2026/06/11 第 6 回 線形代数 演義資料

問題 13. 5 次置換 σ, τ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(a) $\sigma\tau, \tau\sigma, \sigma^{-1}$ を求めよ.

(b) σ と τ の転倒数と符号を求めよ.

(c) $\sigma\tau$ の転倒数と符号を求め, $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$ を確認せよ.

問題 14. 4 次置換 σ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(a) σ の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を求めよ

(b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1x_2 + x_3^2 + 4x_1x_2x_3$ とする. $f^\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)$ を求めよ.

(c) 差積 $D(x_1, \dots, x_4) := \prod_{1 \leq i < j \leq 4}(x_i - x_j)$ を書き下せ.

(d) $D^\sigma(x_1, \dots, x_4)$ を求めよ. また $D^\sigma(x_1, \dots, x_4) = \mathrm{sgn}(\sigma)D(x_1, \dots, x_4)$ を確かめよ.

(e) 判別式

$$\Delta(x_1, \dots, x_4) := \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)^2$$

とする. $\Delta^\sigma(x_1, \dots, x_4)$ を求めよ.

問題 15. 異なる二つの整数 i, j のみを入れ替え, 他の k を入れ替えない置換を互換といい (i, j) とかく. 例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1, 2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (3, 4) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1, 4)$$

は全て互換である. 次の問いに答えよ.

(a) (定理 3.1.9) 互換の符号を求めよ.

(b) (定理 3.1.11) r 個の互換の積で表される置換の符号を求めよ.

問題 16. $n \geq 2$ となる整数とする. 次の問いに答えよ.

(a) n 次対称群 S_n の個数が $n!$ 個であることを示せ.

(b) n 次交代群 A_n の個数が $\frac{n!}{2}$ 個であることを示せ. ここで n 次交代群 A_n とは偶置換全体の集合である.

(c) 偶置換と偶置換の積は偶置換であることを示せ.

このページの問題はとても難しいので解けなくても全く問題ないです. 3 年の授業で詳しく習うと思います.

問題 17. ある部屋に 100 人集められている. 別の部屋に 100 個のロッカーがあり, それぞれのロッカーには 100 人のうち 1 人の名前が書かれた紙が入れてある. 違うロッカーには違う名前の紙が入っている.

順番を決め, 1 人がロッカーの部屋に入り, 50 個のロッカーを開ける. その中に自分の名前があれば、ロッカーを元の状態に戻し, 次の人がロッカー部屋に入り, 50 個のロッカーを開ける. これを繰り返し, 100 人が皆自分の名前を見つけられたらゲームは成功. 1 人でも名前が見つけられなければゲームは失敗である.

100 人はゲームを始める前に議論し戦略を決めることができる. ただしゲームが始まったらお互いに話すこと・情報を伝えることはできない.

普通に戦略なしでやれば

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \times 100 \sim 7.88 \times 10^{-29}\%$$

でクリア不可能に思われる. しかしこのゲームにおいて, 30%以上の確率で成功する戦略が存在する. その戦略を考えよ. [18]

問題 18.

$$(12)(34) = (132)(134) \quad (12)(13) = (132)$$

を示せ. これを用いて $n \geq 3$ について, n 次交代群 A_n の任意の元は 3 cycle の積でかけることを示せ. ここで 3 個からなる巡回置換 $(k_1, k_2, k_3) \in S_n$ を 3 cycle という.

問題 19. $\sigma, \tau \in S_n$ について

$$[\sigma, \tau] := \sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma\tau$$

と定義する. 以下の式を示せ.

$$(123) = [(12), (134)] \quad (123) = [(124), (135)]$$

問題 20. 上の 2 問を用いて次の問いに答えよ.

