2 行列 [教科書, 2 章]

2.0 数について

[教科書, 2.1 節] で次の記述がある.

> 本書で"数"というときは加減乗除が考えられる集合の元のことをさす. 専門用語でいう t, ある一つ決めた体 K を想定していて, 数とはその体 K の元を考えている. (中略) 本書における定理や証明などの議論は 1・7・8 章を除き (つまり 2-6 章) 任意の体 K で成り立つ.

この体 K についてもう少し深くみていく. なお 2-3 年の授業で詳しくやるので

> 現時点でわからなければ K は実数 (たまに有理数・複素数) と思って良い!

2.0.1 整数・有理数・実数などの略記に関して

以下次の略記をする.

- $\mathbb{N}$ 0 以上の整数の集合 (場合によっては自然数の集合ともいう). 英語の Natural number から.
- $\mathbb{Z}$ 整数の集合. ドイツ語の Zahlen(数) から.
- $\mathbb{Q}$ 有理数の集合. Quotient(商) から来ている
- $\mathbb{R}$ 実数の集合. 英語の Real number から.
- $\mathbb{C}$ 複素数の集合. 英語の Complex number から.

これらがどのように構成されるかは後で説明を加える.

2.0.2 環・体の定義

> **定義 37** (環 (ring)). 空でない集合 R について, 二項演算の加法 $+ : R \times R \to R$ と乗法 $\bullet : R \times R \to R$ があって以下の条件を満たすとき, R を環 (ring)という.
>
> 1. (和の交換法則) $a, b \in R$ について, $a + b = b + a$
> 2. (和の結合法則) $a, b, c \in R$ について, $(a + b) + c = a + (b + c)$
> 3. (ゼロ元の存在) ゼロ元と呼ばれる $0 \in R$ があって, 任意の $a \in R$ について, $a + 0 = 0 + a = a$
> 4. (和の逆元の存在) 任意の $a \in R$ について, ある $b \in R$ があって, $a + b = b + a = 0$. この b を $-a$ とかく.
> 5. (積の結合法則) $a, b, c \in R$ について, $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$
> 6. (単位元の存在) 単位元と呼ばれる $1 \in R$ があって, 任意の $a \in R$ について, $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$.

7. (分配法則) $a,b,c \in R$ について, $a \bullet (b+c) = a \bullet b + a \bullet c, (a+b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$

任意の $a,b \in \mathbb{R}$ について $a \bullet b = b \bullet a$ となる環を可換環 (commutative ring) といい, そうでない環を非可換環 (non-commutative ring) という.

例 38. 整数 $\mathbb{Z}$ は可換環である. 一方 0 以上の整数の集合 $\mathbb{N}$ は環ではない. (モノイドと呼ばれるものになる.)

例 39. 後にやる n 次正方行列は環の構造を持つ. (71 参照) $n \geq 2$ ならば非可換環である.

定義 40 (体 (field)). 環 K が次を満たすとき, 体 (field) という.

8. (積の交換法則) $a,b \in K$ について, $a \bullet b = b \bullet a$
9. (積の逆元の存在) 0 でない任意の $a \in K$ について, ある $b \in K$ があって, $a \bullet b = b \bullet a = 1$. この b を a^{-1} とかく.

2.0.3 体の例

例 41 (自明な体). $R = \{0\}$ として $+, \bullet$ を

$$0 + 0 = 0 \bullet 0 = 0$$

とすれば体となる. (が面白くないのでこれは考えないことが多い)

例 42. 有理数体 $\mathbb{Q}$, 実数体 $\mathbb{R}$, 複素数体 $\mathbb{C}$ は体である. 整数の集合 $\mathbb{Z}$ は体ではない.

例 43. $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ について, 加法 $+$ と乗法 $\bullet$ を次で定義する.

- $a,b \in \mathbb{F}_2$ について $a + b :=$ (a たす b を 2 で割ったあまり).
- $a,b \in \mathbb{F}_2$ について $a \bullet b :=$ (a かける b を 2 で割ったあまり).

これによって, $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ は体となる. 例えば $1^{-1} = -1 = 1$ である.

