5/28 休講, 6/4 中間試験
レポートなど
(演習で配布&説明)

前回

定理2.3.5

A $\xrightarrow{\text{行基本変形}}$ B 簡約

A $\xrightarrow[\text{基本変形}]{\text{行+列}}$ $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 標準化

定理2.3.6 (1) B, $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ は唯一

(3) (Bの0ベクトルでない行の数)

$= r =:$ rank(A) 階数(ランク)

行基本変形させる

$\boxed{\text{正則である}}$

= 左から $\boxed{\text{基本行列}}$ をかける

(逆行列も基本行列)

定理 任意の行列は基本行列と行簡約行列の積になる

証 $A \xrightarrow{\text{行基本変形}} B$ 簡約

$\Rightarrow$ ある基本行列 $P_1 \cdots P_r$ が

$P_1 \cdots P_r A = B \Rightarrow A = P_r^{-1} \cdots P_1^{-1} B$

補題 2.3.9

① $A : m \times n \Rightarrow 0 \leq \operatorname{rank} A \leq \min\{m, n\}$

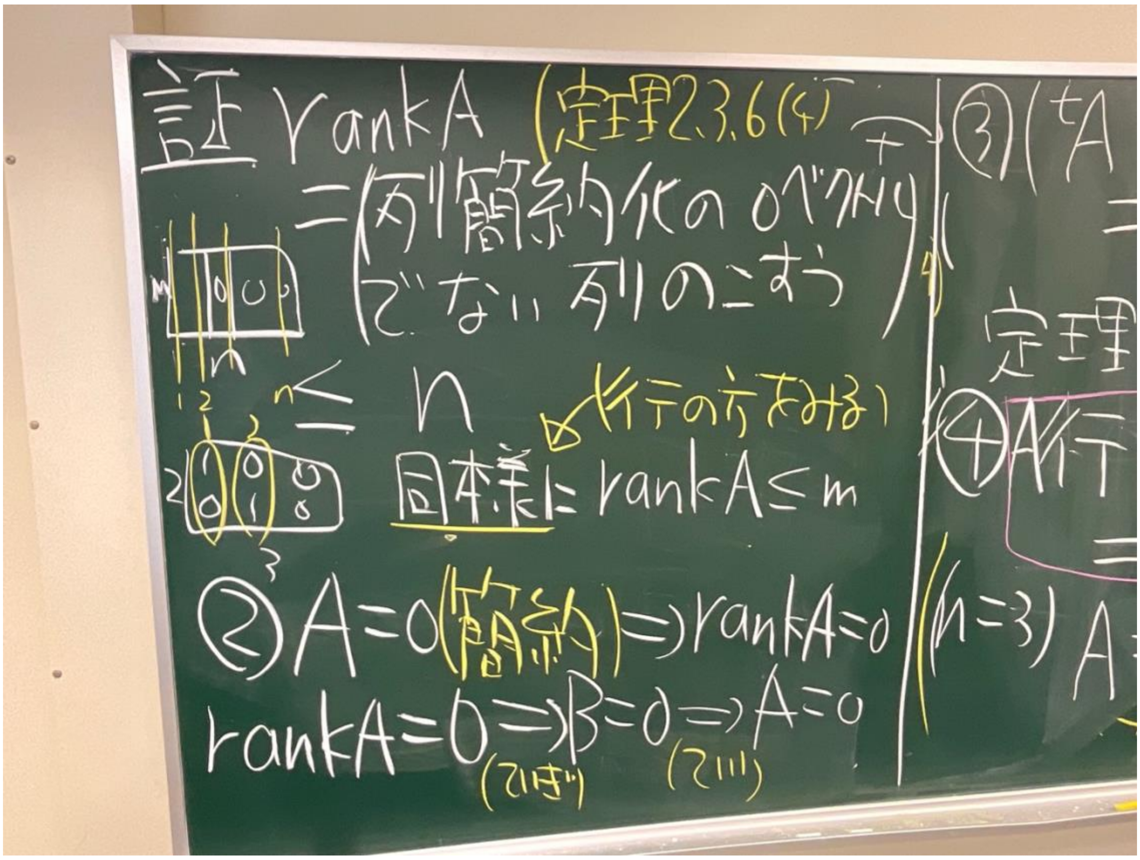
② $\operatorname{rank} A \Leftrightarrow A = O$