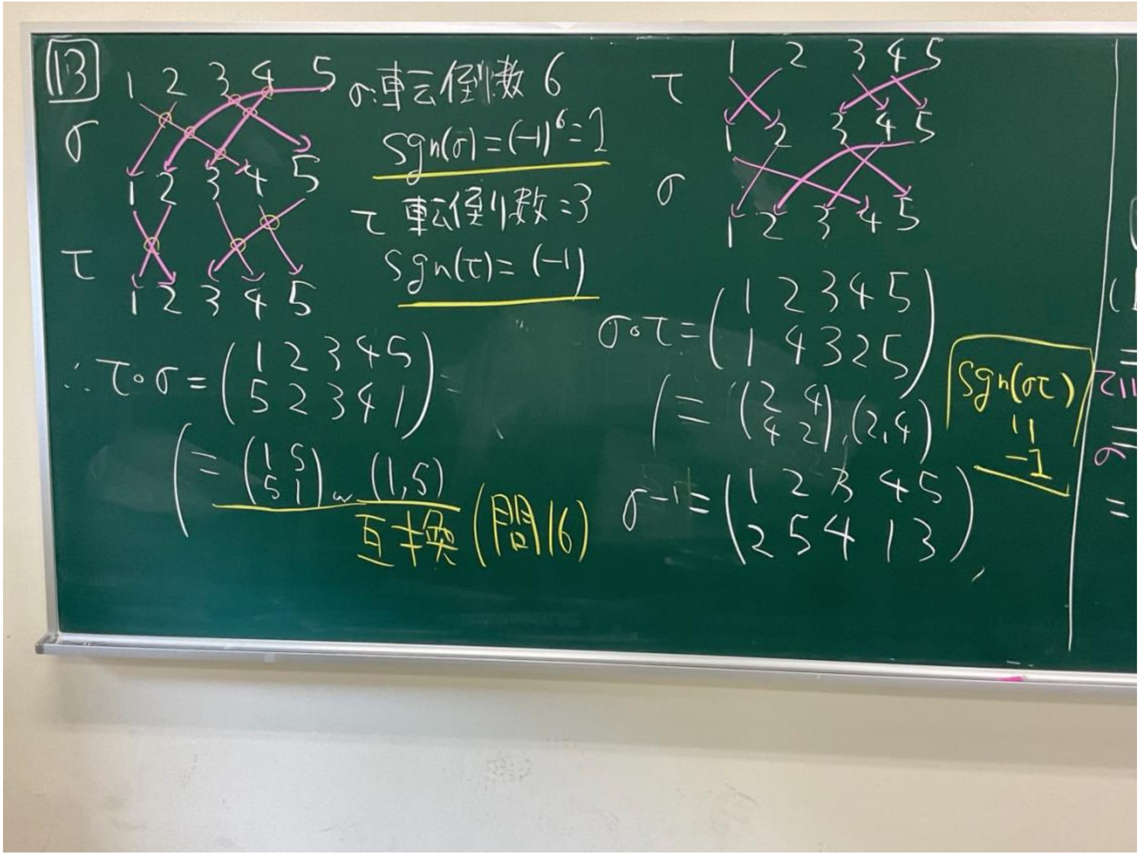
(a) $[S_n, S_n] := \{[\sigma_1, \tau_1] \cdots [\sigma_l, \tau_l] \mid \sigma_1, \tau_1, \ldots, \sigma_l, \tau_l \in S_n, l \in \mathbb{N}\}$ と定義する. $n \geq 3$ について, $[S_n, S_n] = A_n$ を示せ.

(b) $[A_n, A_n] := \{[\sigma_1, \tau_1] \cdots [\sigma_l, \tau_l] \mid \sigma_1, \tau_1, \ldots, \sigma_l, \tau_l \in A_n, l \in \mathbb{N}\}$ と定義する. $n \geq 5$ について, $[A_n, A_n] = A_n$ を示せ. 特にこれから S_n, A_n が $n \geq 5$ について, 可解でないことがわかる. (詳しいことは学部 3 年で習う)

(c) ε を恒等置換とする. $[A_3, A_3] = \{\varepsilon\}$ であることを示せ.

(d) $[A_4, A_4] = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ であることを示せ. また右辺の集合を V として $[V, V]$ を上と同様に考えるとき, $[V, V]$ を求めよ. これから S_3, A_3, S_4, A_4 が可解 (solvable) であることがわかる (詳しいことは学部 3 年で習う).

[18] えびまラボさんによる 20 人の囚人と 12 個の箱【ゆっくり解説】があります. https://www.youtube.com/watch?v=gLHWaYhssXY


13
σの転倒数 6
sgn(σ)=(−1)^6=1
τ 転倒数=3
sgn(τ)=(−1)
∴ τ∘σ = (1 2 3 4 5 / 5 2 3 4 1)
(= (1 5 / 5 1) ~ (1,5)
互換 (問16)
σ∘τ = (1 2 3 4 5 / 1 4 3 2 5)
(= (2 4 / 4 2), (2,4)
σ^{-1} = (1 2 3 4 5 / 2 5 4 1 3)
sgn(στ) = −1

114

$$\sigma:\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\ \downarrow&&&\\ 1&2&3&4\end{array}$$

転倒数5, $\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$

(b) $f^{\sigma}(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$\overset{\text{ていぎ}}{=} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)})$

