2.2&2.3&2.4

連立一次方程式をアルゴリズム的に解く。

(行)基本変形と簡約化

はきだし法

2.2 行列の基本変形

(以下体K(数)で考える)

定義(2.2.1) 次の3つを行基本変形という

① 行列Aの第i行をλ倍する(λ≠0)　ⓘ→ⓘ×λ

② 第i行と第j行をいれかえる　ⓘ↔ⓙ

③ 第 i 行に第 j 行の λ 倍を加える　$ⓘ \to ⓘ + ⓙ \times \lambda$

(列基本変形は省略)

$\boxed{\text{例12、2、2}}$

$$
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}
\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow[\text{第2行×(}-\frac{3}{2}\text{)をたす}]{③\ \text{第1行に}}
\begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{2} & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{2} & -1 \\ 2 & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}
$$

第2行に第1行×$\left(-\frac{2}{7}\right)$をたす

$$
\xrightarrow{③/①}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 2 & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}
$$

(1行×$\frac{2}{7}$)

$$
\xrightarrow{①}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 1 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}
$$

2行×$\frac{1}{2}$

$$
\xrightarrow{②}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}
$$

いれかえ

○

命題 2.2.3

行基本変形は逆変換が存在しそれも行基本変形

①の逆 = 第i行をλ^{-1}倍する

②の逆 = 第i行と第j行いれかえ

③の逆 = 第j行に第i行の$(-\lambda)$倍を加える

定義 2.2.4（基本行列）

（命題 2.2.6）A : $m \times n$ 行列

ある m次正方行列 $E_m(i,s)$, $E_m(i,j)$, $E_m(i,j,s)$ があって次をみたす

（定義 2.2.4 をみよ。基本行列という）

① $\underline{E_m(i,s)A}$

$=$(Aの第i行をs倍した行列)

② $\underline{E_m(i,j)A}$

$=$(Aの第i行と第j行の入れかえたもの)

③ $E_m(i,j,s)A$

$=$(Aの第j行のs倍を第i行にかえる)

$\quad 2 \quad \cdots \quad 10 \quad\quad 1$

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$

$\underline{E_2(1,10)}A=\begin{pmatrix}10&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&20&30\\4&5&6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}10&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\underline{E_2(1,2)}A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$\underline{E_2(1,2,10)}A=\begin{pmatrix}1&10\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}41&52&63\\4&5&6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&10\\0&1\end{pmatrix}$

命題2.2.7 ($AB=BA=E_m$)

基本行列は正則で逆行列も基本行列

例 ① $\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ の逆は $\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(第1行×10)　(第1行×$\frac{1}{10}$)

$E_m(i,s)^{-1}=E_m(i,s^{-1})$

② $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ の逆は $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

①と②のいれかえ　$E_m(i,j)^{-1}=E_m(i,j)$

③ $\begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ の逆は $\begin{pmatrix}1 & -10\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

1行目に2行目×(10)をたす　1行目に2行目×(−10)をたす

$E_m(i,j,s)^{-1}=E_m(i,j,-s)$

(命題2.2.6のいいかえ)

