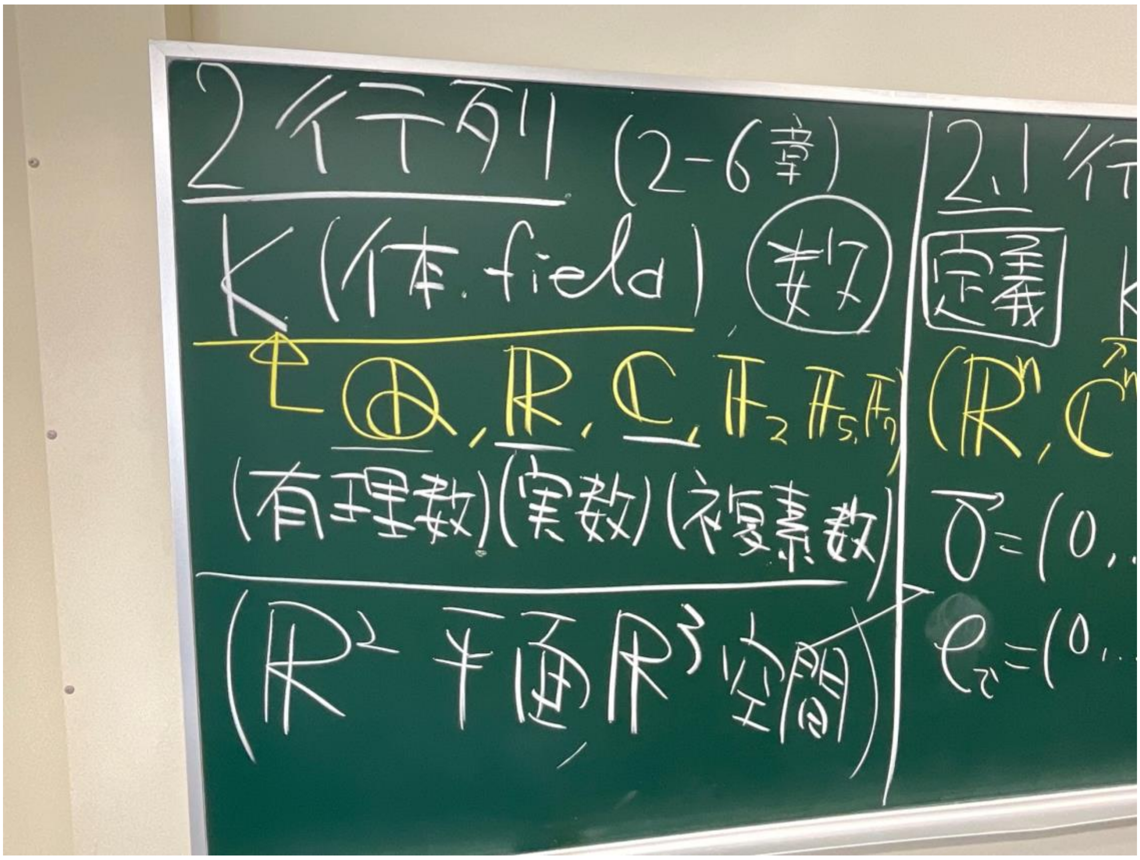

2 行列 (2-6章)
K (体, field) 数
Q, R, C, F2 F5, F7
(有理数)(実数)(複素数)
(R2 平面 R3 空間)
2.1
定義

2.1 行列と数ベクトルの演算

$\boxed{定義}$ $K^n = \{(x_1, \ldots x_n) \mid x_1 \ldots x_n \in K\}$ 数ベクトル空間

$(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$

(数ベクトル)

$\vec{0} = (0, \ldots 0)$ ゼロベクトル

$e_i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots 0)$ 基本単位ベクトル

足し算とかスカラー倍も定義できる

(後期)

$\boxed{定義}$ (行列) m, nを正の整数

$m \times n$ 行列 ((m, n) 型行列)

(m 行 n 列)の行列とは

$(a_{ij}$ 数$)$

数

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots \; j & n\,コ \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ i \\ m\,コ \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & a_{ij} & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$ とする

行　列

・ a_{ij} を (i,j) 成分

・ — $(a_{i1} \ldots a_{in})$ 第 i 行

— $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ 第 j 列

・ $m=n$ のとき、n次正方行列という

・ $M_{m,n}(K) = \{m行n列行列\}$

$M_n(K) = \{n次正方行列\}$

・ $m=1$ $(a_1 \cdots a_n)$ 行ベクトル

・ $n=1$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ 列ベクトル

例

2

$(2,3)$

第2行

第3列

例
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$
2×4行列という

(2,3)成分…7

第2行 $(5\ 6\ 7\ 8)$ 行ベクトル

第3列 $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ 列ベクトル

補足 行列をAとかいたり

(a_{ij}), $[a_{ij}]$, $(a_{ij})_{m\times n}$

と略記するかも。

定義 (P.20 和と差)

