次回 5/17

逆写像 $f: S \to S'$

$g: S' \to S$

$g \circ f = id_S,\ f \circ g = id_{S'}$

このとき g は f の逆写像といい、

$g = f^{-1}$ とかく。

P.8 定義 (1次変換)

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \end{pmatrix}$

補足 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると (行列)

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とかける (行列の積)

命題 f, g を $\mathbb{R}^2$ の1次変換とする

① (命題 1.2.1) $f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

② 〃 : 1.2.2) $g\circ f$ も1次変換

証 ① $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$　$g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}px+qy\\rx+sy\end{pmatrix}$ とおく

$f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \overset{(定義)}{=} \begin{pmatrix} a\times0+b\times0 \\ c\times0+d\times0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

② $g\circ f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} g\left(f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$

$\overset{f\text{のdef}}{=} g\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$

$\overset{\times}{=} \begin{pmatrix} p\boxed{(ax+by)}+q\boxed{(cx+dy)} \\ r(ax+by)+s(cx+dy)\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (ap+cq)x + (bp+dq)y \\ (ar+cs)x + (br+cs)y \end{pmatrix}$$

$ap+cq,\ bp+dq,\ ar+cs,\ br+cs$

が実数より1次変数 □

補 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ap+cq & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix} //$$

命題 1.2.3 $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ とする

A: f が逆変換をもつ 必要十分条件は

B: $\boxed{ad-bc \neq 0}$ で このとき

$$f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\boxed{ad-bc}} \begin{pmatrix} dx-by \\ -cx+ay \end{pmatrix}$$

(3章) 行列式 detA と (逆行列)

補足 示すことは $A \Rightarrow B$ かつ $B \Rightarrow A$

$(A \Leftrightarrow B)$　　(ならば)

今回 $B \Rightarrow A$ と Bでない $\Rightarrow$ Aでない を示す

$\boxed{\text{証}}$ $(B \Rightarrow A)$

$ad-bc \neq 0$ とする

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} dx - by \\ -cx + ay \end{pmatrix}$$ とする

これが $g \circ f = f \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$ をみたす

$$g \circ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d(ax+by) - b(cx+dy) \\ -c(ax+by) + a(cx+dy) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} (ad-bc)x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + (ad-bc)y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = id_{\mathbb{R}^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$. ($f \circ g$ も同じ)

②（Bでない $\Longrightarrow$ Aでない）

$ad-bc=0$ とする。

f が逆変換 f^{-1} をもつと仮定して矛盾を示す。

$f^{-1}\circ f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ (☆) である

① $a=b=c=d=0$ のとき

このとき $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ となる。

よって $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\overset{(\star)}{=}f^{-1}\circ f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=f^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=f^{-1}\circ f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\overset{\star}{=}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

よって $1=0$ となり矛盾。

② $c\neq0$ または $d\neq0$ のとき

$f\begin{pmatrix}d\\-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ad-bc\\cd-dc\end{pmatrix}\underset{\text{Bでない}}{=}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

よって $\begin{pmatrix}d\\-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ となり矛盾

③ $a\neq0$ または $b\neq0$ のとき同様にしてできた。

補足 $\mathbb{R}^3$のときも同様のことが成立
(命題1.2.5)

$\boxed{\text{例}}$ 引き伸ばし変換

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\dy\end{pmatrix}$$

$a\neq0$かつ$d\neq0$
(1次変換)

逆 $f^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{-1}x\\d^{-1}y\end{pmatrix}$

