2026/05/21 第 5 回 線形代数 演義資料

定理 *2.4.6* の具体例．例 2.4.5 を用いる．行簡約化をして

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&5\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\-\frac{3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}\quad \mathbf{w}:=\begin{pmatrix}2\\-\frac{3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$$

とおく．$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ をとく．今 $A\mathbf{w}=\mathbf{b}$ であるので

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\Leftrightarrow A(\mathbf{x}-\mathbf{w})=\mathbf{0}$$

である．$\mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathbf{w}$ として $A\mathbf{y}=\mathbf{0}$ の解を探すと

$$A\mathbf{y}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1 & & + & 2y_3 & + & 5x_4 & = & 0\\ & y_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}y_4 & = & 0\\ & & & & & 0 & = & 0\\ & & & & & 0 & = & 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=c_1\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}}_{=:\mathbf{v}_1}+c_2\underbrace{\begin{pmatrix}-5\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}}_{=:\mathbf{v}_2}$$

となる．よって

$$\mathbf{x}=\mathbf{y}+\mathbf{w}=\mathbf{w}+c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$$

となる．この例では $n=4,r=2$ である． □

定理 *2.3.5* の行簡約化可能の証明の概略．$m\times n$ 行列 A に関して n に関する帰納法

簡単のため $m=2,n=5$ とする．また $*$ で数を表す．帰納法の仮定で $n\leq 4$ までは行簡約化できると仮定する．$a\neq 0$ として次の 3 パターンが考えられる．

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix}a&*&*&*&*\\ *&*&*&*&*\end{pmatrix}}_{\text{case 1}}\quad\text{or}\quad\underbrace{\begin{pmatrix}0&*&*&*&*\\ a&*&*&*&*\end{pmatrix}}_{\text{case 2}}\quad\text{or}\quad\underbrace{\begin{pmatrix}0&*&*&*&*\\ 0&*&*&*&*\end{pmatrix}}_{\text{case 3}}$$

に限られる．あとは 3 つの場合に簡約化できることを言えば良い．

[Case 1] の場合

$$\begin{pmatrix}a&*&*&*&*\\ *&*&*&*&*\end{pmatrix}\xrightarrow{①\to①\times(\frac{1}{a})}\begin{pmatrix}1&*&*&*&*\\ *&*&*&*&*\end{pmatrix}\xrightarrow{②\to②-①\times(*)}\begin{pmatrix}1&*&*&*&*\\ 0&*&*&*&*\end{pmatrix}$$

とできる．あとは右の 2 × 4 行列を簡約化すれば良い (帰納法の仮定よりできる.)

[Case 2] の場合

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * \\ a & * & * & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{pmatrix} a & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{①\to①\times(\frac{1}{a})} \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

とできる. あとは右の 2×4 行列を簡約化すれば良い (帰納法の仮定よりできる.)

[Case 3] の場合. 右の 2×4 行列を簡約化すれば良い (帰納法の仮定よりできる.) $\square$

証明をきちんと完成させるには, $n = 1$ の時と, 一般の m について上の議論をやれば良い.

定理 *2.3.5* の標準化可能の証明の概略. 行簡約可能性は示した. 簡単のため

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}$$

としてどのように操作すればいいかをいう.

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{ 列目に }1\text{ 列目の }*\text{ 倍を引く}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{4\text{ 列目, }5\text{ 列目に }1\text{ 列目の }*\text{ 倍を引く}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{ 列目と }3\text{ 列目を交換}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{4\text{ 列目, }5\text{ 列目に }2\text{ 列目の }*\text{ 倍を引く}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

証明をきちんと完成させるには, 一般の m について上の議論をやれば良い.