例 44. $\mathbb{F}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ について, 加法 $+$ と乗法 $\bullet$ を次で定義する.

- $a,b \in \mathbb{F}_5$ について $a + b :=$ (a たす b を 5 で割ったあまり).
- $a,b \in \mathbb{F}_5$ について $a \bullet b :=$ (a かける b を 5 で割ったあまり).

これによって, $\mathbb{F}_5$ は体となる.
例えば次がわかる.

$$-0 = 0, -1 = 4, -2 = 3, -3 = 2, -4 = 1$$
$$1^{-1} = 1, 2^{-1} = 3, 3^{-1} = 2, 4^{-1} = 4$$

例 45. 一般に素数 p について, $\mathbb{F}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ として, 加法 $+$ と乗法 $\bullet$ を次で定義する.

- $a, b \in \mathbb{F}_p$ について $a + b :=$ (a たす b を p で割ったあまり).
- $a, b \in \mathbb{F}_p$ について $a \bullet b :=$ (a かける b を p で割ったあまり).

これによって, $\mathbb{F}_p$ は体となる. この場合一番非自明なのは, a^{-1} の存在であるがそれは次のフェルマーの小定理からわかる.

定理 46 (フェルマーの小定理). p を素数とする. $1 \leq a \leq p-1$ となる整数について $a^{p-1} - 1$ は p で割り切れる. 特に a^{p-2} を p で割った余りが $\mathbb{F}_p$ における a の積の逆元である.

例 47. $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ について, 加法 $+$ と乗法 $\bullet$ を次で定義する.

- $a, b \in \mathbb{F}_4$ について $a + b :=$ (a 足す b を 4 で割ったあまり).
- $a, b \in \mathbb{F}_4$ について $a \bullet b :=$ (a かける b を 4 で割ったあまり).

しかし $\mathbb{F}_4$ は体にならない. 2 の積の逆元が存在しないためである.

2.0.4 実数の構成方法

自然数・整数・有理数・実数の構成は難しい. 尾畑伸明先生の 2022 年度解析学入門のノート 1

- https://www.math.is.tohoku.ac.jp/~obata/student/subject/TaikeiBook/Taikei-Book_15.pdf
- https://www.math.is.tohoku.ac.jp/~obata/student/subject/TaikeiBook/Taikei-Book_16.pdf

に詳細があるので気になる人は参照してほしい. (がそこまで重要ではない)

簡潔にまとめると次の通り.

- $\mathbb{N}$ の構成は, 集合論的に行う. ここが一番難しい. (学部でも習わないかも)
- $\mathbb{Z}$ の構成は, $\mathbb{N}$ がモノイドなので, 可換モノイドから群を作る方法 (グロタンディークの構成) を用いる. (学部でも習わないかも)
- $\mathbb{Q}$ の構成は, 環の局所化 (localization) を用いる. これは"分数"の一般化である (学部 3 年に習う)
- $\mathbb{R}$ の構成は, 距離空間の完備化を用いる. (学部 2 年に習う) より詳しくいうと $\mathbb{Q}$ の距離を

  $$d(a, b) := |a - b|$$

  と定義したときの完備化として $\mathbb{R}$ は特徴づけられる.

- $\mathbb{C}$ の構成は, $\mathbb{R}$ の代数的閉包をとる. (学部 3 年に習う) $\mathbb{R}$ を含む体 K で次を満たすものとして特徴づけられる.
  - (代数拡大) 任意の $\alpha \in K$ について, $\mathbb{R}$ 係数の多項式 $f(x)$ があって, $f(\alpha) = 0$
  - (代数的に閉じている) K 係数多項式 $g(x)$ について, ある $\gamma \in K$ があって $g(\gamma) = 0$

  2 個めに関しては代数学の基本定理とも呼ばれる. この証明は 2 年の複素解析で習う.

この構成から外れた体もいっぱいある. 例えば $\mathbb{Q}$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ なども考えられる.(代数的数・超越数はここの話.) また $\mathbb{Q}$ に p 進距離 $d_p(\bullet, \bullet)$ を入れた完備化 $\mathbb{Q}_p$ もある.