命題 2.2.8, 2.2.9　A: $m\times n$ 行列

① $A \xrightarrow{\text{行基本変形}} A'$ となるとき

ある正則行列（基本行列の積）P があって $PA = A'$

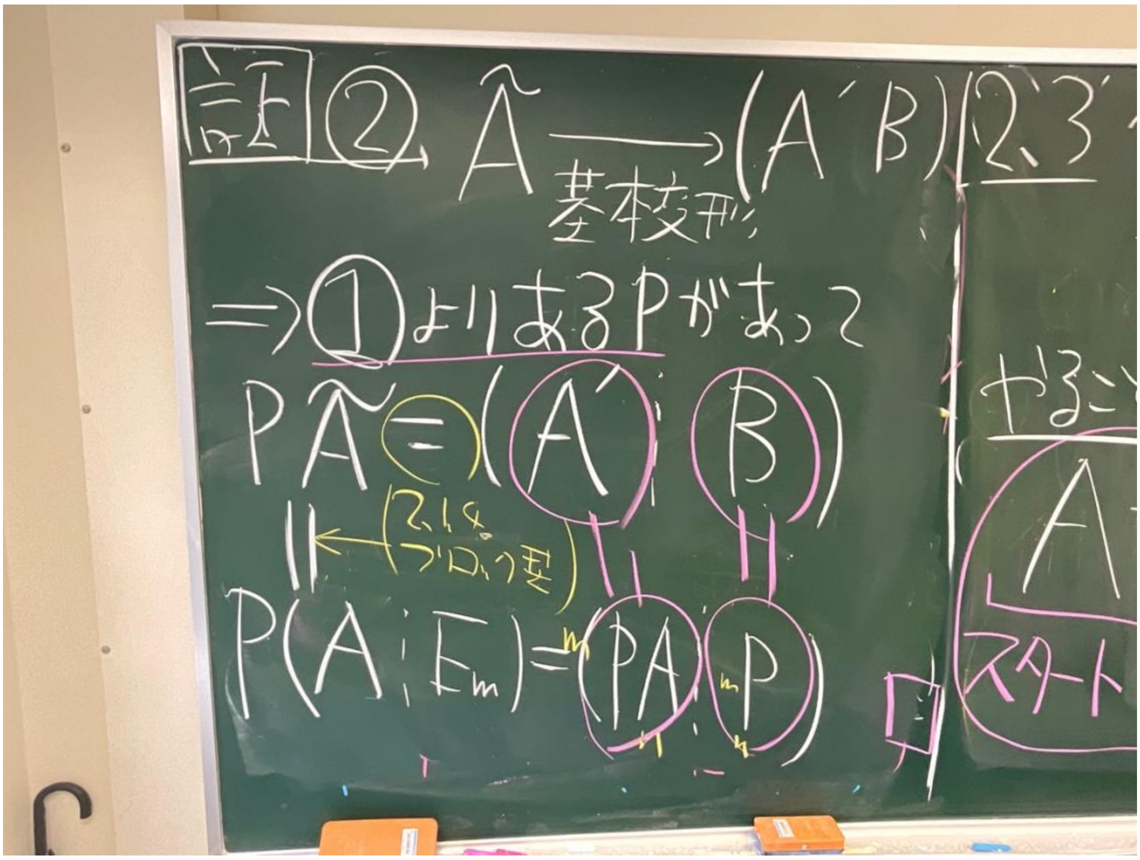
② $\hat{A} = {}^{m}(\underbrace{A}_{n} \mid \underbrace{E_m}_{m})$ とする