定理 *2.3.6* 行簡約行列の唯一性の証明. A の行簡約化が B, B' として $B = B'$ を示せば良い. 教科書命題 2.2.3 より行基本変形は可逆なので

$$A \xrightarrow{\text{行基本変形}} B \Leftrightarrow B \xrightarrow{\text{行基本変形}} A$$

となる. 以上より

$$A \xrightarrow{\text{行基本変形}} B \quad \text{and} \quad A \xrightarrow{\text{行基本変形}} B' \Rightarrow B \xrightarrow{\text{行基本変形}} A \quad \text{and} \quad A \xrightarrow{\text{行基本変形}} B' \Rightarrow B \xrightarrow{\text{行基本変形}} B'$$

よって B から B' へ行基本変形で変換できる. 命題 2.2.8 より, ある基本行列の積 P があって

$$PB = B'$$

となる. こっから後の議論は簡単な掛け算と簡約行列の定義に基づく. 以下簡単のため $m = 3, n = 5$

とする．そして

$$B=\begin{pmatrix}1&0&*&*&*\\0&1&*&*&*\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad B'=\begin{pmatrix}1&*&0&*&*\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$$

であった場合にどのような矛盾が起きるか観察する．$PB=B'$ より

$$PB=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&*&*&*\\0&1&*&*&*\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&*&*&*\\d&e&d*+e*&*&*\\g&h&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&*&0&*&*\\0&0&1&*&*\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B'$$

である．第 2 行をを見比べれば

$$d=0, e=0, d*+e*=1$$

である．よって矛盾する． □

証明をきちんと完成させるには，$B\neq B'$ として，1 の位置が一致していない一番左端の部分をとって上の議論をすれば良い (と思う).

定理 *2.3.6* 列簡約化と標準化の唯一性の証明．これは上から従う，というのも A の行基本変形は ${}^tA$ の列基本変形と授業で触れなかった内容より

$$A\text{ の列簡約化}={}^tA\text{ の行簡約化}\quad\text{標準化}=\text{行簡約化}+\text{列簡約化}$$

であるため． □

定理 *2.3.6* 階数が等しいことの証明． 行列 A とする．B を A の行簡約化とする．A の行簡約化の 0 でない行ベクトルの個数が標準形の単位行列の次数であることを示すには，

$$\underbrace{B\text{ の }0\text{ でない行ベクトルの個数}}_{=:s}=B\text{ の標準化の }\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}\text{ の }r \tag{1}$$

を示せば良い．B の 0 でない行ベクトルの個数を s とすると，標準化可能の証明を見れば，

$$B\xrightarrow{\text{列基本変形}}\begin{pmatrix}E_s&0\\0&0\end{pmatrix}$$

とできる．よって

$$A\xrightarrow{\text{行基本変形}}B\xrightarrow{\text{列基本変形}}\begin{pmatrix}E_s&0\\0&0\end{pmatrix}$$

となる．A の標準化は一意なので $s=r$ を得る．

最後に A の列簡約化の 0 でない行ベクトルの個数が標準形の単位行列の次数であることを示す．A

の行基本変形は ${}^tA$ の列基本変形なので

$$A \text{ の標準化} = {}^tA \text{ の標準化}$$

である. 以上より

$$\begin{aligned} &A \text{ の列簡約化の } 0 \text{ でない行ベクトルの個数} = {}^tA \text{ の行簡約化の } 0 \text{ でない行ベクトルの個数} \\ &\underset{(1)}{=} {}^tA \text{ の標準化の } \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ の } r \underset{\text{上の事実}}{=} A \text{ の標準化の } \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ の } r \end{aligned}$$

□

問題 12. 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 1 \\ \quad\ \ x_2 - 2x_3 - 5x_4 = a \end{cases}$ の解が存在するような a の値を全て求めよ.

中間試験の情報

2026 年度春夏学期 大阪大学 全学共通教育科目 線形代数学・同演義 I (理（数）)

期末試験の情報は次のとおりです.

- 日時: 2026 年 6 月 4 日 木曜 2 限 (10:30-12:00) 10:25 までには着席してください.
- 場所: 共 C206 (授業の部屋)
- 持ち込みに関して: 無し (ただしあまりにも暑い場合, 飲み物等の持ち込み可)
- 試験内容: 第 1 回 ~ 第 5 回授業の内容

以下は注意事項です.