$\overset{\sigma}{=} f(x_4, x_3, x_1, x_2)$

$= 3x_4x_3 + x_1^2 + 4x_4x_3x_1$

(c) $D = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4)$

(d) $D^{\sigma} = \boxed{(x_4-x_3)}\boxed{(x_4-x_1)}\boxed{(x_4-x_2)}\boxed{(x_3-x_1)}\boxed{(x_3-x_2)}(x_1-x_2)$

$= (-1)^5 (x_3-x_4)(x_1-x_4)(x_2-x_4)(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_1-x_2)$

$= (-1)^5 D = (-1)D$

(e) $\Delta = D^2$ より $\Delta^{\sigma} = D^{\sigma 2} = \Delta$ //

115

$$(k, l) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k-1 & \boxed{k} & k+1 & \cdots & l-1 & \boxed{l} & l+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & k-1 & \boxed{l} & k+1 & \cdots & l-1 & \boxed{k} & l+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$i<j$ & $\sigma(i)>\sigma(j)$ のこすう

$1 \le i \le k-1 \Rightarrow 0$コ

$i=k \Rightarrow \sigma(i)=l$ より $j=k+1, \ldots, l$ の $l-k$ コ

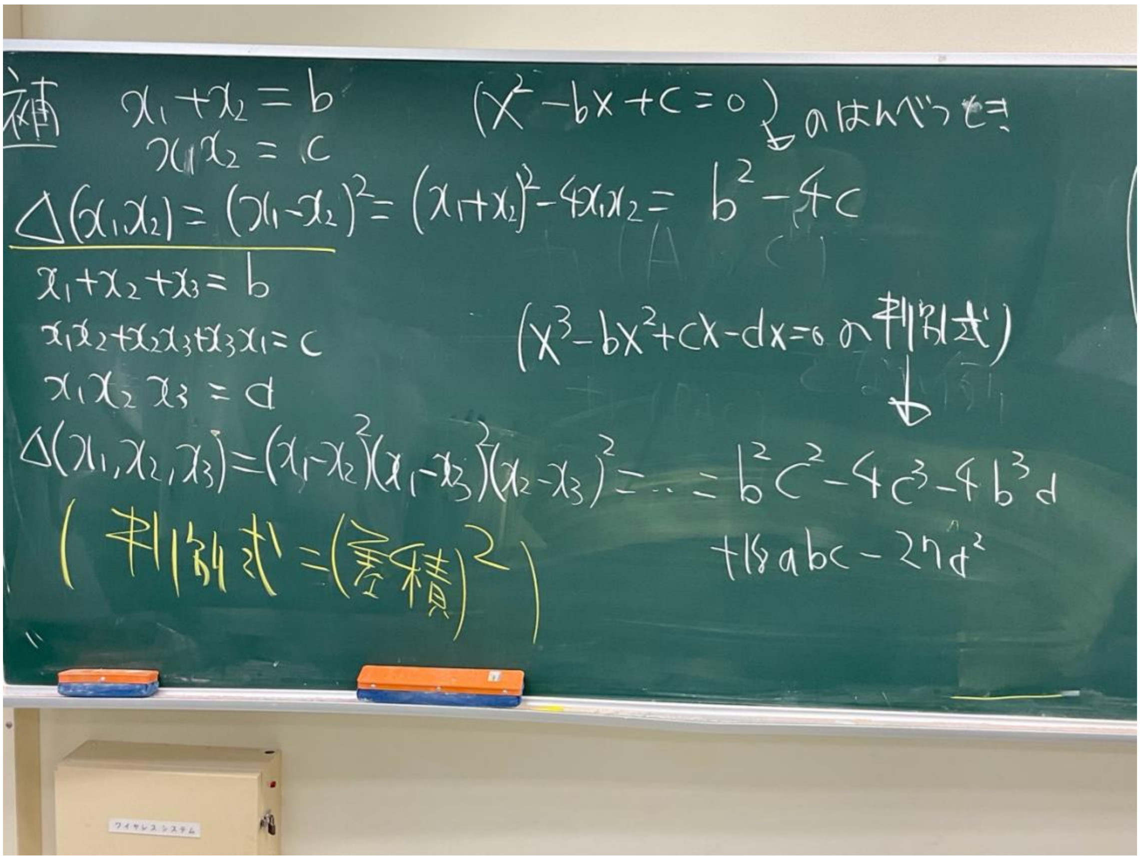
$k+1 \le i \le l-1 \Rightarrow j=l$ の 1コ