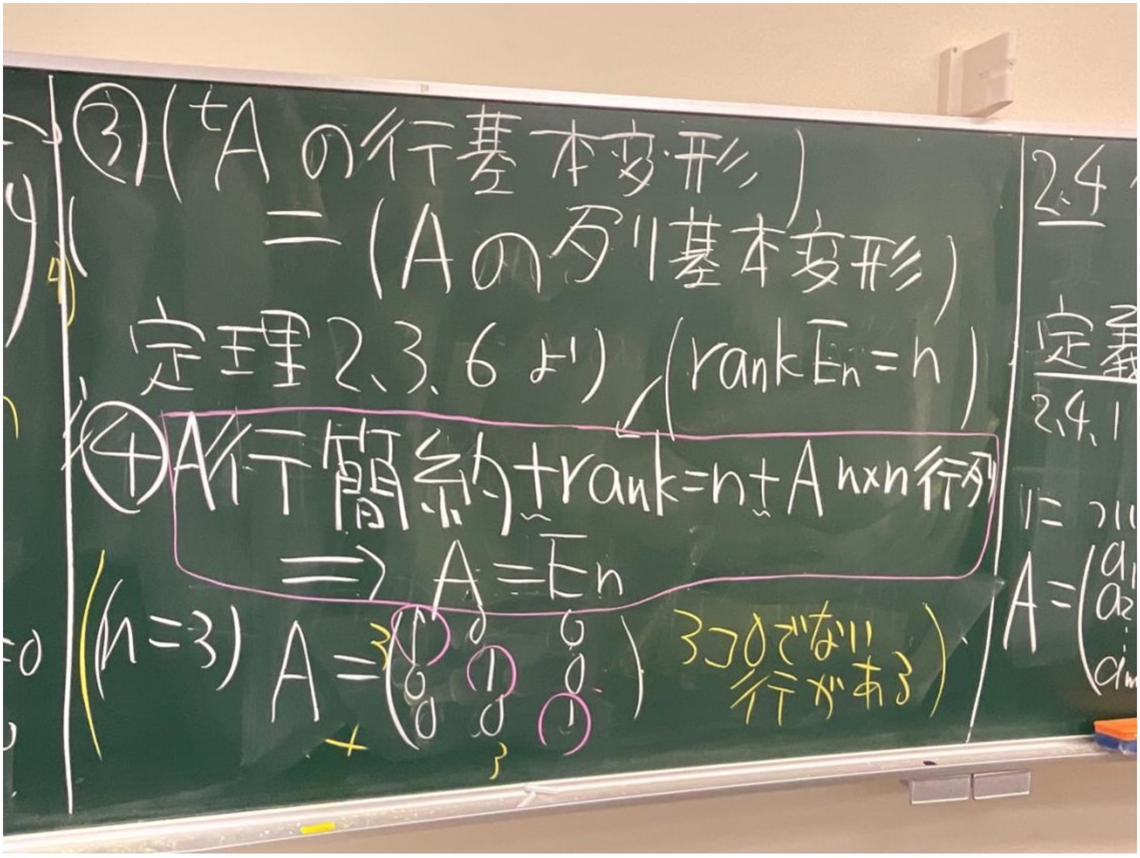
③ $\operatorname{rank} {}^t A = \operatorname{rank} A$

④ $n = \operatorname{rank} A$ ($A : n \times n$ 行列)

$\Leftrightarrow$ Aの行簡約化がE_n

$\Leftrightarrow$ Aの標準化がE_n


証 rankA (定理2.3.6(4))
= (列簡約化の0ベクトルでない列のこすう)
≦ n
行の方をみると
同様に rankA ≦ m
② A=O(簡約) ⟹ rankA=0
rankA=0 ⟹ B=O ⟹ A=O
(ていぎ) (て(iii))


③ (ᵗAの行基本変形)
= (Aの列基本変形)
定理2.3.6より
(rankEn=n)
④ A行簡約 + rank=n + A n×n行列
⟹ A=En
(n=3) A=(1 0 0 / 0 1 0 / 0 0 1)
3コ0でない行がある

2.4 行基本変形による連立1次方程式の解法

定義 2.4.1

$$(☆)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

について

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とする

$$(☆) \iff A\vec{x} = \vec{b}$$

A：係数行列といい

$[A : \vec{b}]$ 拡大係数行列という

$\boxed{例}$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4 \\ 5x_1 + 7x_2 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\quad [A : \vec{b}] = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