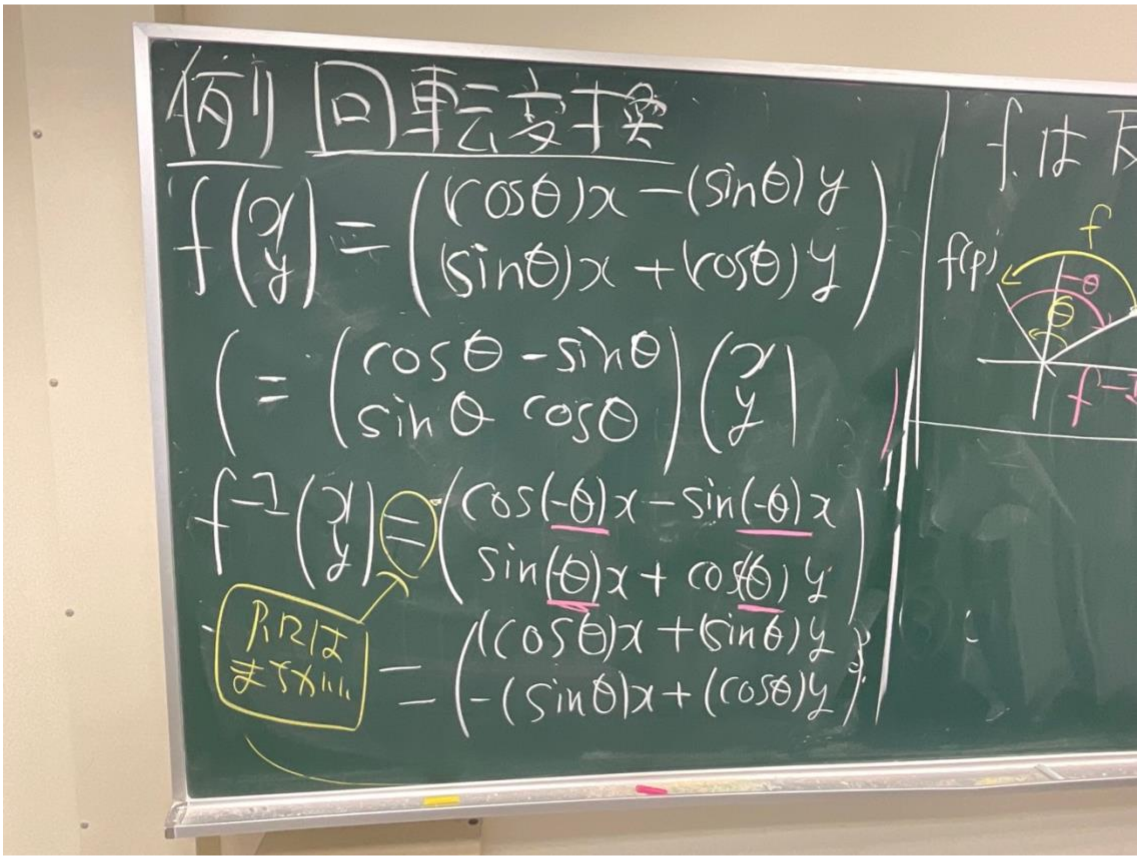
170cm

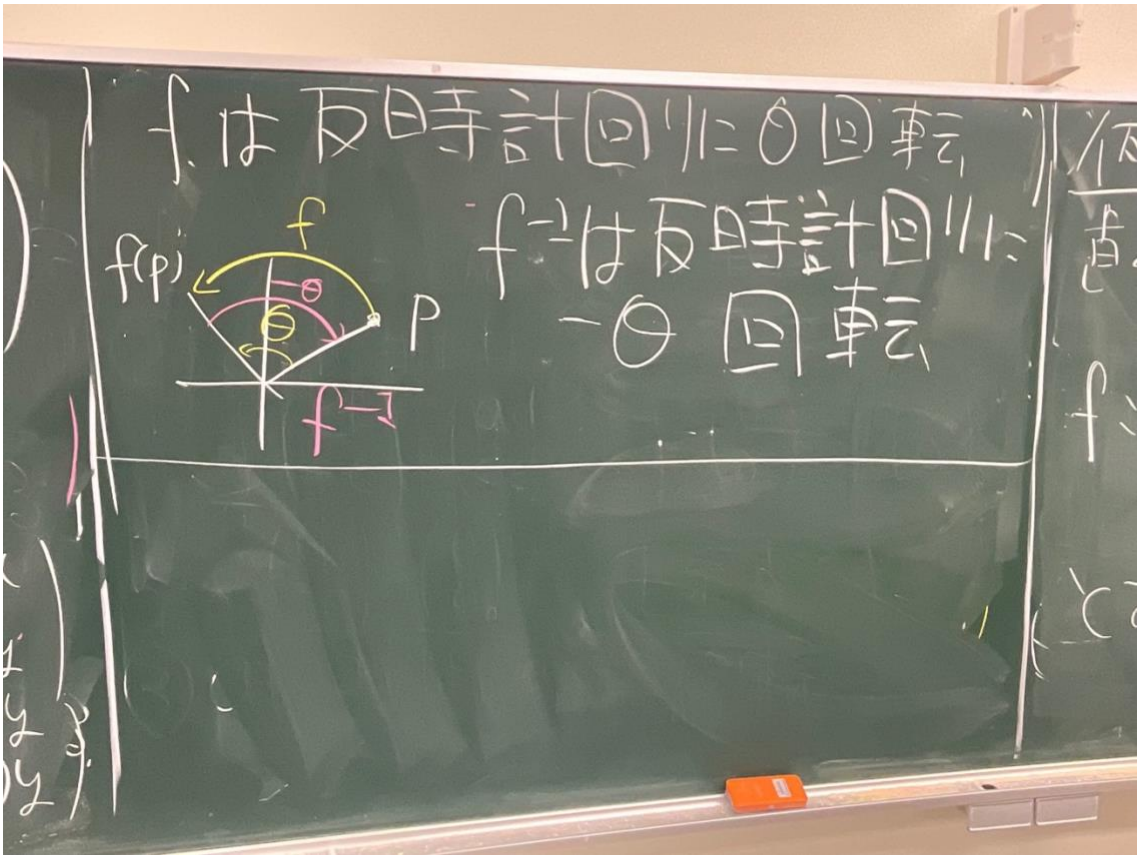
$a=2$ $d=\frac{1}{2}$

例 斜倒変換

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+by\\y\end{pmatrix}\underbrace{\left(=\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)}_{\text{行列の積}}$$

$$f^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\underset{(1.2.3)}{=}\begin{pmatrix}x-by\\y\end{pmatrix}$$


例 回転変換
$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\cos\theta)x-(\sin\theta)y\\(\sin\theta)x+(\cos\theta)y\end{pmatrix}$
$\left(=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$
$f^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(-\theta)x-\sin(-\theta)x\\ \sin(-\theta)x+\cos(-\theta)y\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}(\cos\theta)x+(\sin\theta)y\\-(\sin\theta)x+(\cos\theta)y\end{pmatrix}$
ここはまちがい


fは反時計回りにθ回転
f^{-1}は反時計回りに
$-\theta$ 回転
f(p)
f
θ
−θ
P
f^{-1}

例 折返し変換（鏡映）

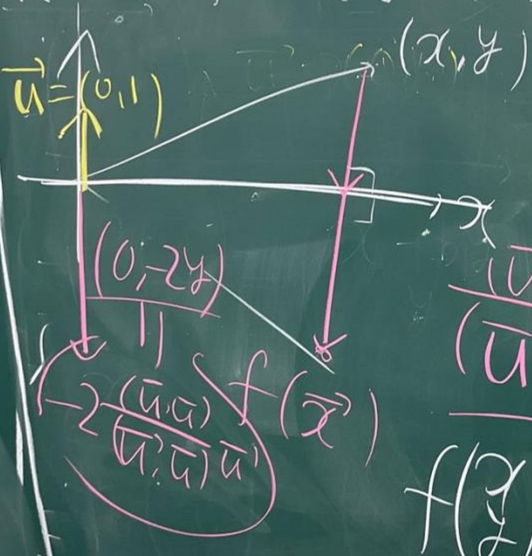
直線 ℓ の法線ベクトルを $\vec{u}$ とする

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\vec{x} \longmapsto \vec{x} - 2\dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{x})}{(\vec{u},\vec{u})}\vec{u}$

とすると1次変換になる（後で）

ℓ = x軸（y=0）



$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$(\vec{u}\cdot\vec{u}) = 1$

$(\vec{u}\cdot\vec{x}) = y$

$\dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{x})}{(\vec{u}\cdot\vec{u})}\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

特に $l: y = mx$ のとき

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}y \\ \frac{2m}{1+m^2}x - \frac{1-m^2}{1+m^2}y \end{pmatrix}$$

$(\vec{n} = (m, -1))$

l: y軸 $(x=0)$ $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

$f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ より $f^{-1} = f$

命題 1.2.4' 岩澤分解

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が正変換をもつとき

$(ad - bc \neq 0)$

$$f = \underline{f_3} \circ \underline{f_1} \circ \underline{f_2}$$

回転・引きのばし・斜倒

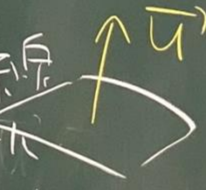
(直交行列) × (対角行列) × (上三角行列)

$\mathbb{R}^3$の場合

① 回転 引きのばし (P.13)

② 折り返し.

