2026/05/14 第4回 線形代数 演義資料

行簡約化のやり方

https://www2.sci.hokudai.ac.jp/dept/math/wp/wp-content/uploads/2020/05/vol1.pdf の説明がわかりやすかったので参考にした.

**まとめ 171** (行簡約化のやり方). 行列の行基本変形を用いた行簡約化は次のように行う.

操作 1. 各行の先頭項のうち, 一番左にあるものを含む行の一つをとり, 行基本変形 (II) で 1 行目と入れ替える.
操作 2. 1 行目の先頭項を行基本変形の (I) で 1 にする.
操作 3. 1 行目の先頭項を含む列について, その先頭項以外の成分を行基本変形の (III) で 0 にする.
操作 4. 各行の先頭項のうち, 一番左にあるものを含む行の一つをとり, 行基本変形 (II) で 2 行目と入れ替える.
操作 5. 2 行目の先頭項を行基本変形の (I) で 1 にする.
操作 6. 2 行目の先頭項を含む列について, その先頭項以外の成分を行基本変形の (III) で 0 にする.
操作 7. 以下 3 行目, 4 行目と操作 4-6 が終わるまで繰り返していく.

**補足 172.** 実際に行列を簡約化するプログラミングは上の方法を使って作られる. https://drken1215.hatenablog.com/entry/2019/03/20/202800

**例 173.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を行基本変形で簡約化すると次のとおりである.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{②\to②+①\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{③\to③+②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③\to③\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[②\to②+③\times\frac{3}{2}]{①\to①+③\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③\to③\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

よってこの行列の階数 (ランク) は 3 である.