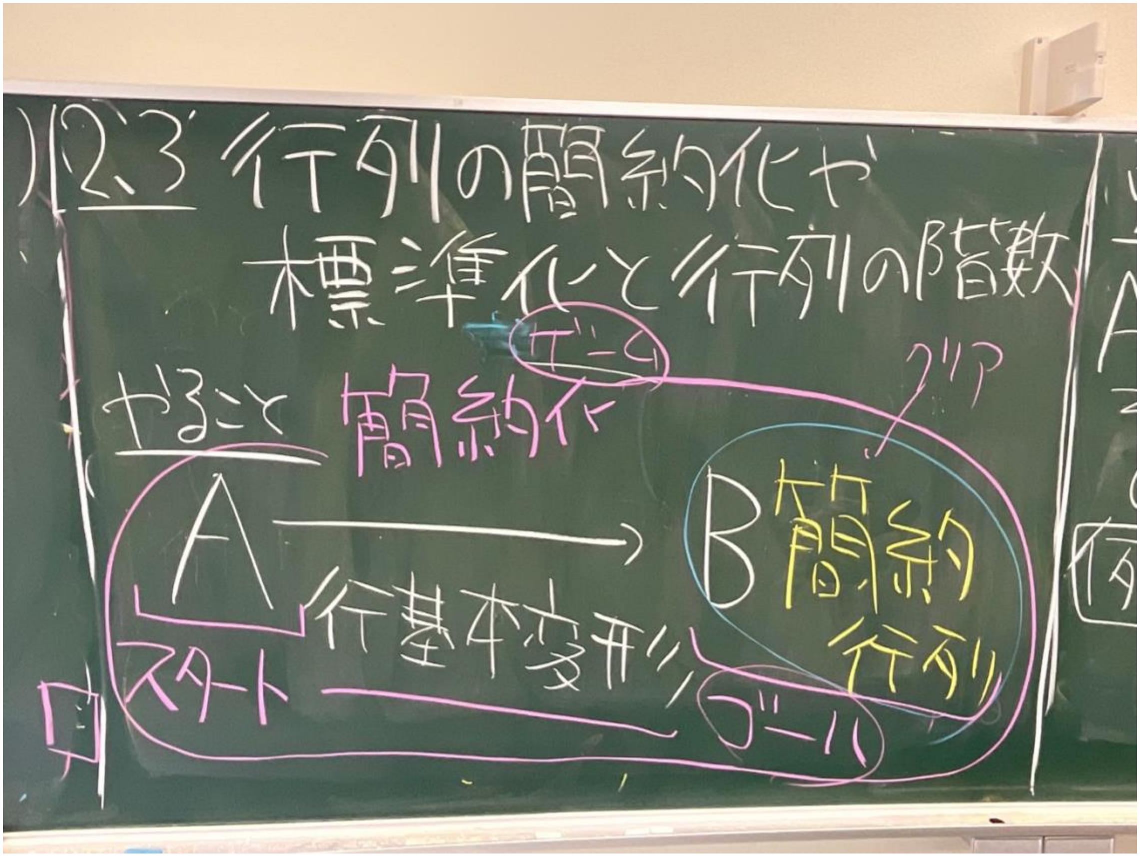
E_m：単位行列

$\hat{A} = (A \mid E_m) \xrightarrow{\text{行基本変形}} {}^{m}(\underbrace{A'}_{n} \mid \underbrace{B}_{m})$ となるとき

B は①で定めた P にひとしく

$A' = BA$ となる


証②
Ã → (A' B)
基本変形
⇒①よりあるPがあって
PÃ = (A' B)
2.1&
ブロック型
P(A Em) = (PA P)
2.3'


