2026/05/07 第 3 回 線形代数 演義資料

補足 168. n 次正方行列の全体は和と積に関して以下の性質を満たす.

(1). (和の交換法則) $A+B=B+A$
(2). (和の結合法則) $(A+B)+C=A+(B+C)$
(3). (ゼロ元の存在) $A+O_n=O_n+A=A$
(4). (和の逆元の存在) $-A$ を $(-1)A$ で定義するとき, $A+(-A)=O$
(5). (積の結合法則) $(AB)C=A(BC)$
(6). (単位元の存在) $AE_n=E_nA=A$
(7). (分配法則) $A(B+C)=AB+AC, (A+B)C=AC+BC$

このとき n 次正方行列の全体は行列環と呼ばれる. また行列は一般的に $AB \neq BA$ である. このような環を非可換環という. なお上のような法則は暗記する必要はない. 私も忘れていた.

授業で言い忘れていたが次が成り立つ.

- (3) より, 行列 A にゼロ行列 O_n を足しても引いても変わらない.
- (6) より, 行列 A に単位行列 E_n をかけても変わらない.

行列のブロック分解の補足. 行ベクトル, 列ベクトルでこの表記をすることが多い.

$A=\begin{pmatrix}1&3&4&4\\2&1&0&-1\\1&0&5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1&\boldsymbol{a}_2&\boldsymbol{a}_3&\boldsymbol{a}_4\end{pmatrix}$. ここで $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ は次で定義する.

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

$A=\begin{pmatrix}1&3&4&4\\2&1&0&-1\\1&0&5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{b}_2\\\boldsymbol{b}_3\end{pmatrix}$. ここで $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ は次で定義する.

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1&3&4&4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}1&0&5&0\end{pmatrix}.$$

よく使う方法は $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1&\boldsymbol{a}_2&\boldsymbol{a}_3&\boldsymbol{a}_4&\boldsymbol{a}_5\end{pmatrix}$ と書く方法で, これによって下のようにかける.

$$BA=\begin{pmatrix}B\boldsymbol{a}_1&B\boldsymbol{a}_2&B\boldsymbol{a}_3&B\boldsymbol{a}_4&B\boldsymbol{a}_5\end{pmatrix}$$

問題 7. 2×2 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $ad-bc\neq 0$ であると仮定する．この時 $B=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ について $AB=BA=E_2$ を示せ．[15] よって A は正則で B は A の逆行列 A^{-1} である．

問題 8. n 次正方行列 A が正則行列であるとする．この時 n 次正方行列 B について，$AB=O_n$ ならば $B=O_n$ であることを示せ．(ヒント: 教科書 p.23 の (3) と p.22 の $AE_n=E_nA=A$ を使う．上の補足の (3) と (6) でも良い.)

問題 9. 2×2 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $ad-bc=0$ であると仮定する．この時 A は正則でないことを示せ．(ヒント: ゼロ行列でない B で $AB=O_2$ となるものを構成し，前の問題を使う.)

問題 10. 2×2 行列の岩澤分解の証明をあたえる．

命題 169. [教科書, 命題 1.2.4 (岩澤分解)] 1 次変換 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が逆変換を持つならば，引き伸ばし変換 f_1，斜倒変換 f_2，回転変換 f_3 を用いて

$$f=\underbrace{f_3}_{\text{回転変換}}\circ\underbrace{f_1}_{\text{引き伸ばし変換}}\circ\underbrace{f_2}_{\text{斜倒変換}}$$

の証明を考える．これは行列の言葉で言うと次を示せば良い．

命題 170. 実数係数の 2×2 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $ad-bc\neq 0$ ならば，ある実数 θ,λ,μ,r があって

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{回転変換}}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}}_{\text{引き伸ばし変換}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{斜倒変換}}$$

次の問いに答えよ．

(a) (a,c) の極座標変換を考えることで，ある $p,q,s,\theta\in\mathbb{R}$ があって

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad s\neq 0$$

とできることを示せ．(ここに $ad-bc\neq 0$ を用いる)

(b)

$$\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる $\lambda,\mu,r\in\mathbb{R}$ が存在することを示し，岩澤分解の証明を完成させよ．