A, B $m\times n$ 行列として

A+B を各成分の足し算とする

ひき算

たり

$n\times n$

るかも、

して

算となる

算

例

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2 & -2+5 & 8+1 \\ 2+3 & 5-1 & -1+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2 & -2-5 & 8-1 \\ 2-3 & 5-(-1) & -1-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

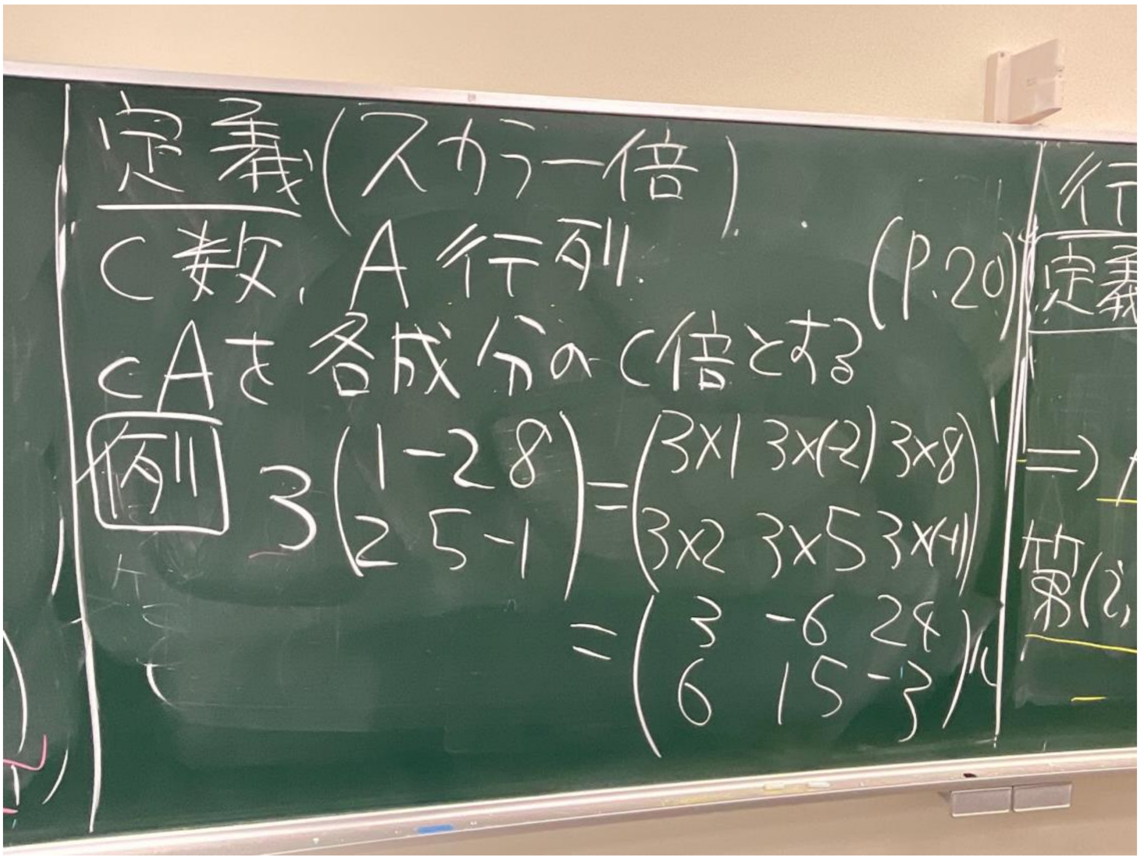
のとき $A+B$ はできない

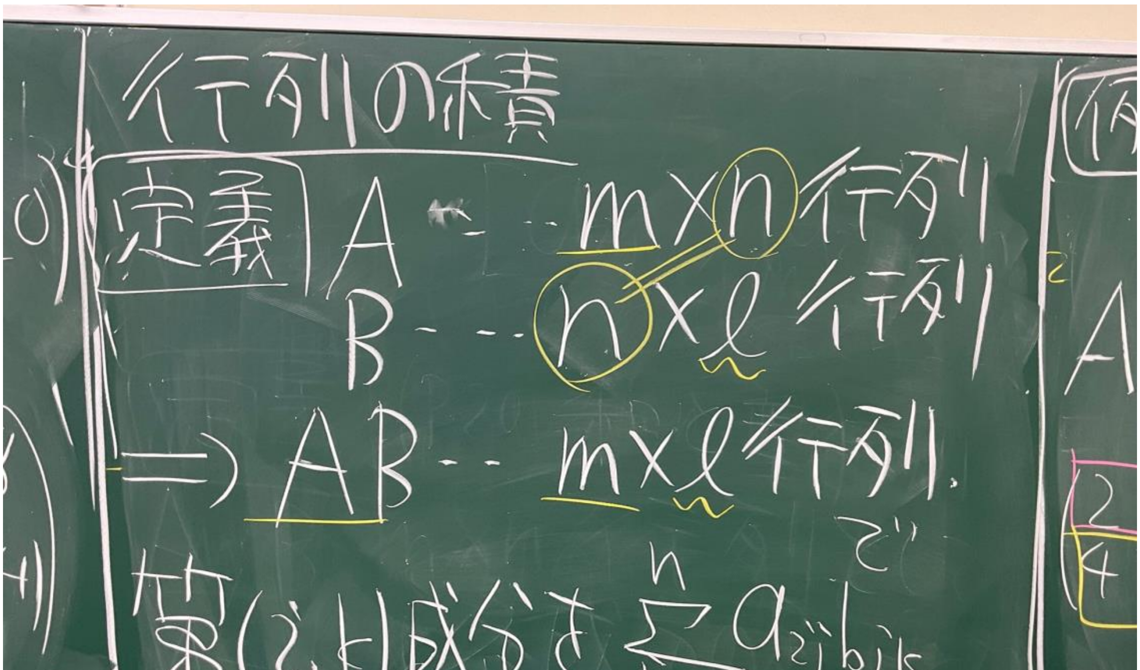
定義

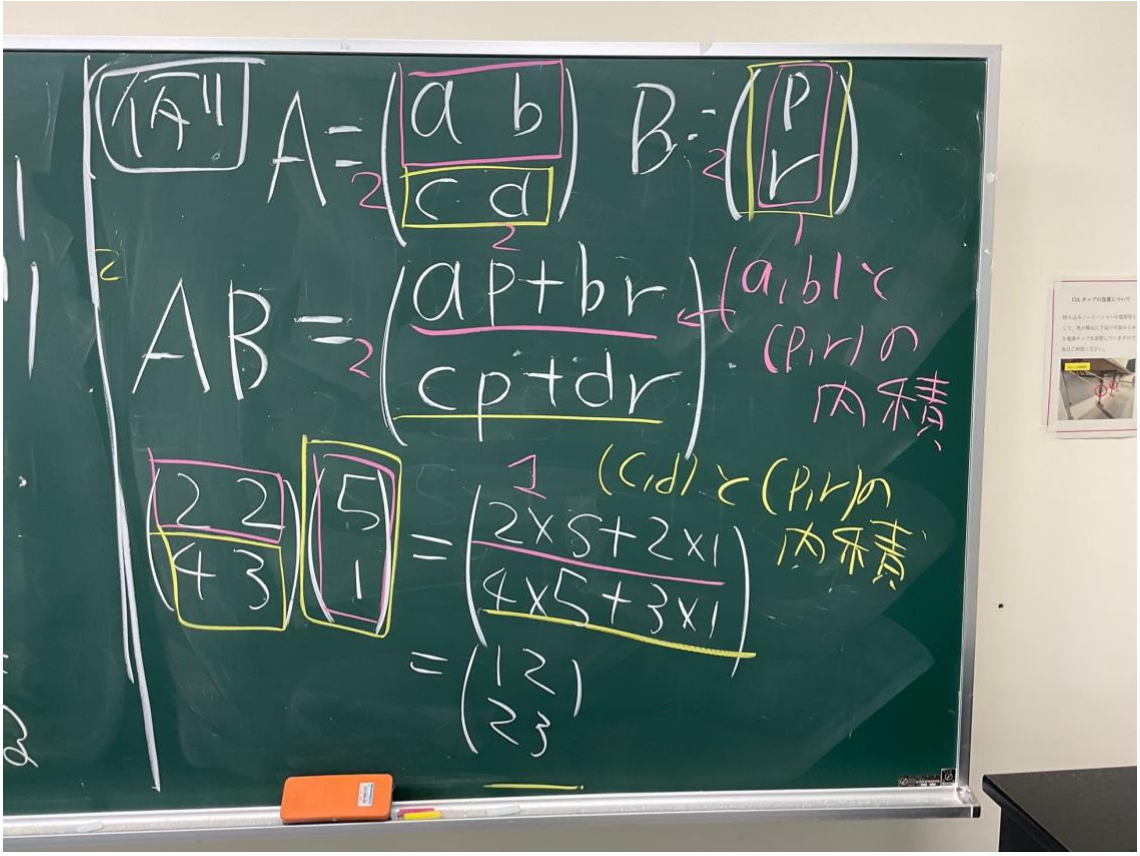