補足 $\mathrm{rank}A \leq \min\{m, n\}$

$$\mathrm{rank}\,A \leq \mathrm{rank}[A \vdots \vec{b}] \leq \mathrm{rank}\,A + 1$$

$$A \xrightarrow[\text{列基本}]{} \begin{array}{cc} & n-r \\ \left(\begin{array}{c} B \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} O \end{array}\right) \\ r & \end{array}$$

rコ0でない列

$$[A \vdots \vec{b}] \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c|c} B & \overset{n-r}{O} & \vec{b}' \end{array}\right)$$

0 or $\neq 0$

補題 2.4.3, 2.4.4 ($A\vec{x} = \vec{b}$, ☆)

① (☆) の i 番目の方程式を λ倍 ($\lambda \neq 0$)

$\underset{\text{対応}}{\Longleftrightarrow}$ $[A \vdots \vec{b}]$ の第 i 行を λ倍

② (☆) の i 番目と j 番目の方程式をいれかえ

$\longleftrightarrow$ $[A \vdots \vec{b}]$ の第 i 行と j 行をいれかえ

③ (☆) の j 番目に i 番目の λ倍をたす

$[A \vdots \vec{b}]$ の第 j 行目に第 i 行の λ 倍を加える

ここに $[A \vdots \vec{b}] \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} [A' \vdots \vec{b}']$ とすると

$(A\vec{x} = \vec{b}$ の解$)$

$= (A'\vec{x} = \vec{b}'$ の解$)$

例) $A\vec{x} = \vec{b}$ $\qquad$ $[A \vdots \vec{b}]$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ x_1 - 4x_2 = 9 \end{cases} \xrightarrow{\text{交換}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ ② $\qquad\qquad$ $\downarrow$ $\boxed{2}$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ ③ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ $\boxed{3}$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 9 \\ 0 \cdot x_1 + 11x_2 = -11 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix}$$

$A\vec{x}=\vec{b}$	$[A:\vec{b}]$
$\downarrow$ ①	$\downarrow$ ①
$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 9 \\ x_2 = -1 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$\downarrow$ $\boxed{3}$	$\downarrow$ $\boxed{3}$
$\begin{cases} x_1 + 0x_2 = 5 \\ x_2 = -1 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\xleftarrow{\text{もどす}}$ 簡約化

まとめ（連立1次方程式のときかた）

① $A\vec{x}=\vec{b}$ から拡大係数行列 $[A:\vec{b}]$ をつくる

② $[A:\vec{b}] \xrightarrow[\text{簡約化}]{} [A':\vec{b'}]$

③ $A'\vec{x}=\vec{b'}$ をとく

（Gauss-Jordanのはきだし法）

例 2.4.5

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 2 \\ -4x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$$

① $[A \vdots \vec{b}] = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 9 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

② 行階段化すると

② $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

A'　b'

③ $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -\frac{3}{2} \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$A'\vec{x} = \vec{b'}$ とおく

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 - 5x_4 \\ x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

答
$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 - 5c_2 \\ x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 \\ x_3 = c \\ x_4 = c \end{cases}}$$

(c_1, c_2 は任意)

定理 A: $m \times n$ 行列.

①(2.4.2) $A\vec{x} = \vec{b}$ が解をもつ $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \vdots \vec{b})$

②(2.4.6) $r = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \vdots \vec{b})$ のとき

$A\vec{x} = \vec{b}$ の解は、ある $\vec{w} \in K^n$, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-r} \in K^n$ で

$\vec{x} = \vec{w} + c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_{n-r}\vec{v}_{n-r}$ とかける

($c_1, \ldots, c_{n-r}$ 任意)

③ $A\vec{x}=\vec{0}$ の解が $\vec{0}$ 以外もある

$\Longleftrightarrow \mathrm{rank}(A) < n$

例 例2.4.5の解

$n-r=2$

$(n=4,\ r=2)$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\-\frac{3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}}_{\vec{w}}+c_1\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{v_1}}+c_2\underbrace{\begin{pmatrix}-5\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v_2}}$$

$$= \vec{w} + c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2}$$

証明 ①（ステップ4）

$$[A \vdots \vec{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right) \quad (C1)$$

と

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{array}\right) \quad (C2)$$

の場合をかんがえる

$(C1) \Longleftrightarrow \underbrace{\mathrm{rank}A}_{2} = \underbrace{\mathrm{rank}(A \vdots \vec{b})}_{2}$