[15] E_2 は単位行列で $E_2:=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

定義

A: n次正方行列で
ある n次正方行列 B で

$$AB = BA = E_n$$ となるとき

A は正則であるといい
B を A の逆行列で $B = A^{-1}$ とかく

授業の補足

P.22 $A+O_n=O_n+A=A$

① $AE_n=E_n\cdot A=A$

P.23 ② $(AB)C=A(BC)$

命題 2.1.1 A, B, C n次正方行列

$$AB=CA=E_n \Rightarrow B=C$$

証明

$$B \underset{①}{=} E_n B \underset{(仮定)}{=} (CA)B$$

$$\underset{②}{=} C(AB) \underset{仮定}{=} CE_n$$

$$\underset{①}{=} C \qquad \square$$

系 逆行列A^{-1}が存在すれば唯一つにさだまる。

例 $\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 正則

問7-9参照 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 正則でない (例2.1.2)

演義 P.27 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13

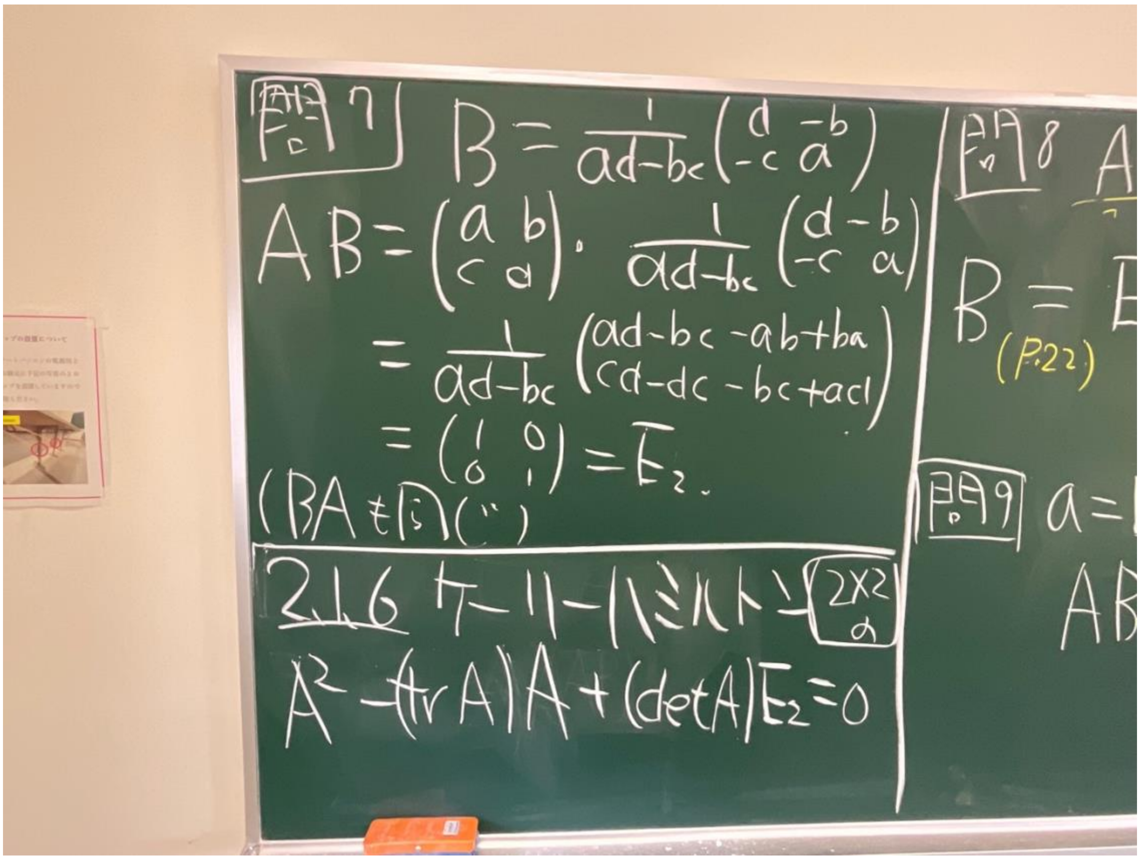
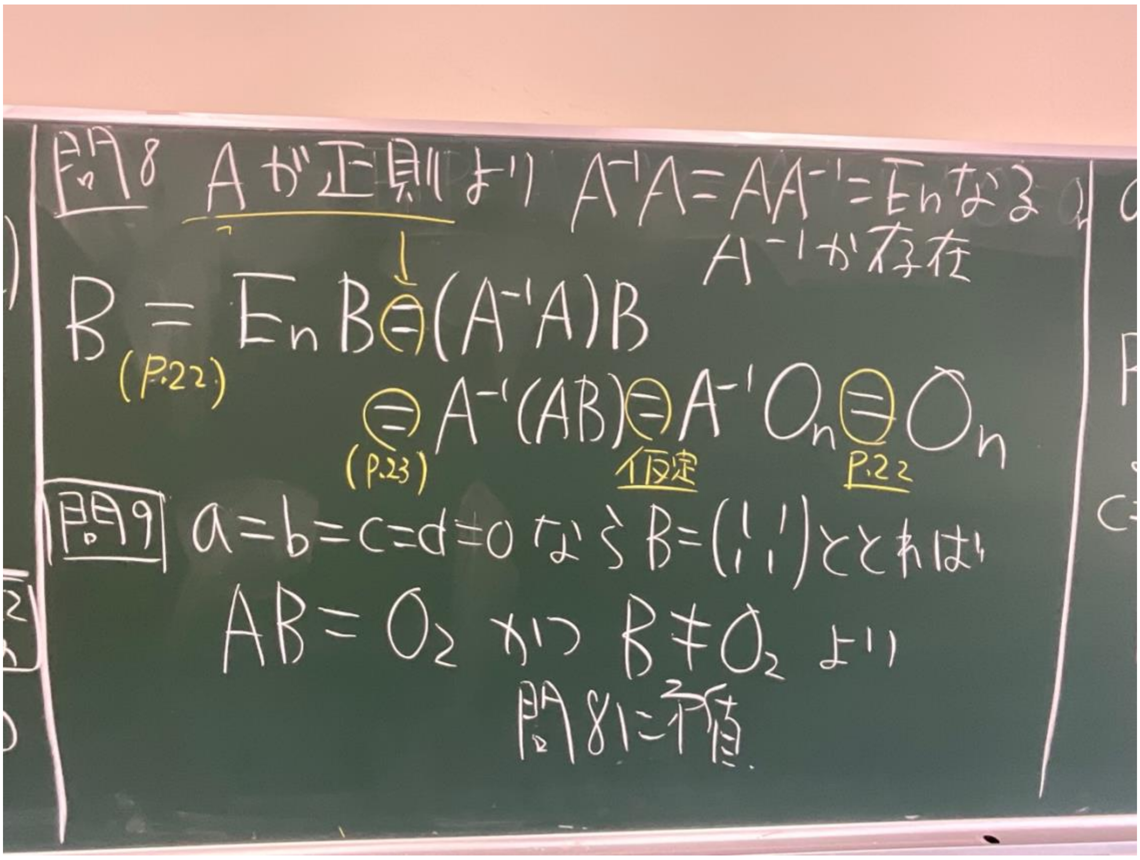
問 7, 8, 9 プリント → 7, 8, 11, 12, (3, 4)