2.3' 行列の簡約化や
標準化と行列の階数
ゲーム
クリア
やること 簡約化
A → B 簡約行列
行基本変形
スタート
ゴール

定義（先頭項）

Aの第i行の先頭項とは
それぞれの行の最初にある
0でない数

例

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

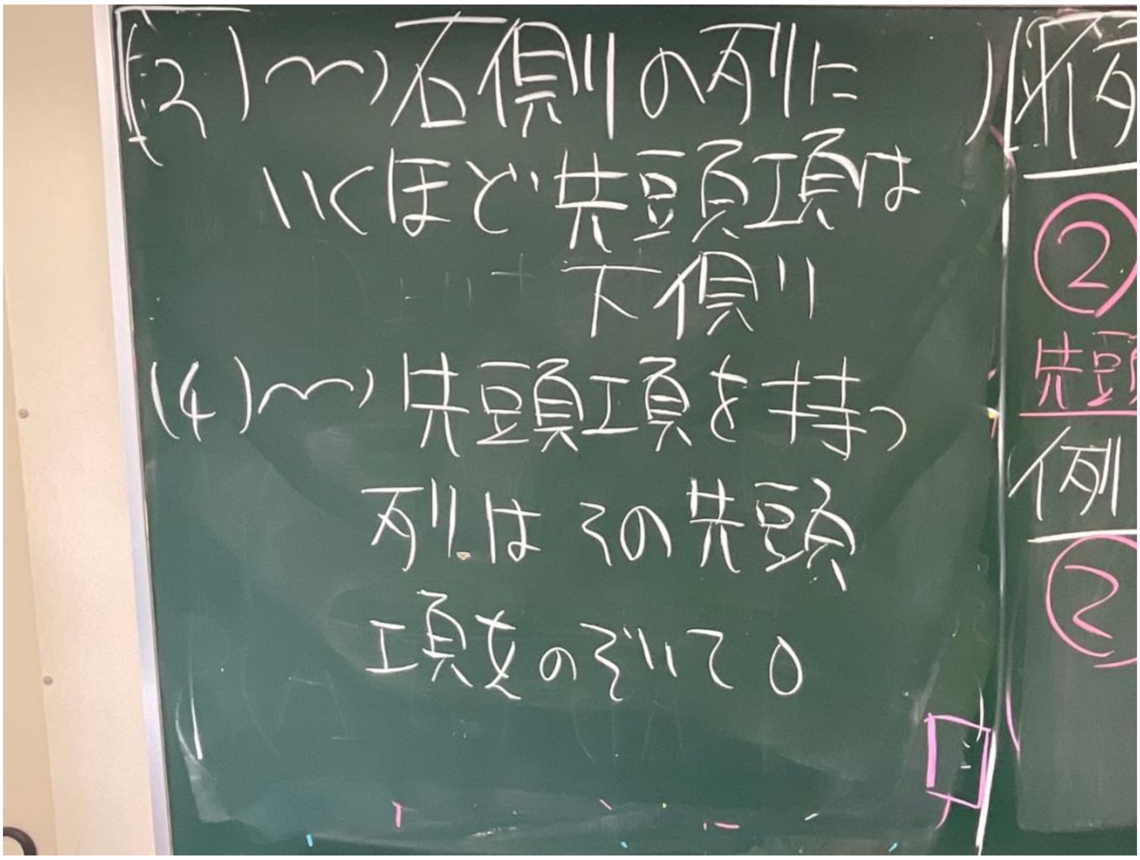
14

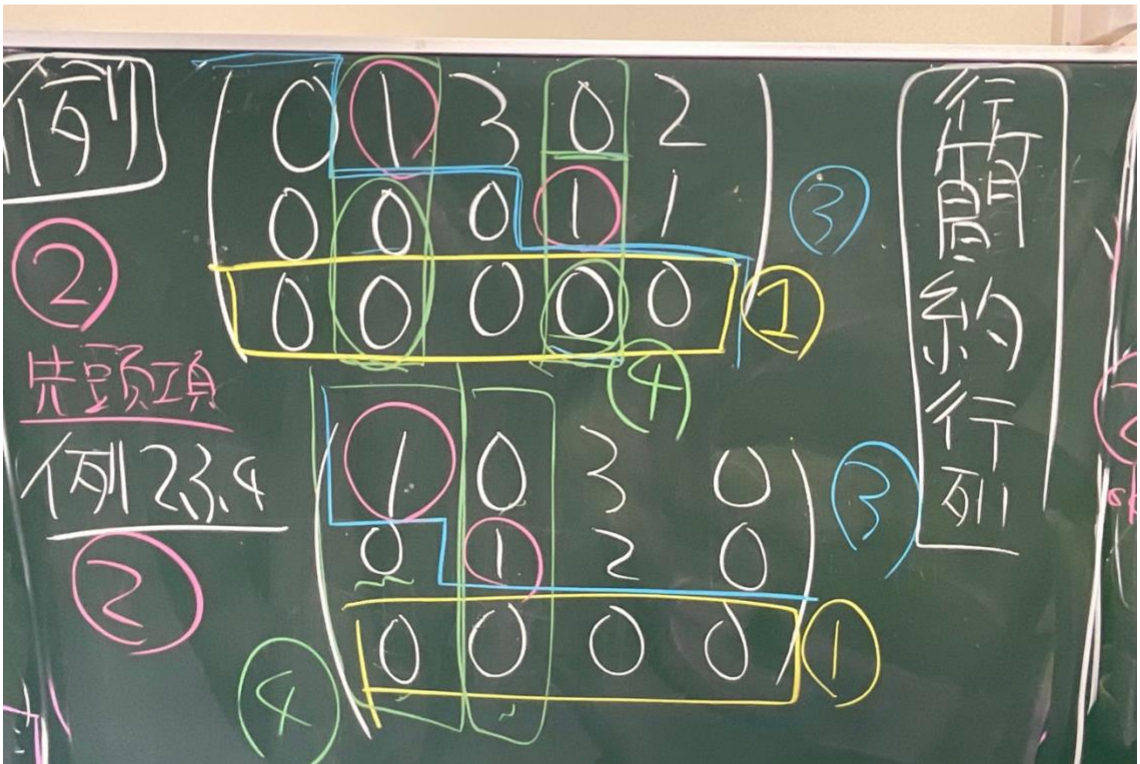
定義2.3.2 A：m×n行列

次の(1)〜(4)をみたす行列を行簡約行列という。

(1) ⟶ 全ての成分が0である行は下側

(2) ⟶ 先頭項はすべて1


(3) 〜〜 右側の列に
いくほど先頭項は
下側
(4) 〜〜 先頭項を持つ
列は その先頭
項をのぞいて0


例
②
先頭項
例2,3,4
②
0 1 3 0 2
0 0 0 1 1
0 0 0 0 0
1 0 3 0
0 1 2 0
0 0 0 0
行簡約行列

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ \boxed{0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0} \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times$$