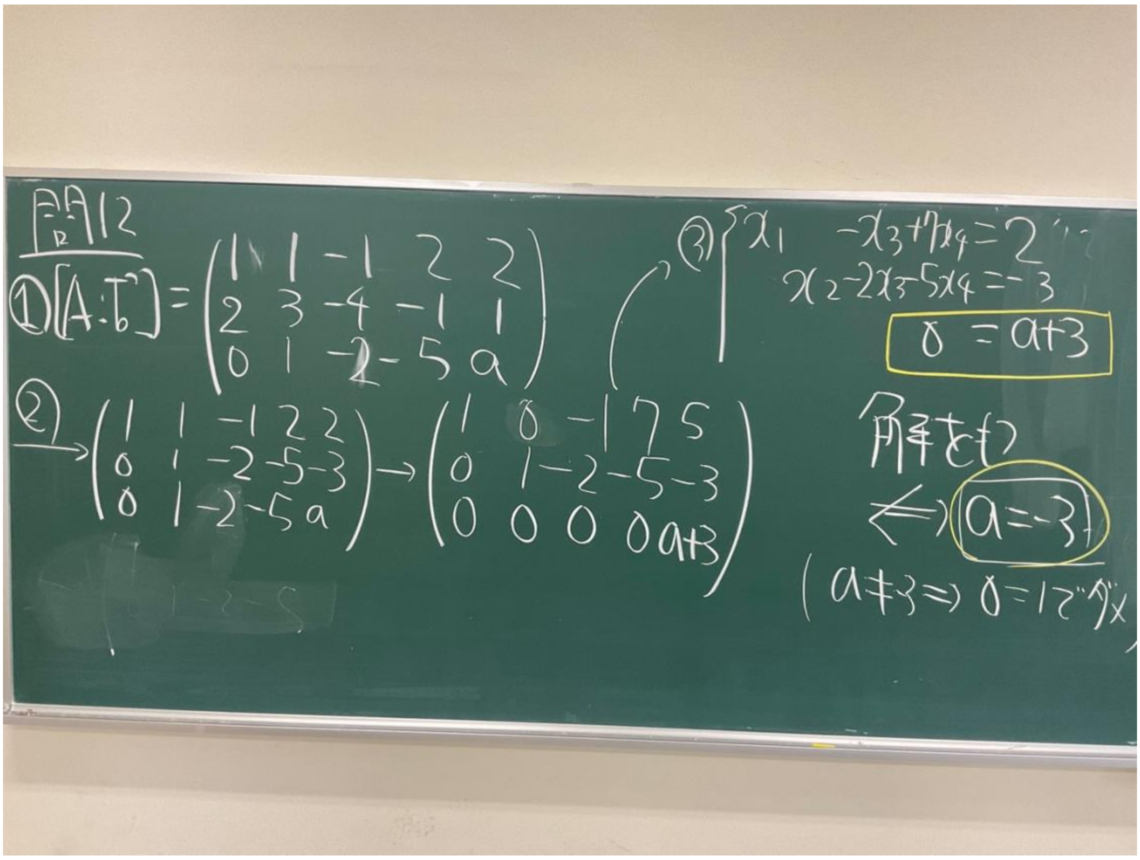
- 解答に関して, 答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記してください. きちんと記していない場合は大幅に減点する場合がある.
- レポート問題の何問かを数値や表現など少し変えて出す予定です.
- 途中退出は 11:00-11:45 までとします. 試験が早く解けたものや諦めたものはこの時間に試験を提出し, その後退出してください.

演習問題及び授業の資料・板書内容は CLE や授業ページ (https://masataka123.github.io/2026_summer_linear_algebra/) にもあります.