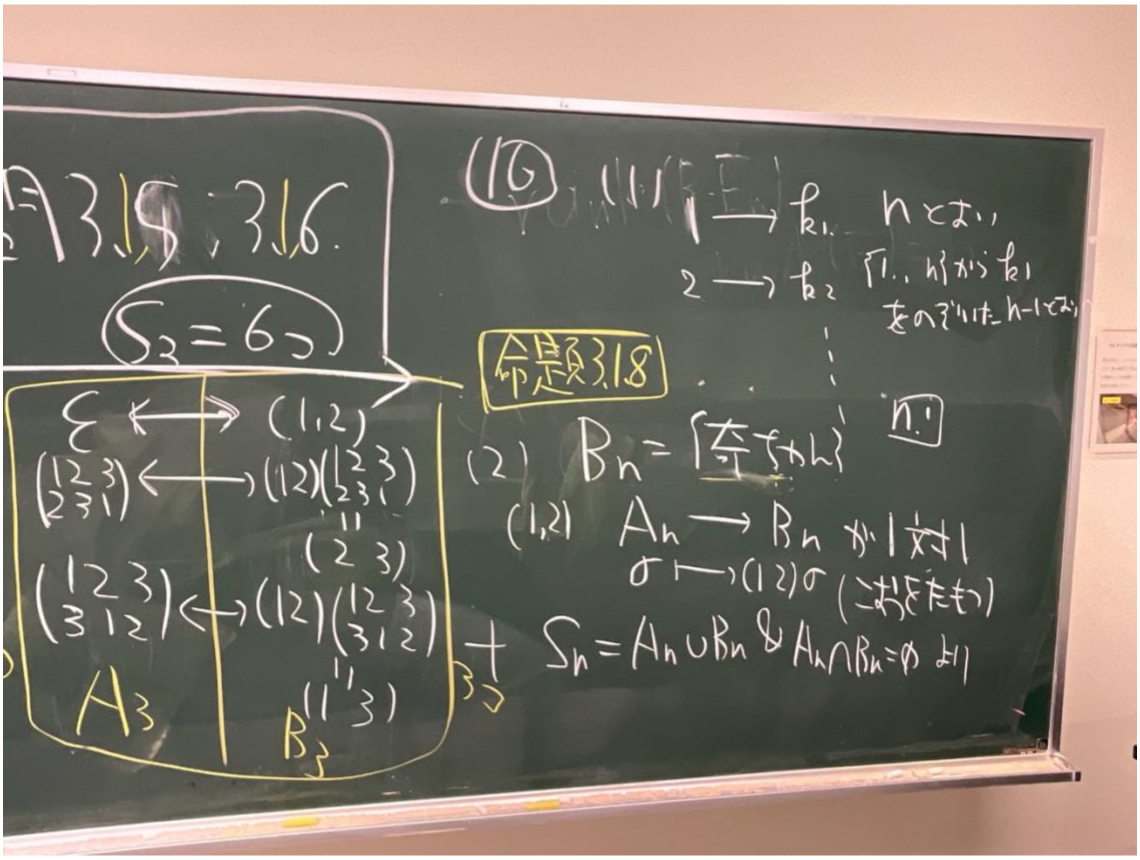
$i=l \Rightarrow 0$コ

$\therefore\ l-k + 1\times(l-1-k-1+1) = 2(l-k)+1$

$\mathrm{sgn}(k, l) = -1$

(2) $(-1)^r$ $(\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}\,\sigma\,\mathrm{sgn}\,\tau)$


補 $x_1+x_2=b$
$x_1x_2=c$
$(x^2-bx+c=0)$ のはんべつしき
$\Delta(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=b^2-4c$
$x_1+x_2+x_3=b$
$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=c$
$x_1x_2x_3=d$
$(x^3-bx^2+cx-dx=0$ の判別式$)$
$\Delta(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=\cdots=b^2c^2-4c^3-4b^3d$
$+18abc-27d^2$
(判別式=(差積)^2)


3.15 : 3.16.
$(S_3=6$つ$)$
$\varepsilon \longleftrightarrow (1,2)$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} \longleftrightarrow (12)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = (2\ 3)$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \longleftrightarrow (12)\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = (1\ 3)$
A_3 B_3 3つ
(16)
$1 \longrightarrow k_1$ n とおい
$2 \longrightarrow k_2$
$\{1,..,n\}$ から k_1 をのぞいた n-1 こで
命題3.18
$n!$
(2) $B_n=\{$奇ちかん$\}$
(1,2) $A_n \longrightarrow B_n$ が1対1
$\sigma \longmapsto (12)\sigma$ (これをたもつ)
+ $S_n=A_n\cup B_n$ & $A_n\cap B_n=\phi$ より