①がダメ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

②ok

①ok

×③ダメ

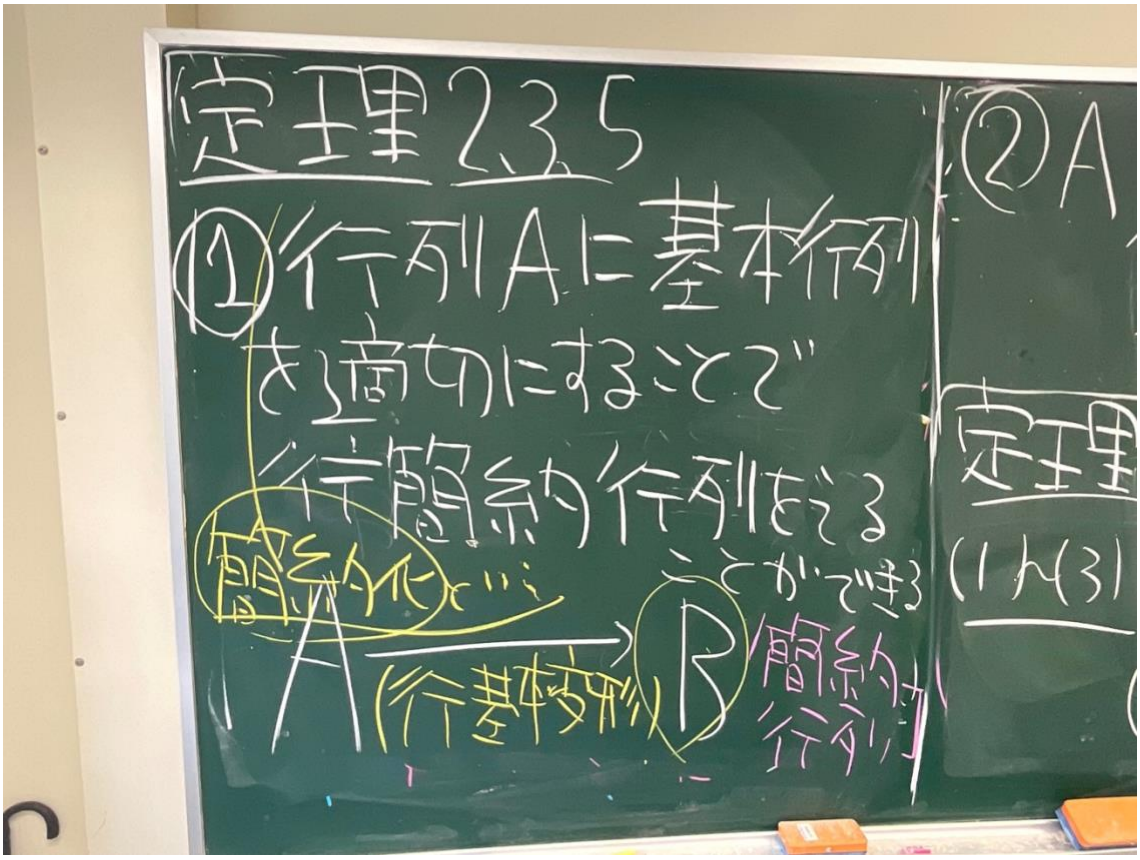
定義 2.3.2

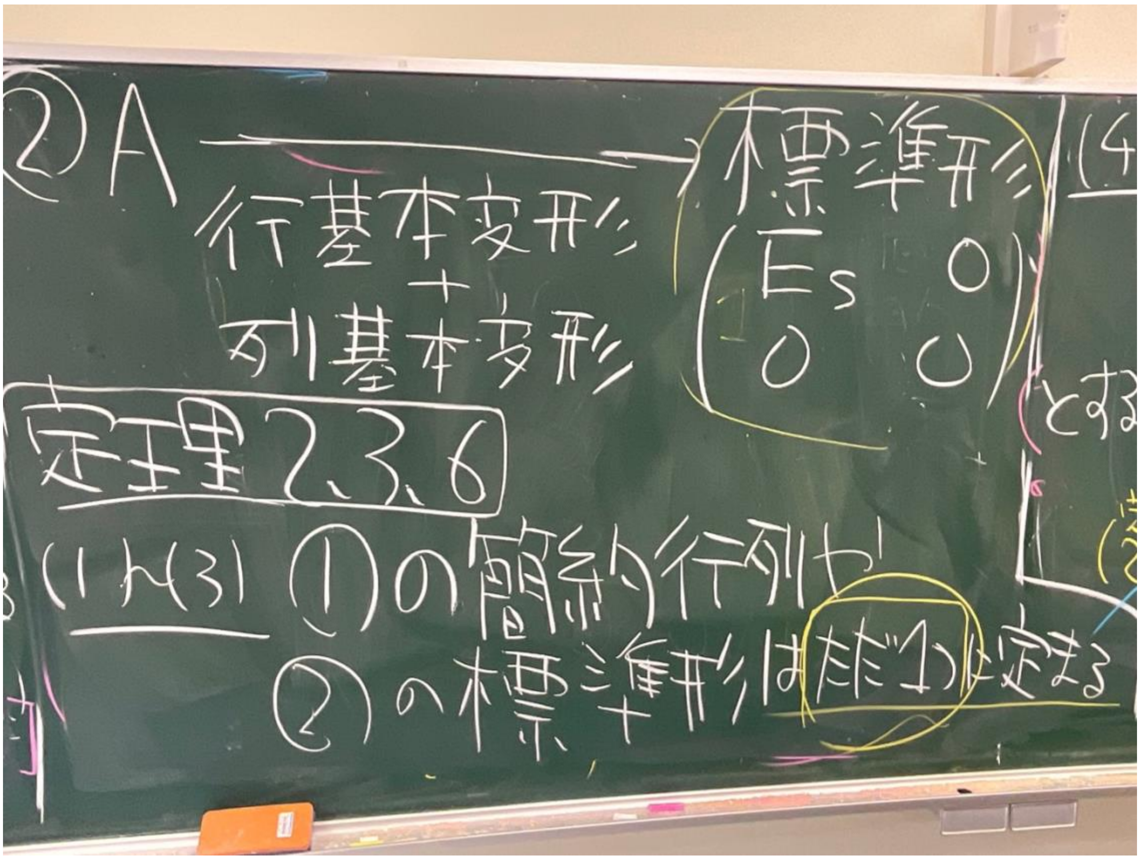
