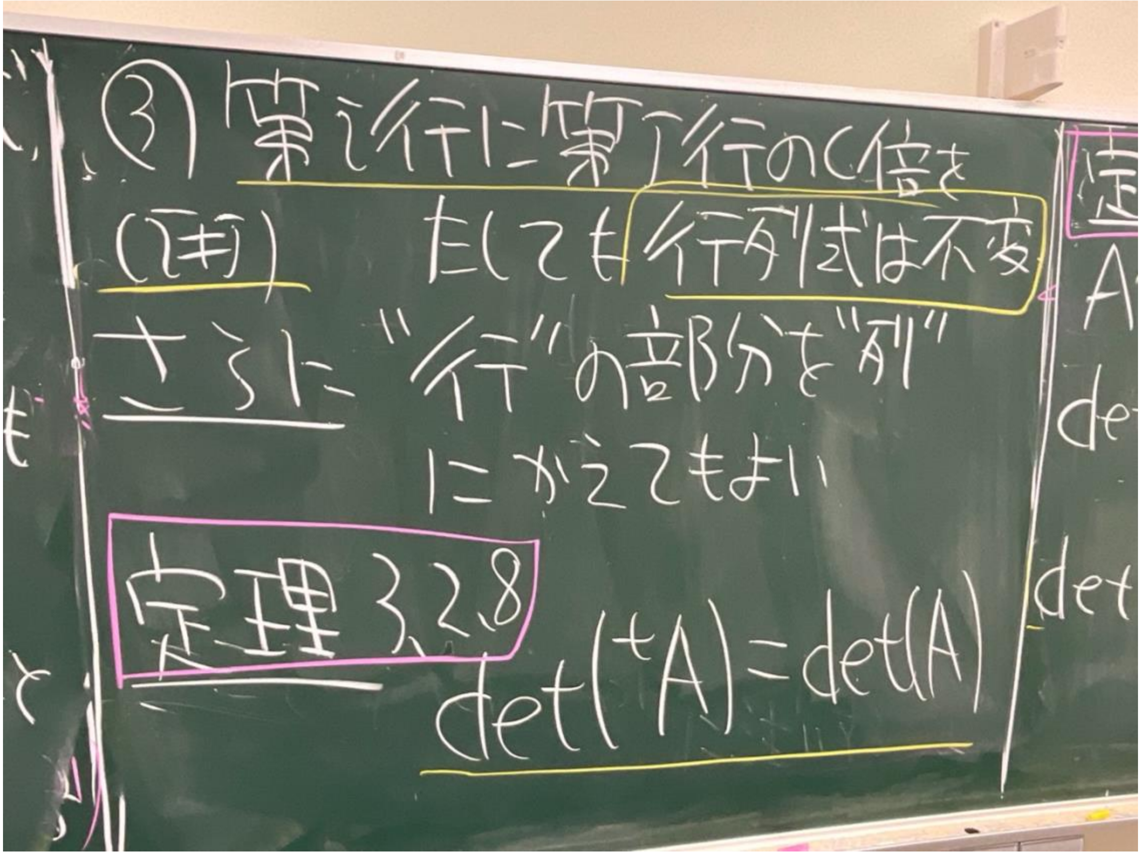
3.2 基本変形と行列式

定理 3.2.5, 3.2.9

① 第i行をc倍すると行列式もc倍される

② 第i行と第j行をいれかえると行列式は(-1)倍

$(i \neq j)$



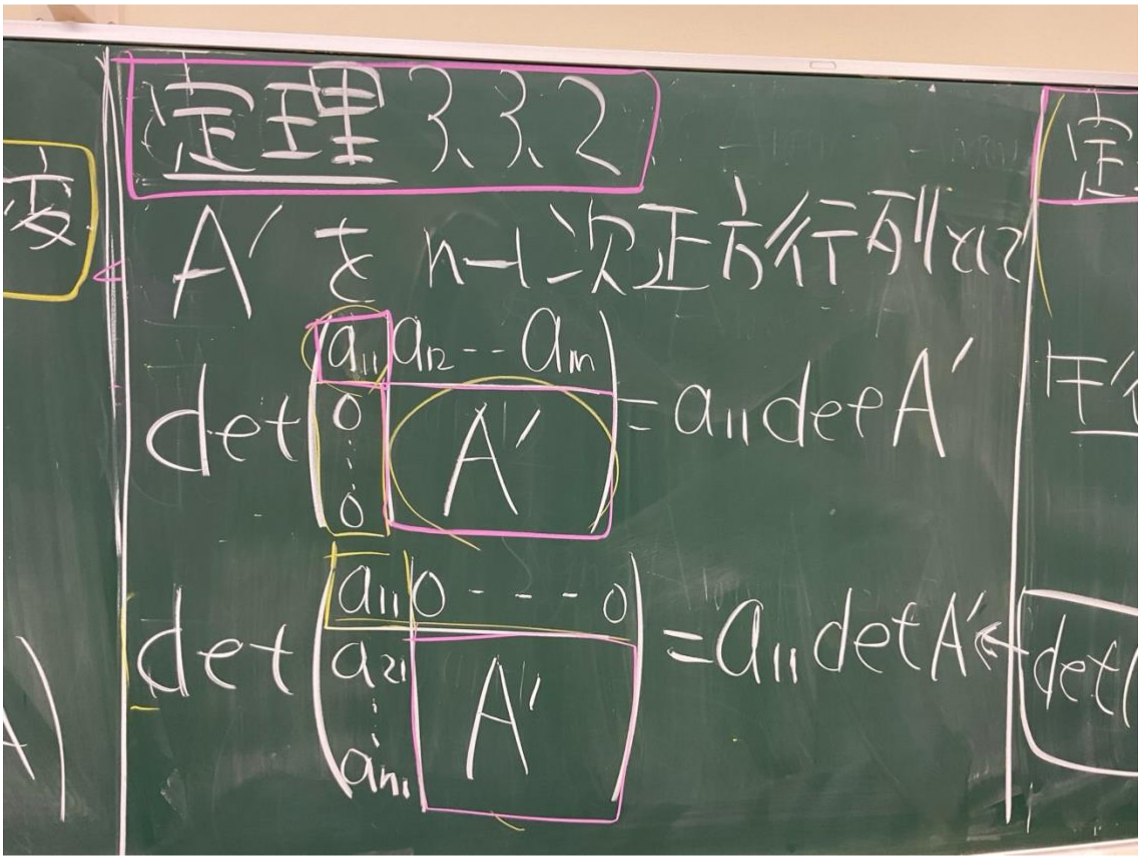
③ 第i行に第j行のc倍をたしても行列式は不変

$(i \neq j)$

さらに"行"の部分を"列"にかえてもよい

定理 3.2.8

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

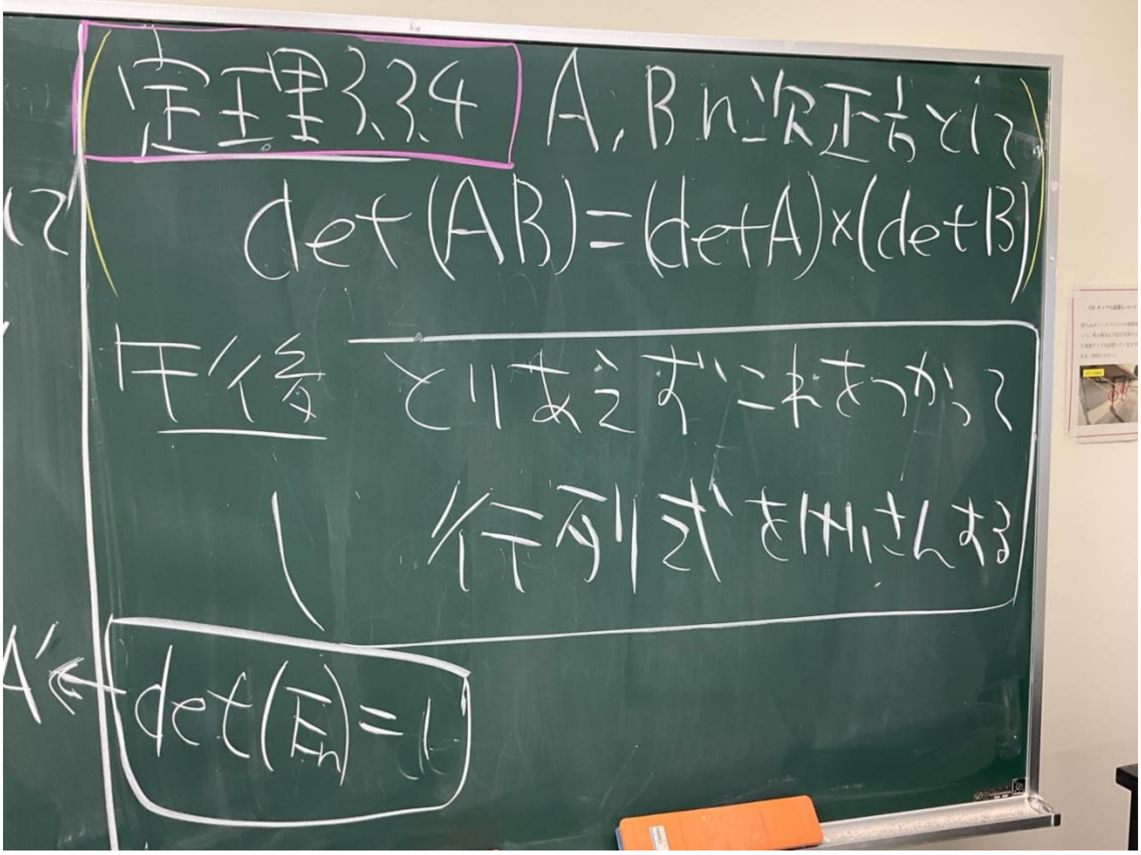


定理3.3.2

A′をn−1次正方行列として

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = a_{11}\det A'$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & A' & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix} = a_{11}\det A'$$



定理3.3.4 A, Bn次正方として

$$\det(AB) = (\det A)\times(\det B)$$

証明 とりあえずこれをつかって行列式をけいさんする

$$\boxed{\det(E_n) = 1}$$