問10 プリント

プリント問10

訂正

$$\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}$$


問7 $B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -bc+ad \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$.
(BAも同じ)
2.1.6 ケーリー・ハミルトン 2×2の
$A^2 - (\mathrm{tr}\,A)A + (\det A)E_2 = O$

問8 Aが正則より $A^{-1}A = AA^{-1} = E_n$ なる A^{-1} が存在
$B = E_n B = (A^{-1}A)B$
(P.22)
$= A^{-1}(AB) = A^{-1}O_n = O_n$
(P.23) 仮定 P.22
問9 $a=b=c=d\neq 0$ なら $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ととれば
$AB = O_2$ かつ $B \neq O_2$ より
問8に矛盾.

$a \neq 0$ または $b \neq 0$ なら

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$ とすれば

$$B \neq O_2 \text{ かつ } AB = \begin{pmatrix} ab-ba & 0 \\ cb-da & 0 \end{pmatrix} = O_2$$

より問 8 に矛盾

$c \neq 0$ または $d \neq 0$ なら

$$B = \begin{pmatrix} d & 0 \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$ とすればよい

(i,j) 成分

2.1.10

$A : l \times m \Longrightarrow {}^tA \ m \times l \qquad {}^tB \cdot {}^tA$

$B : m \times n \Longrightarrow {}^tB \ n \times m \qquad n \times l$

$\underbrace{({}^tA)_{ij} = A_{ji}}_{\text{tの定義}} \qquad \underbrace{({}^tB)_{jk} = B_{kj}}_{\text{tのていぎ}}$

$$({}^tAB)_{ki} \underset{\text{ていぎ}}{=} (AB)_{ik}$$

(tの)

$$\underset{\text{(積のていぎ)}}{=} \sum_{j=1}^{m} A_{ij} \cdot B_{jk}$$

$$\underset{\text{(tのていぎ)}}{=} \sum_{j=1}^{m} ({}^tB)_{kj} \cdot ({}^tA)_{ji}$$

$$= ({}^tB \cdot {}^tA)_{ki}$$

(積のていぎ)

$$({}^t(AB))_{ki} = ({}^tB \cdot {}^tA)_{ki}$$