$m \times n$ 行列 がある s を用いて

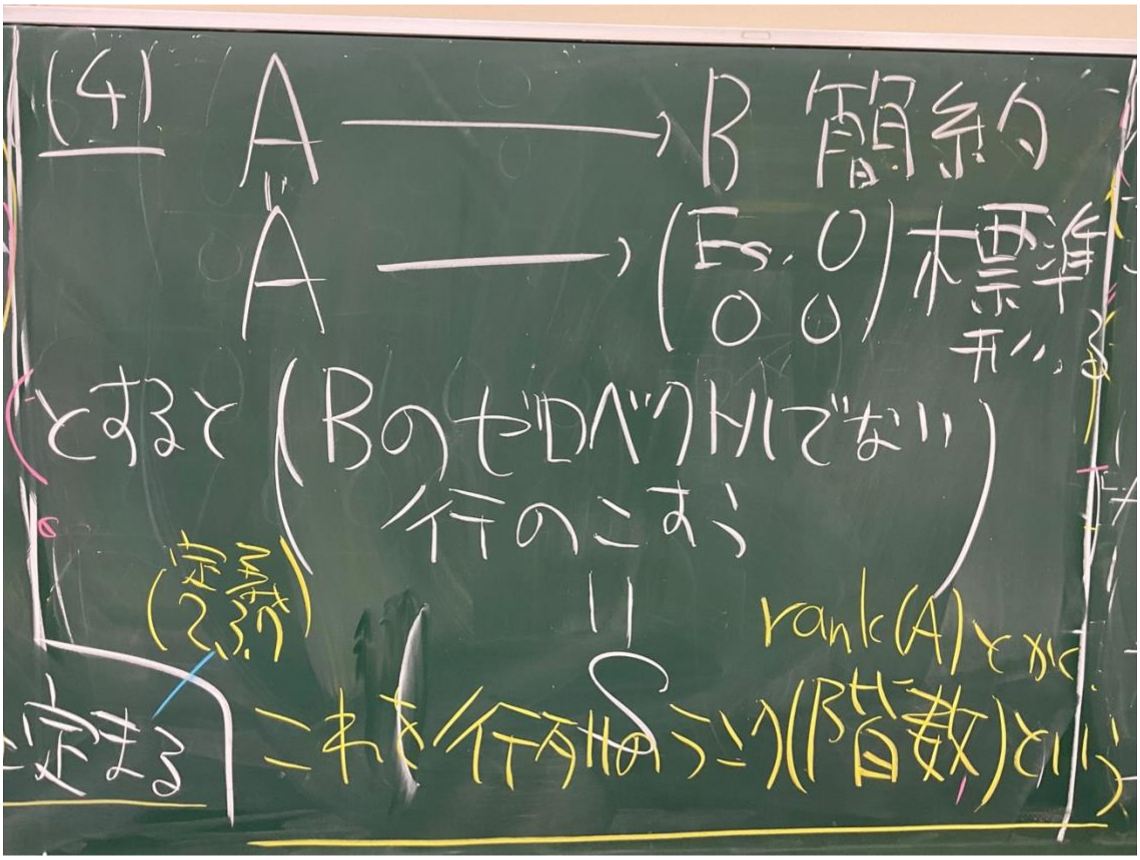
$$A = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