環　　　　　　　　体

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "局所化"] & \mathbb{Q} \arrow[r, "完備化"] \arrow[rrd, "代数閉包"] \arrow[rdd, "p\text{ 進完備化}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "代数閉包"] & \mathbb{C} \\
 & & & & \overline{\mathbb{Q}} \\
 & & & \mathbb{Q}_p \arrow[r, "代数閉包"] & \overline{\mathbb{Q}_p}
\end{tikzcd}
$$

問題 1. 「x 軸に関しての鏡映 (折り返し) を行い, $\frac{3}{4}\pi(=135$ 度$)$ 反時計回りに回転する」1 次変換求めよ.

問題 2. 「x 軸に関しての鏡映 (折り返し) を行い, $\frac{3}{4}\pi(=135$ 度$)$ 反時計回りに回転し, さらに x 軸に関しての鏡映 (反転) を行う」1 次変換を求めよ . またその変換は θ 反時計回りの変換に等しいが, その θ を求めよ. ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ とする.

問題 3. 回転や鏡映は内積を変えないことを示せ, つまり f を回転や鏡映とするとき, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ について以下が成り立つことを示せ.

$$(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

問題 4. 上の問題において, 逆は成り立つか？ つまり 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ について

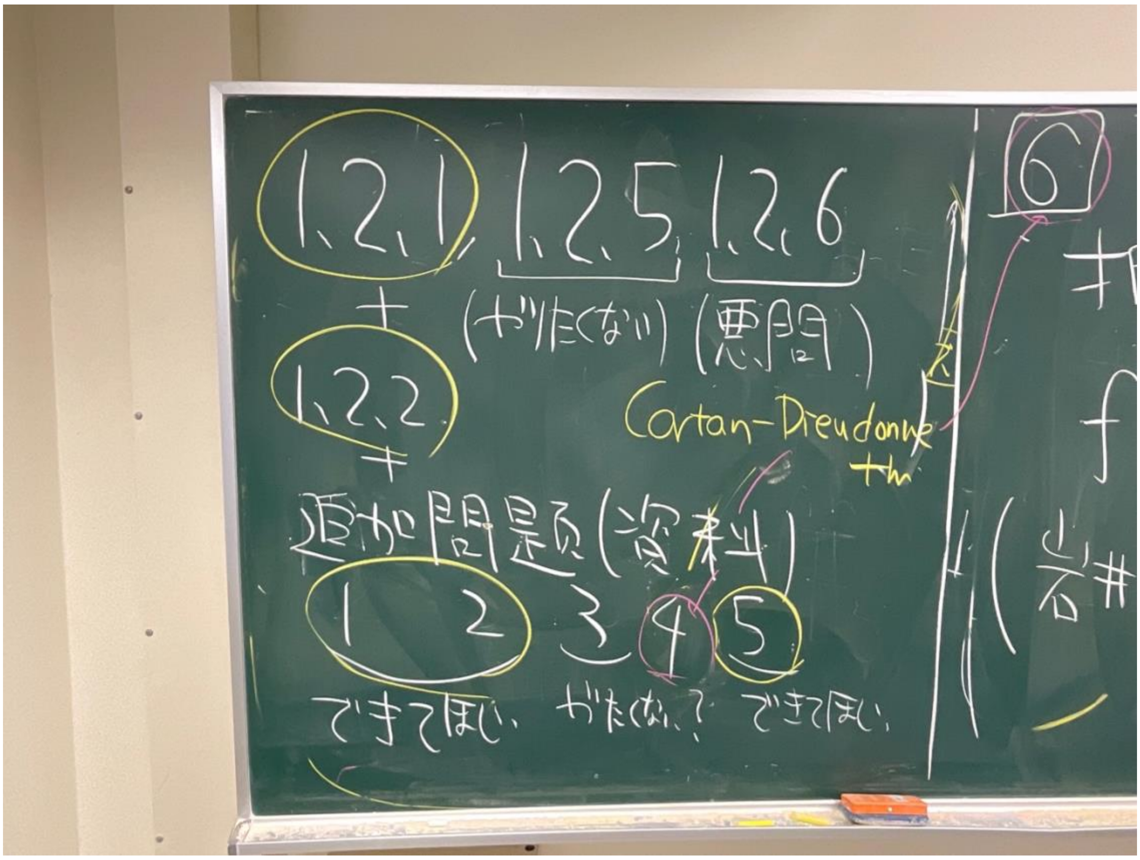
$$(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