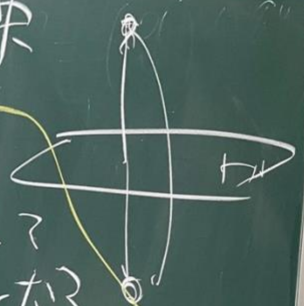
H：平面 $\subset \mathbb{R}^3$, $\vec{u}$ 法線ベクトル



$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\vec{x} \longmapsto \vec{x} - 2\dfrac{(\vec{u},\vec{x})}{(\vec{u},\vec{u})}\vec{u}$

Hを鏡とした鏡映



定義 fを1次変換として

$f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{v})$となる

λ実数を固有値といい

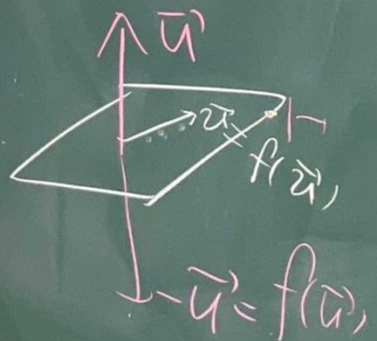
$\vec{v}$を固有ベクトルという

(後期でやる)

③ 鏡映

$f(\vec{u}) = -\vec{u}$ ← 固有値 -1

$\vec{v} \in H$ なら $f(\vec{v}) = \vec{v}$



P.16 定義 線形変換（後期でもやる）

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が線形変換とは

① $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$　$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$

② $f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$　$\lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$

をみたすこと．

定理1.2.6 fが一次変換であること(A)と

(1) fが線形変換である(B)

ことは同値

証明 A$\Rightarrow$B かつ B$\Rightarrow$A を示す。

A$\Rightarrow$B fを一次変換とする

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ ax+dy \end{pmatrix}$$ とおける

$\vec{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$として、

(i) $$f(\vec{u}+\vec{v}) = f\left(\begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}\right)$$

fのていぎ

$$= \begin{pmatrix} a(x+z)+b(y+w) \\ c(x+z)+d(y+w) \end{pmatrix}$$

和をばらす

$$= \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} az+bw \\ cz+dw \end{pmatrix}$$

$$= f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = f(\vec{u})+f(\vec{v})$$ //

② $f(\lambda\vec{u}) = f\begin{pmatrix}\lambda x\\ \lambda y\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a(\lambda x)+b(\lambda y) \\ c(\lambda x)+d(\lambda y)\end{pmatrix}$

$= \lambda\begin{pmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$= \lambda f(\vec{u})$

よって①と②をみたすので、

線形変換である

線形変換 $\Longrightarrow$ 1次変換

fが線形とする

$f\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ r\end{pmatrix}$　$f\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q\\ s\end{pmatrix}$ とする ☆ ①

$f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}px+qy\\ rx+sy\end{pmatrix}$ であることを示す ②

1次変換

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = f\left(\underbrace{x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{u}} + \underbrace{y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v}}\right)$$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$