c 数

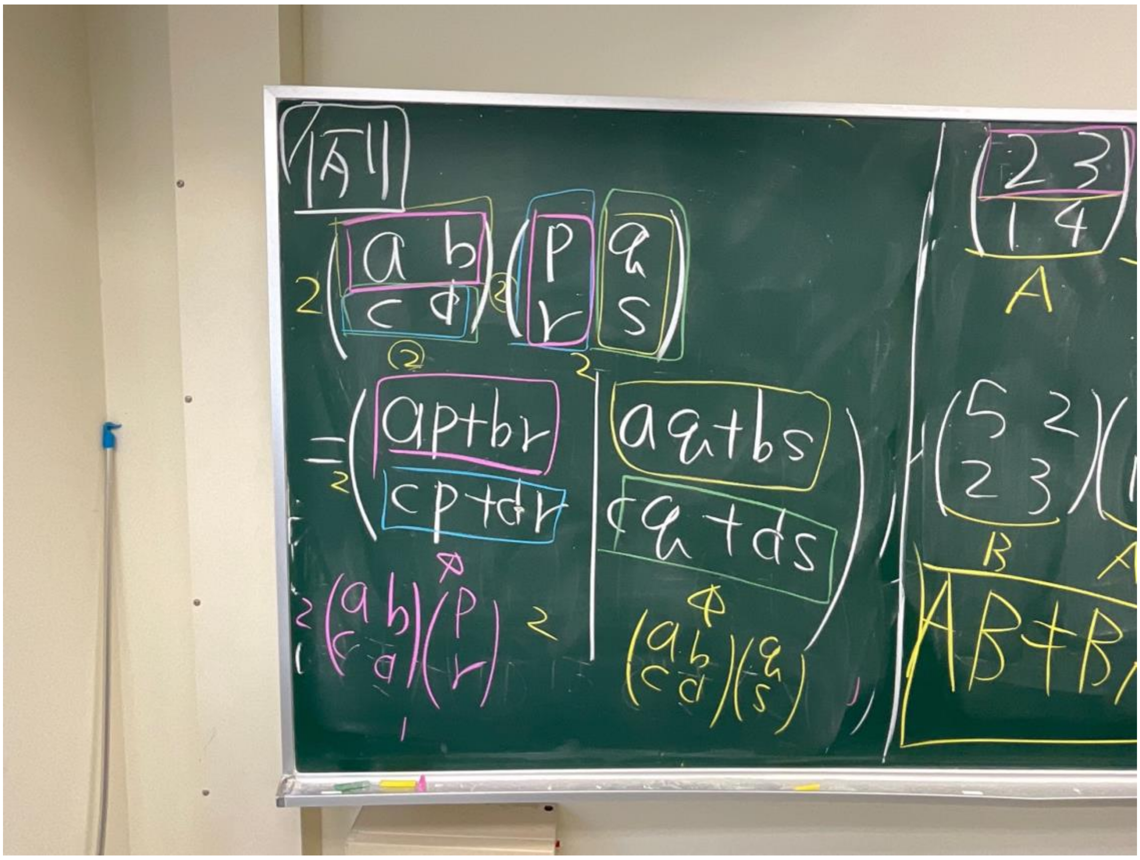
cA を

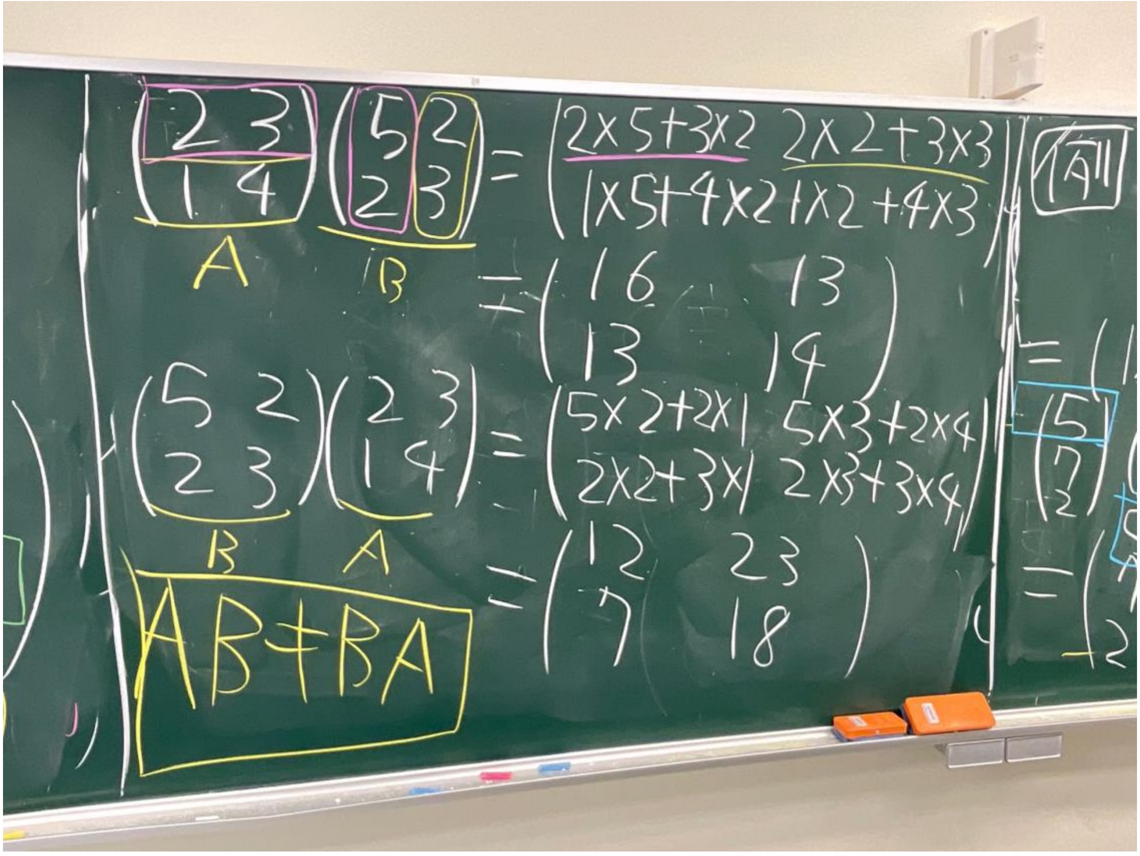
例 3

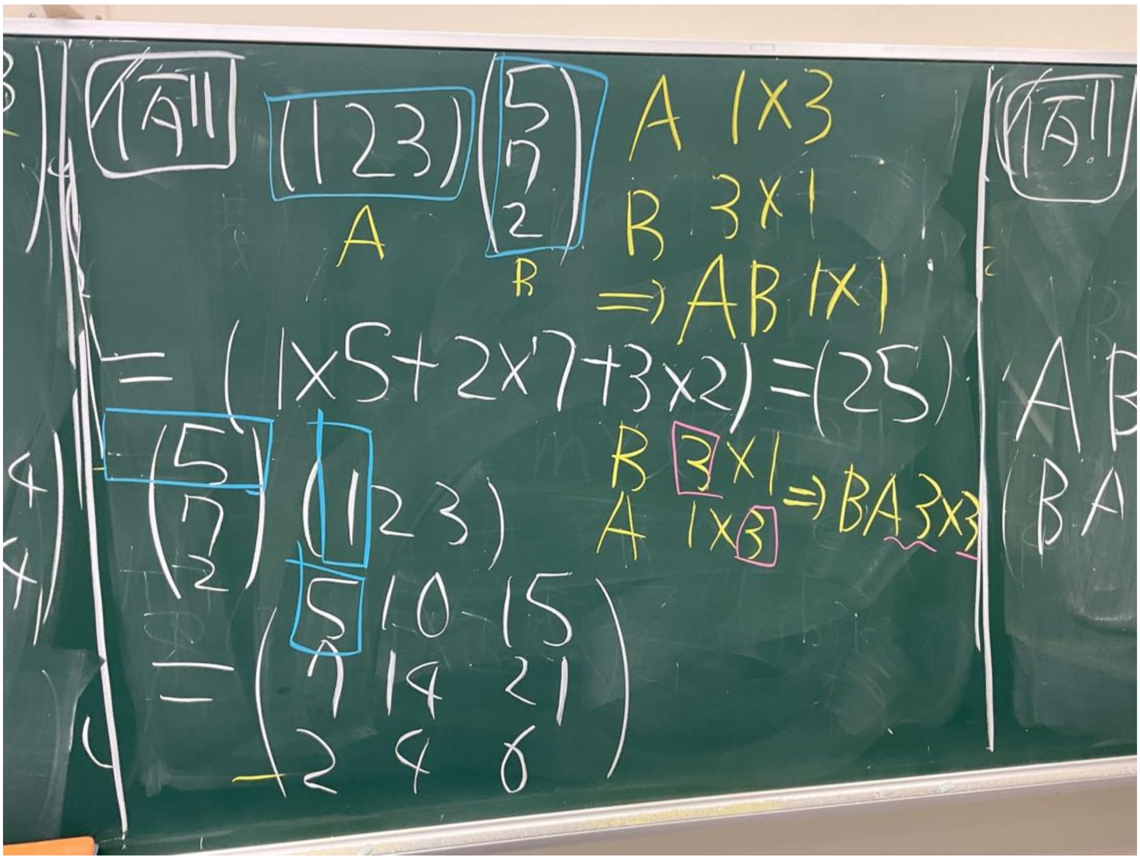

定義(スカラー倍)
c 数, A 行列
(P.20)
cA を各成分の c 倍とする
例
$3\begin{pmatrix}1 & -2 & 8\\ 2 & 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times1 & 3\times(-2) & 3\times8\\ 3\times2 & 3\times5 & 3\times(-1)\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}3 & -6 & 24\\ 6 & 15 & -3\end{pmatrix}$