問題 11. 次の行列を簡約化し, その階数を求めよ. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

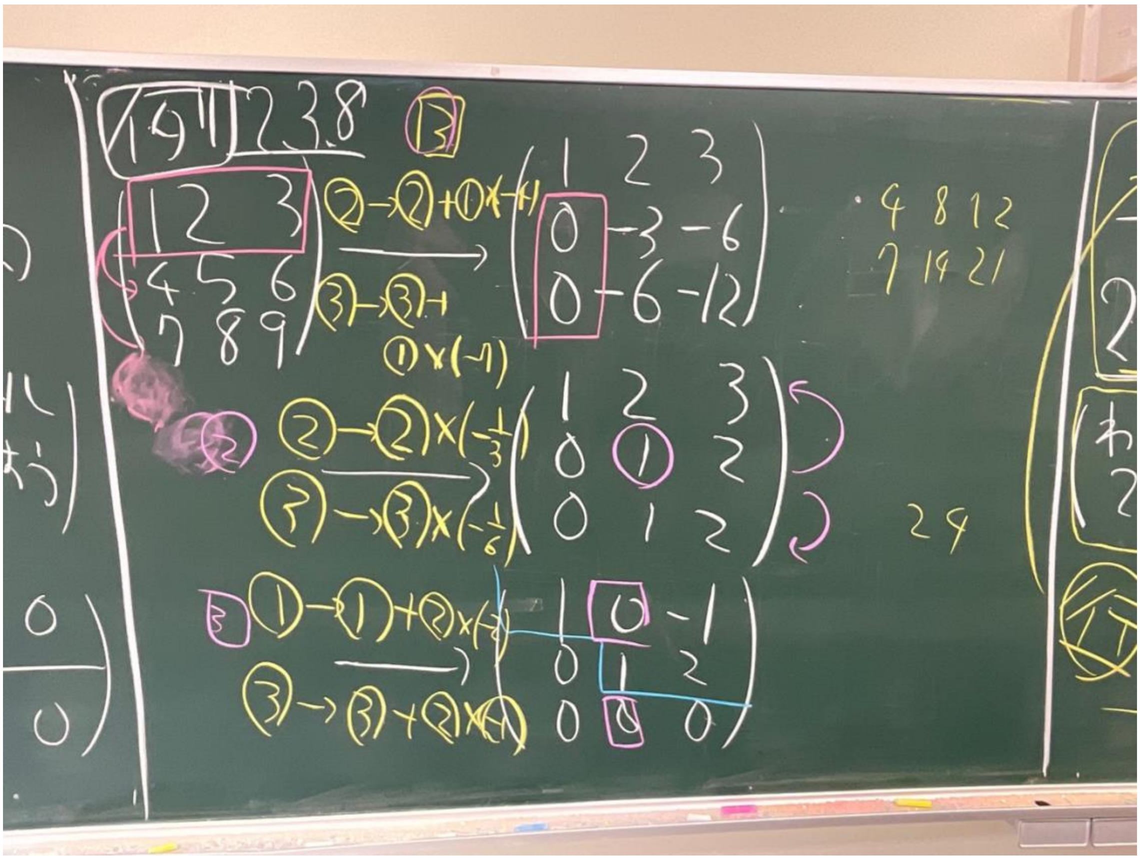
# 行簡約化

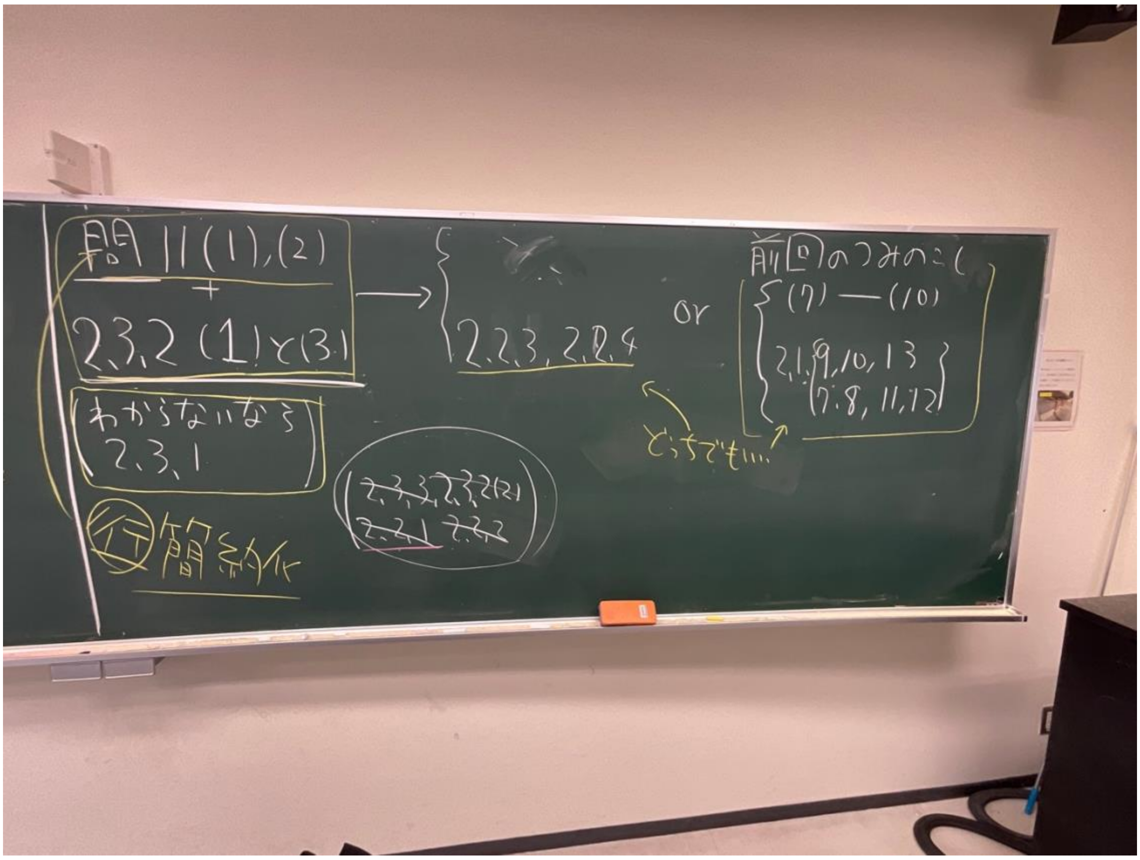
$A \xrightarrow{\text{行基本変形}} B$ 行簡約

$\operatorname{rank}(A) = \left(\begin{array}{c}\text{B のゼロベクトル} \\ \text{でない行のこすう}\end{array}\right)$