$(C2) \Longleftrightarrow \underbrace{\mathrm{rank}A}_{2} < \underbrace{\mathrm{rank}(A \vdots \vec{b})}_{3}$

① $\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

解あり

② $\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = 0 \\ \boxed{0 = 1} \end{cases}$

解なし

② $[A \vdots \vec{b}]$ を簡約としてよい

さらに簡単のため $[A \vdots \vec{b}] = \left(\begin{array}{c|c} E_r & B \\ \hline O & O \end{array}\right)$ とする

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right.$ みたいな $\left.\right)$

①から $A\vec{w} = \vec{b}$ なる $\vec{w} \in K^n$ は存在

$\left(A(\vec{x} - \vec{w}) = \vec{b} - \vec{b} = 0 \right)$

ここで

$A\vec{y} =$

$\Leftrightarrow v_1$

ここで ($A\vec{y}=\vec{0}$ の解) $\xleftrightarrow{\text{対応}}$ ($A\vec{x}=\vec{b}$ の解)

$$\vec{y} \longrightarrow \vec{y}+\vec{w}$$

$$\vec{x}-\vec{w} \longleftarrow \vec{x}$$

$$A\vec{y}=\vec{0} \iff \left\{\begin{array}{l} y_1 + 0 + b_{1r+1}\,y_{r+1} + \cdots + b_{1n}\,y_n = 0 \\ \quad\vdots \\ y_r + b_{rr+1}\,y_{r+1} + \cdots + b_{rn}\,y_n = 0 \end{array}\right.$$

u_1 　 c_1 　 u_{n-r}

$$\iff u_1 = \begin{pmatrix} b_{1r+1} \\ \vdots \\ b_{rr+1} \end{pmatrix} \quad u_{n-r} = \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{rn} \end{pmatrix}$$ とかけば

$$\vec{y} = c_1\vec{u_1} + \cdots + c_{n-r}\vec{u_{n-r}}$$
となる

$\Longrightarrow \vec{x} = \vec{y}+\vec{w}$ より ok.

③ は ② からしたがう

2.5.3 命題 A, B $n\times n$

$BA = E_n \Longrightarrow A, B$ 正則

$B = A^{-1}$ $\boxed{2.1.1}$

証 Bが正則を示す

$B \longrightarrow C$ 簡約化

$\Longrightarrow \exists P_1, \dots, P_r$ 基本行列

$\underbrace{P_1 \cdots P_r}_{P} B = C$

②

⇓

①（①のひてい⇒②のひてい）

もし $\mathrm{rank}\, C < n$ なら $C = \begin{pmatrix} C' \\ \boxed{0 \cdots 0} \end{pmatrix} n$

$\Longrightarrow C = PB = \begin{pmatrix} C' \\ \boxed{0 \cdots 0} \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow CA = P(BA) \underset{(BA=E_n)}{=} P \Longrightarrow$ 問題 2.2.3

Pは逆行列をもたない 矛盾

Pは正則

$\begin{pmatrix} C' \\ 0 \cdots \end{pmatrix} (A' \mid *) = \begin{pmatrix} D' \\ \boxed{0 \cdots 0} \end{pmatrix}$

$\therefore \mathrm{rank}\, C = n = \mathrm{rank}\, A \Longrightarrow C = E_n, A = P^{-1}$ 正則

（① ⟹ ③）

定理(2.5.1, 2.5.4) A: $n \times n$ 以下は同値

① rank $A = n$

② A 正則 ③ A は基本行列の積

④ $[A : E_n] \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} [E_n \ B]$

④のとき $B = A^{-1}$

rank $A < n \Rightarrow$ A は正則でない

$= n \Rightarrow$ A は正則

④ ⇐ ⑤

⑥ ⇒ ⑦

Thm 2.4.6

⑤ $A \longrightarrow E_n$ 階段化

④ ⇒ ② P 基本行列の積、

$PA = E_n,\ P = B \xRightarrow[2.5.3]{} B = A^{-1}$

③ → ④ $A = P_1 \cdots P_r$ として

$\underbrace{P_r^{-1} \cdots P_1^{-1}}_{\text{基本行列}} [A : E_n] = [E_n \ \underbrace{P_r^{-1} \cdots P_1^{-1}}_{B = A^{-1}}]$

⑥ $A\vec{x} = \vec{b}$ の解はただ1つ

⑦ $A\vec{x} = \vec{0}$ の解もただ1つ

⑧ $\det A \neq 0$