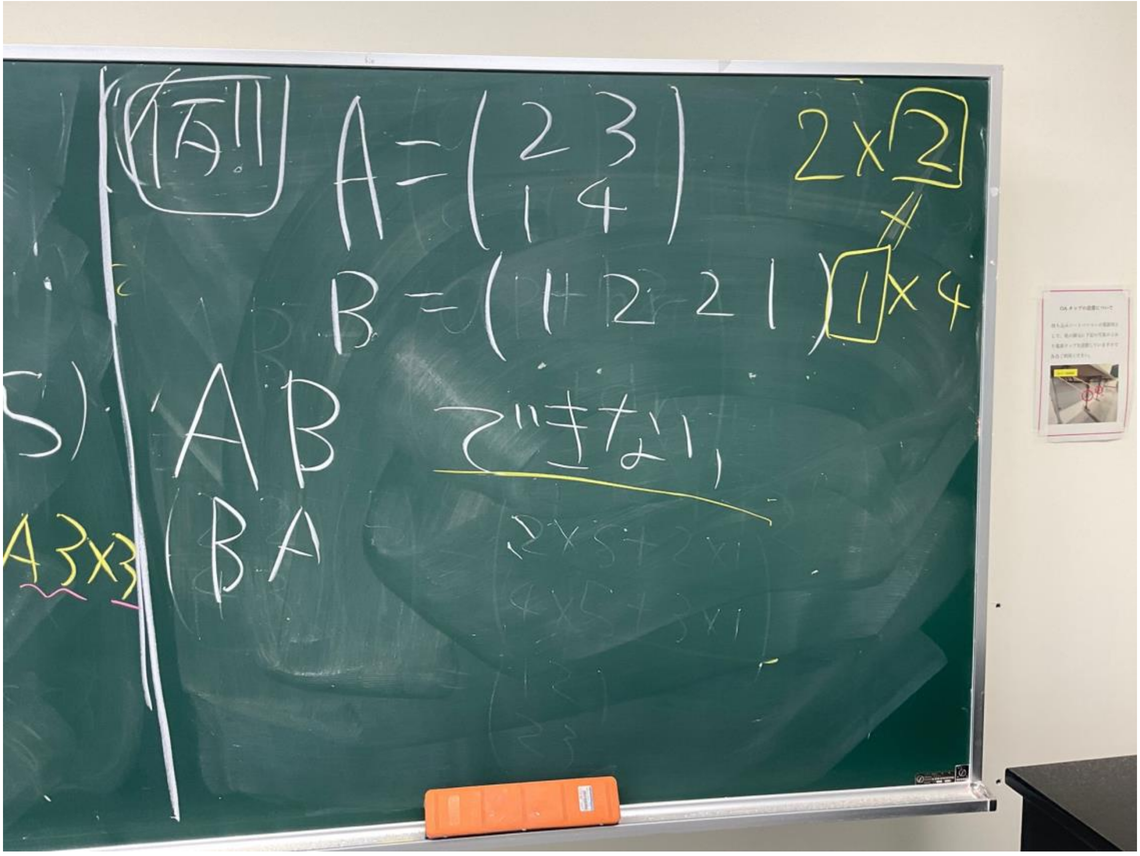

行列の積
定義
A … $m\times n$ 行列
B … $n\times \ell$ 行列
⟹ AB … $m\times \ell$ 行列 で
第(i,k)成分を $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ とする


例
A = (a b / c d)
B = (p / r)
AB = (ap+br / cp+dr)
(a,b)と(p,r)の内積
(c,d)と(p,r)の内積
(2 2 / 4 3)(5 / 1) = (2×5+2×1 / 4×5+3×1)
= (12 / 23)