$\wr$

$A \xrightarrow[\text{列基本変形}]{\text{行基本変形} \, + } \left(\begin{array}{c|c} E_{\operatorname{rank}(A)} & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$


例11 2.3.8
4 8 12
7 14 21



問11(1),(2)
2.3.2 (1)と(3.1)
わからないなら
2.3.1
行簡約化
2.2.3, 2.2.4
or
前回のつみのこし
(7)—(10)
2.1.9, 10, 13
7.8, 11, 12
どっちでも…

11 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3 3 15 0 9
2 2 10 0 6

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1 3 −1 −1
2 6 −2 −2

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ \end{array}$$

ランク3

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & -12 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -16 \end{pmatrix}$$

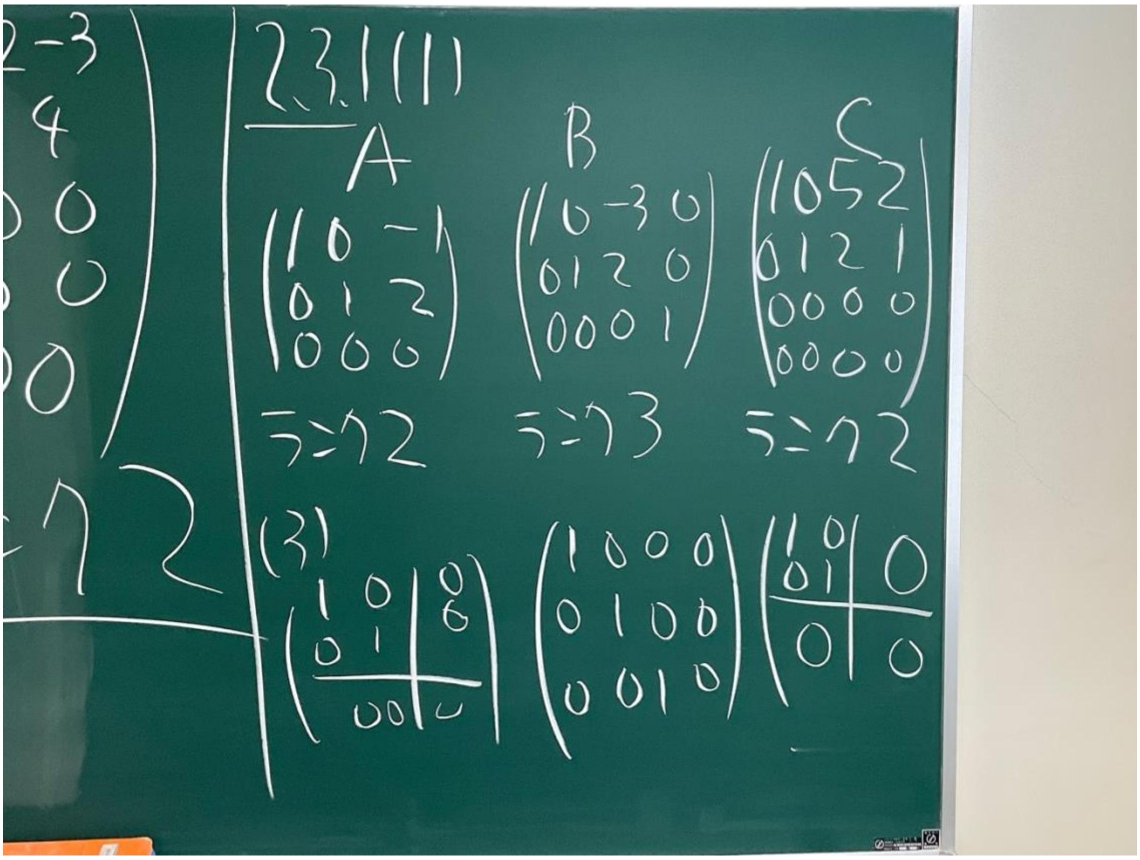
2 4 6 8 9
3 6 9 12 15
4 8 12 16 20
5 10 15 20 25