が成り立つ変換は, 回転や鏡映 $f_1, \ldots, f_l$ を用いて, $f = f_r \circ \cdots \circ f_1$ となるか?(なお岩井は答えを知らない)

問題 5. $\mathbb{F}_7 = \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$ として, 加法 $+$ と乗法 $\bullet$ を次で定義する.

- $a, b \in \mathbb{F}_7$ について $a + b :=$ (a たす b を 7 で割ったあまり).
- $a, b \in \mathbb{F}_p$ について $a \bullet b :=$ (a かける b を 7 で割ったあまり).

(これによって $\mathbb{F}_7$ は体となる) $a = 1, 2, \ldots, 6$ について $\mathbb{F}_7$ での $-a, a^{-1}$ をそれぞれ求めよ.



1.2.1, 1.2.5, 1.2.6
+
(やりたくない)
(悪問)
1.2.2
+
追加問題(資料)
1 2 3 4 5
できてほしい
かたくない?
できてほしい
Cartan-Dieudonne thm
6

⑥ 回転 f は

折り返しへんかん $f_1, \ldots, f_r$ を用いて

$$f = f_r \circ \cdots \circ f_1$$ とかけるか？

(岩井もしらん) (ヒント $y=mx$ のおりかえし(け), $m=\tan\frac{\theta}{2}$ を代入する)

AtCoder

---

① (1) × (反例はぐたいれいでおk?)

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

よって①がみたされない

$$\boxed{(\ f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})\ )}$$

(2), (3) ○ 1次変換だから

(①, ②の条件をたしかめてもいい)

15.2 $f^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{1\times4-2\times3}\begin{pmatrix}4x-2y\\-3x+y\end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4x-2y\\-3x+y\end{pmatrix}$

15.5 $\vec{u}=(1,2,3)$

$(\vec{u}\cdot\vec{u})=14$ $\quad \vec{u}\,\vec{x} = (x+2y+3z)$

$f(\vec{u}) = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \frac{2}{14}(x+2y+3z)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix}x+2y+3z\\2x+4y+6z\\3x+6y+9z\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\frac{6}{7}x & -\frac{2}{7}y & -\frac{3}{7}z\\ -\frac{2}{7}x & \frac{3}{7}y & -\frac{6}{7}z\\ -\frac{3}{7}x & -\frac{6}{7}y & -\frac{2}{7}z\end{pmatrix}$

[1] $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $\quad f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$ 鏡映

$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\cos\frac{3}{4}\pi)x-(\sin\frac{3}{4}\pi)y\\(\sin\frac{3}{4}\pi)x+(\cos\frac{3}{4}\pi)y\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}x-\frac{\sqrt2}{2}y\\\frac{\sqrt2}{2}x-\frac{\sqrt2}{2}y\end{pmatrix}$

135
反が[illegible]し

$\therefore\ g\circ f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\end{pmatrix}$ ■

(2) $f\circ g\circ f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}(\cos\frac{5}{4}\pi)x - (\sin\frac{5}{4}\pi)y\\ \sin(\frac{5}{4}\pi)x + (\cos\frac{5}{4}\pi)y\end{pmatrix}$

$\theta = \frac{5}{4}\pi$

$2\pi - \alpha$

$\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi = 2\pi$

α $\quad$ $2\pi - \alpha$

鏡映

135 α

反かてし

---

⑤ $F_7\ \{0,1,2,3,4,5,6\}$ $\quad F_7$

(10^9+7)

$6+1=0 \Rightarrow -6\equiv 1,\ -1=6$ (mod 7) ④

$5+2=0 \Rightarrow -5=2\quad -2=5$

$4+3=0 \Rightarrow -3=4\quad -4=3$

フェルマー

$2^6 \equiv 1 \mod 7$ $\qquad 2^{-1}$ in F_7

$\Rightarrow \boxed{2^5}\cdot\boxed{2} \equiv 1 \Rightarrow$ (2^5の7のあまり) $= 4$

mod 7 F_7

($2\times 4\equiv 1$ なる4が 2^{-1})

るか?