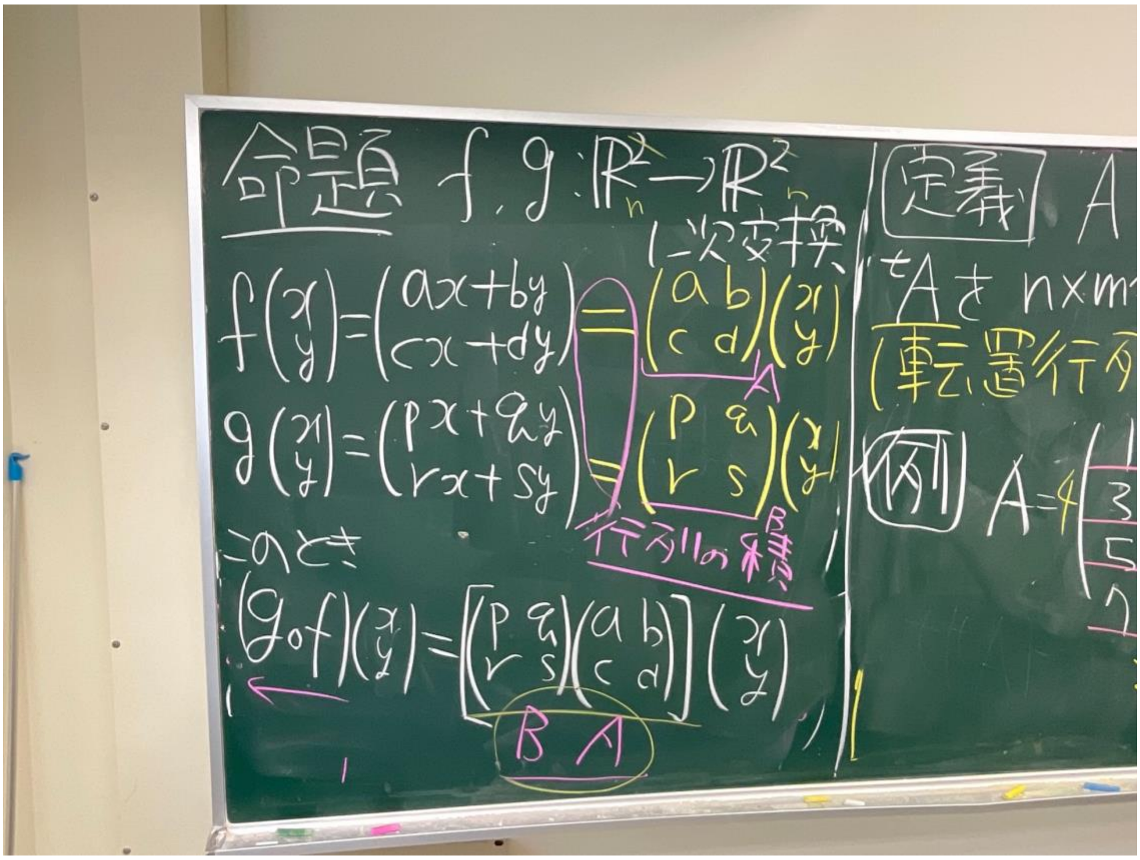

例
(a b / c d)(p q / r s)
= (ap+br aq+bs / cp+dr cq+ds)
(a b / c d)(p / r)
(a b / c d)(q / s)
A
B


例
(2 3 / 1 4)(5 2 / 2 3) = (2×5+3×2 2×2+3×3 / 1×5+4×2 1×2+4×3)
A B
= (16 13 / 13 14)
(5 2 / 2 3)(2 3 / 1 4) = (5×2+2×1 5×3+2×4 / 2×2+3×1 2×3+3×4)
B A
= (12 23 / 7 18)
AB≠BA

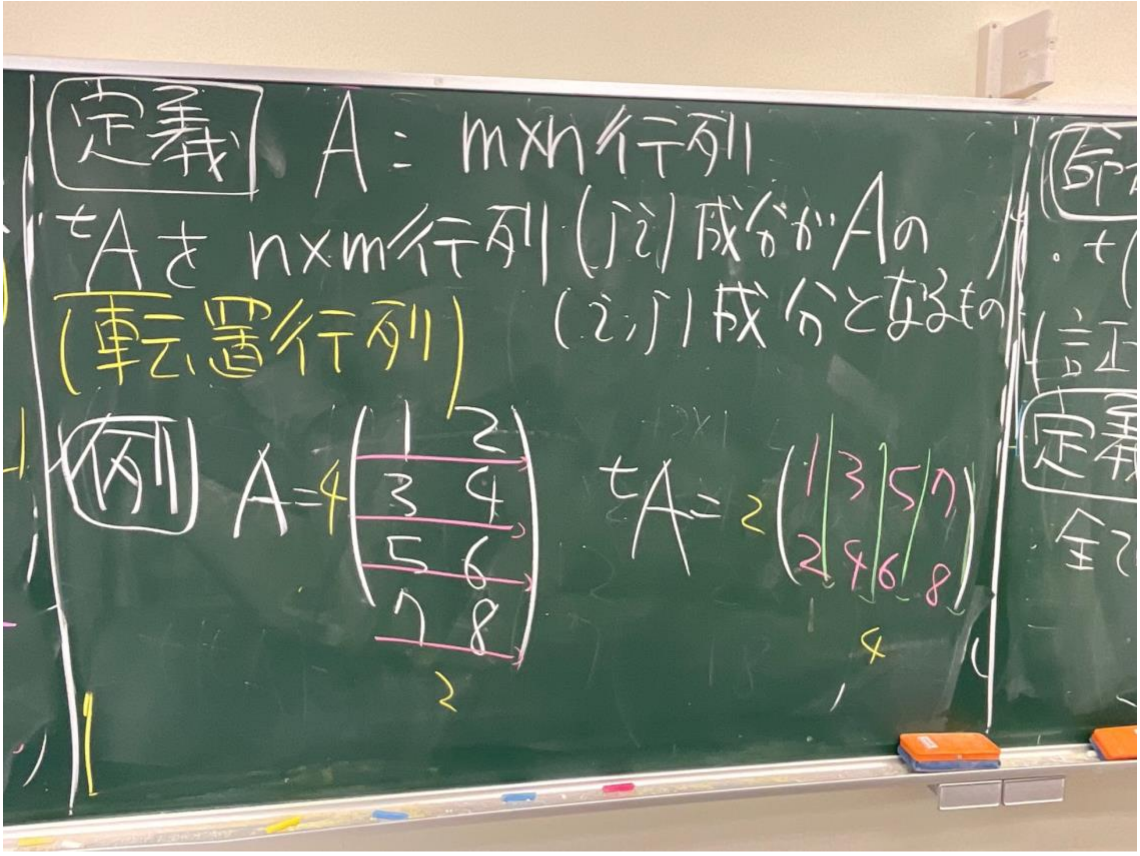

例
(1 2 3)(5 / 7 / 2)
A B
A 1×3
B 3×1
⇒ AB 1×1
= (1×5+2×7+3×2) = (25)
B 3×1
A 1×3 ⇒ BA 3×3
(5 / 7 / 2)(1 2 3)
= (5 10 15 / 7 14 21 / 2 4 6)