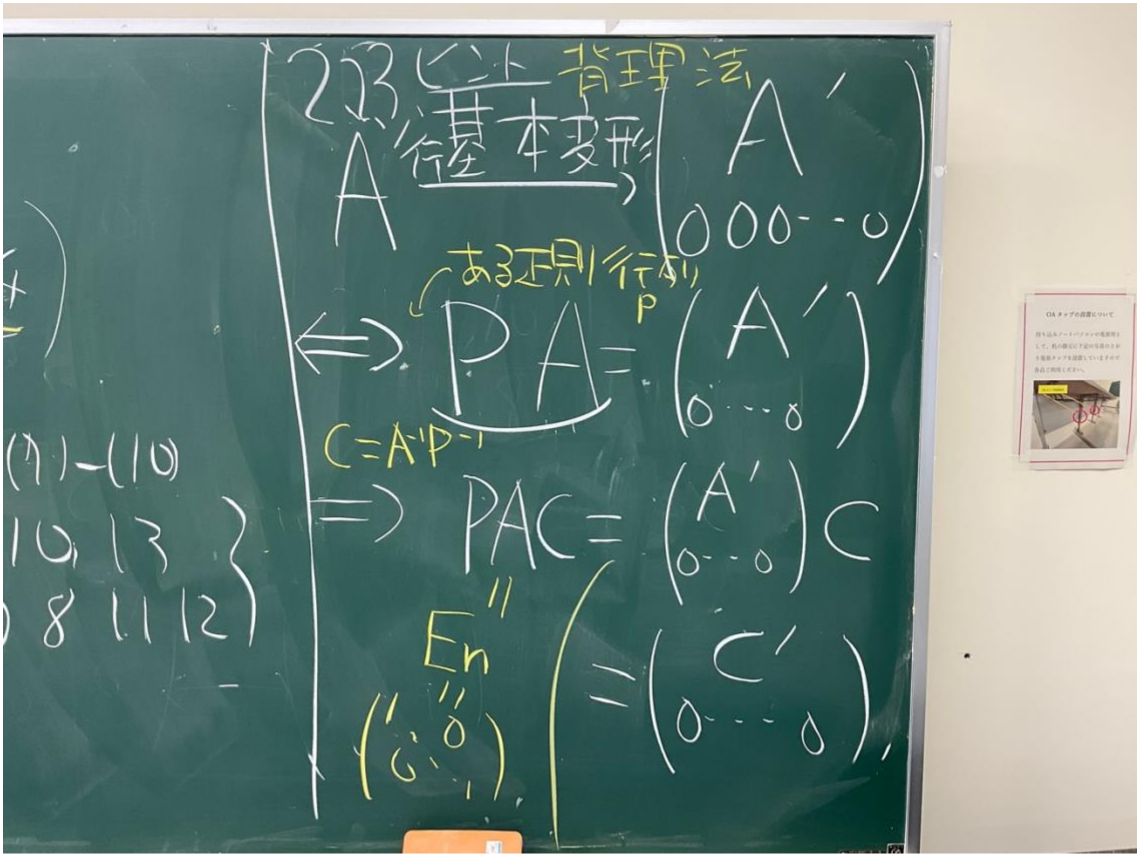
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 4 6 8

ランク2

(3)


2.3.1(1)
A
B
C
ランク2
ランク3
ランク2
(3)


2.2.3 ヒント
背理法
基本変形
ある正則行列
P
PA=
C=A'^{-1}P^{-1}
PAC=
En
(7)-(10)
10, 13
8 11 12