となるとき

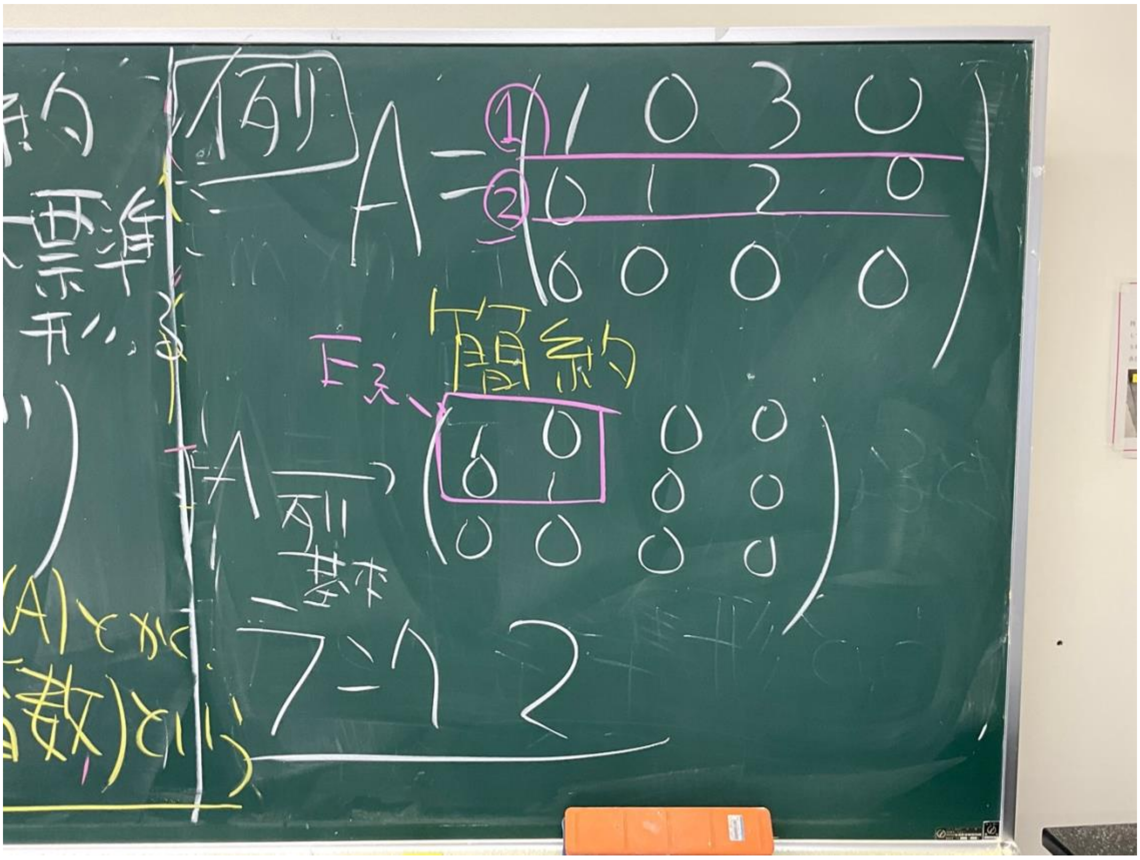
Aを標準形という


定理2.3.5
①行列Aに基本行列を適切にかけることで行簡約行列をえることができる
簡約化という
A
(行基本変形)
B
簡約行列
②A
定理
(1)〜(3)


②A
行基本変形
+
列基本変形
標準形
Es O
O O
とする
定理2.3.6
(1)〜(3)
①の簡約行列や
②の標準形はただ1つに定まる



(4) A ——→ B 簡約
A ——→ (Es 0 / 0 0) 標準形
とすると (Bのゼロベクトルでない行のこすう)
= s
rank(A)とかく
定まる
これを行列のランク(階数)という



例
A = ① (1 0 3 0) ② (0 1 2 0) (0 0 0 0)
簡約
E2
A ——→ 列基本
1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 0 0
ランク 2