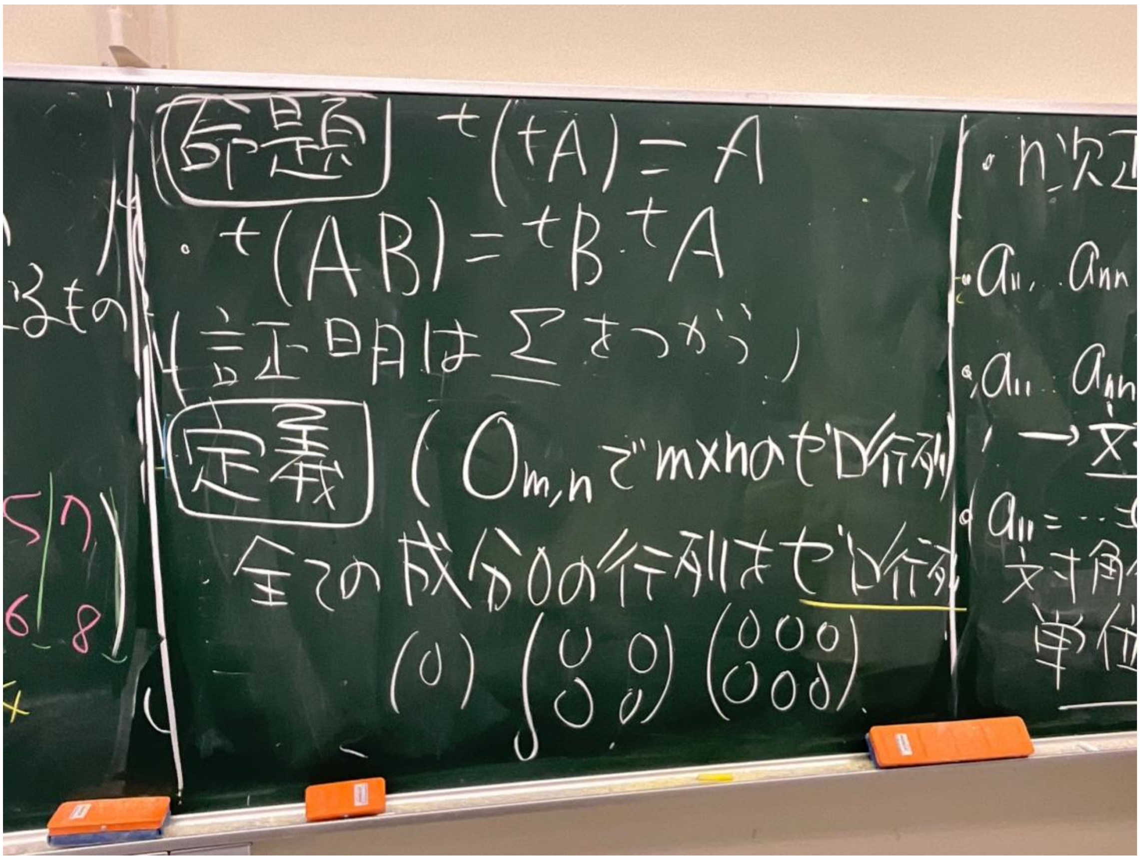


例
A = (2 3 / 1 4)
2×2
B = (1 2 2 1)
1×4
AB できない
BA
A 3×3



命題 f, g : R^n → R^n
1次変換
f(x y) = (ax+by / cx+dy) = (a b / c d)(x y)
A
g(x y) = (px+qy / rx+sy) = (p q / r s)(x y)
B
行列の積
このとき
(g∘f)(x y) = [(p q / r s)(a b / c d)](x y)
B A
定義
A
を A さ n×m
(転置行列
例
A =


定義 A : m×n 行列
tA を n×m 行列 (j,i) 成分が A の (i,j) 成分となるもの
(転置行列)
例 A = 4 (1 2 / 3 4 / 5 6 / 7 8) 2
tA = 2 (1 3 5 7 / 2 4 6 8) 4


命題 ・t(tA) = A
・t(AB) = tB tA
(証明は Σ をつかう)
定義 (O_{m,n} で m×n のゼロ行列)
全ての成分 0 の行列はゼロ行列
(0) (0 0 / 0 0) (0 0 0 / 0 0 0)

・n次正方行列で

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

・$a_{11} \ldots a_{nn}$ を対角成分

・$a_{11} \ldots a_{nn}$ 以外0の行列

→ 対角行列 → $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

・$a_{11} = \cdots = a_{nn} = 1$ なる対角行列を単位行列 → $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E_n とか I

・n次正方行列で

$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ となる行列 (上三角行列)

$(j < i) \Rightarrow a_{ij} = 0$ となる行列 (下三角行列)

上三角

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ & a_{22} & \cdots & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

・A

・AB

P.23

・$A^m = O$ となる行列を
べきゼロ行列(nilpotent)

・$AB = O$ かつ $A, B \neq O$ なる行列を
ゼロ因子(zero divisor)という

(P.23の(1)〜(7)
がみたされる)

定義 A n次正方行列で
あるn次正方行列Bで
$AB = BA = E_n$ となるとき

・Aを正則行列

・$B = A^{-1}$ Aの逆行列という

例11 $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ として，$B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とすると

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\times5+(-5)\times1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{E_2}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Aは正則で $B=A^{-1}$