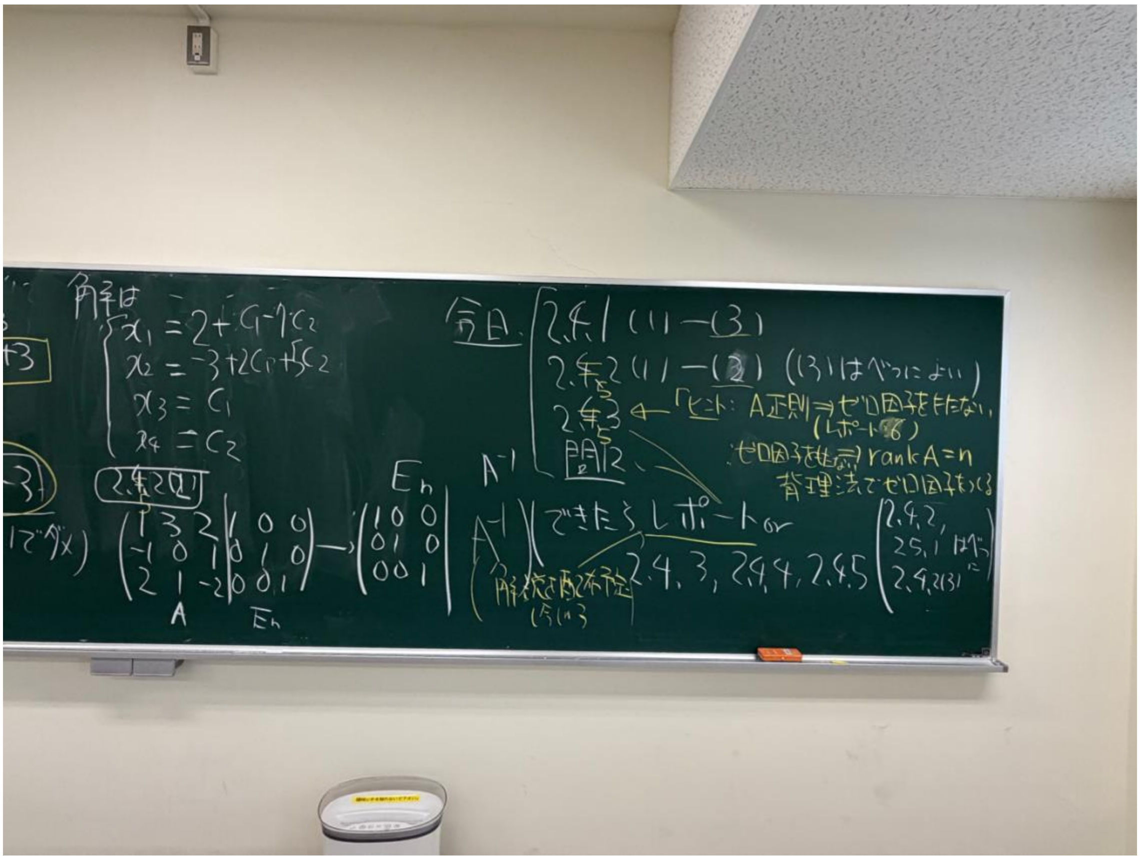
試験の欠席対応について

正当な理由での欠席と認められれば別途対応をいたします. ここで正当な理由とはインフルエンザなどの病気または忌引き等です. その場合は岩井に連絡し, 教務課に授業・試験欠席届 (下記 URL 参照) を提出してください.

https://www.celas.osaka-u.ac.jp/education/absence/



問12
① $[A \vdots \vec{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & a \end{pmatrix}$
② $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$
③ $\begin{cases} x_1 - x_3 + 7x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -3 \\ 0 = a+3 \end{cases}$
解をもつ
$\Longleftrightarrow a = -3$
($a \neq 3 \Rightarrow 0 = 1$ でダメ)


今日
2.5.1 (1)―(3)
2.5.2 (1)―(2) ((3)はべつによい)
2.5.3
問12
ヒント: A正則 ⇒ ゼロ因子をもたない
rank A = n
背理法でゼロ因子をつくる
できたらレポート or
2.4.3, 2.4.4, 2.4.5
A
En