おりかえし

代入する

3^{-1}

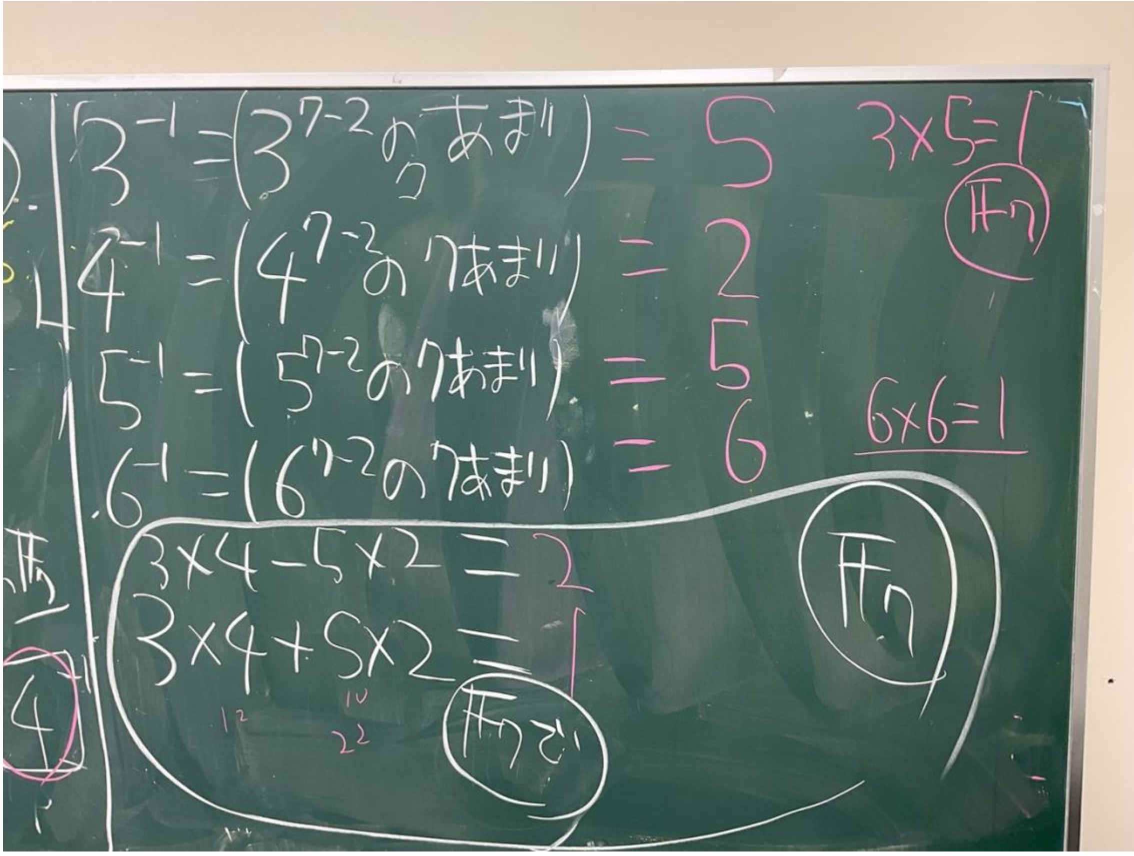
4^{-1}

5^{-1}

6^{-1}

$3x$

$3x$



$3^{-1}=(3^{7-2}$の7あまり$)=5$
$3\times5=1$
$4^{-1}=(4^{7-2}$の7あまり$)=2$
$5^{-1}=(5^{7-2}$の7あまり$)=5$
$6\times6=1$
$6^{-1}=(6^{7-2}$の7あまり$)=6$
$3\times4-5\times2=2$
$3\times4+5\times2=1$
12
10
22