① $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

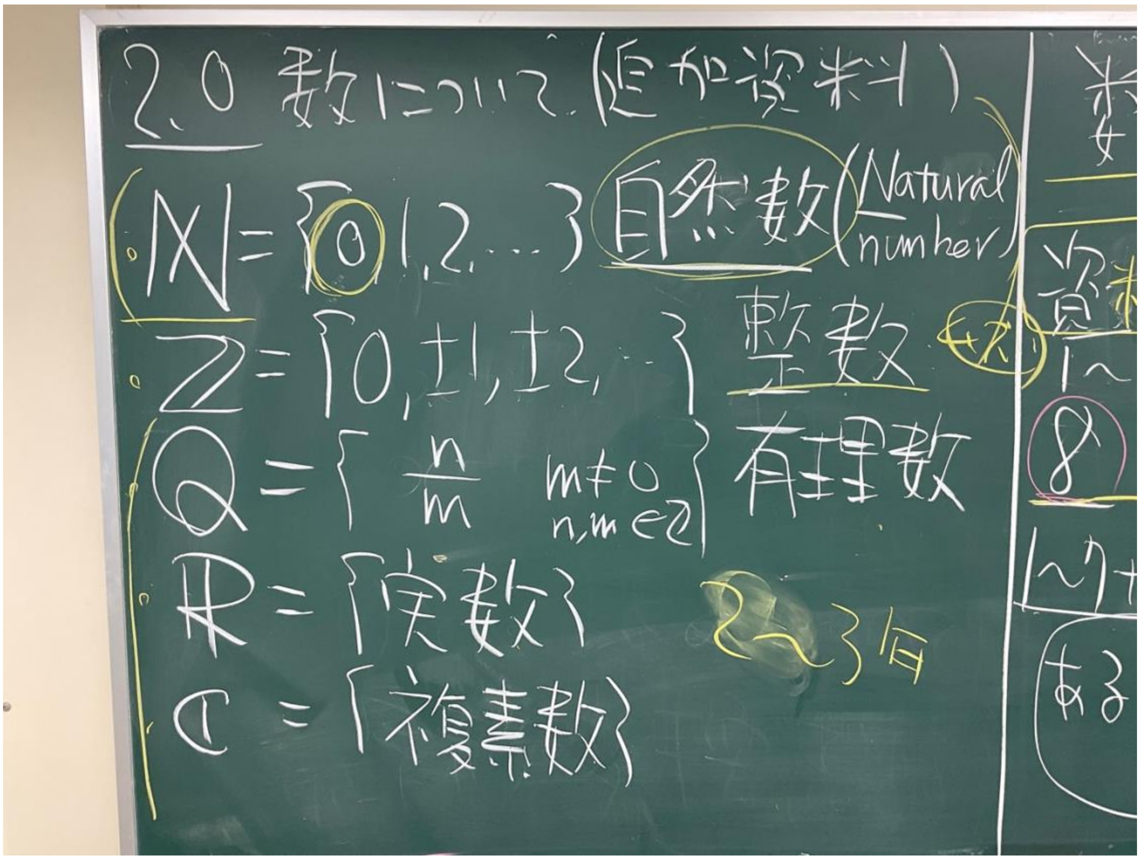
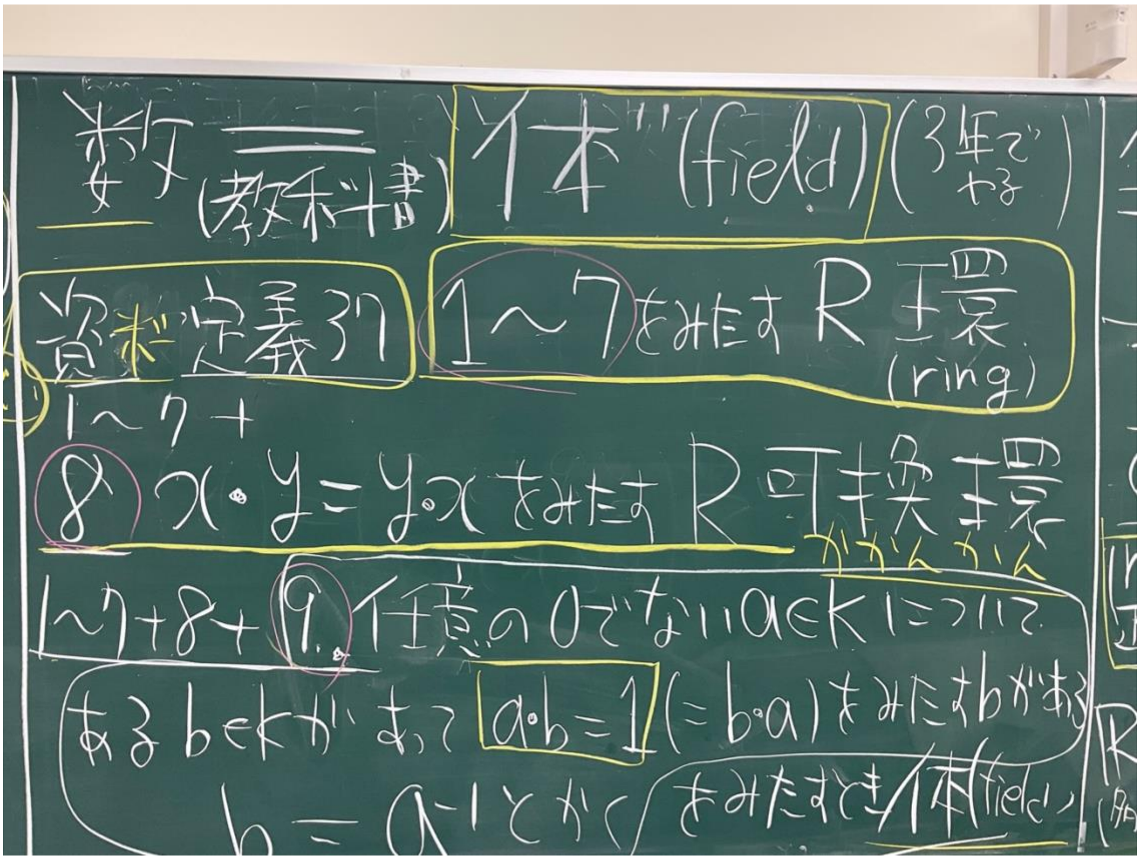
$$= f\left(\underbrace{x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\lambda\vec{u}}\right) + f\left(\underbrace{y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\lambda\vec{u}\text{の形}}\right)$$

② $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$

$$= x\, f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\cdot f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

☆ 仮定

$$= x\begin{pmatrix}p\\r\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}q\\s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}px+qy\\rx+sy\end{pmatrix}$$


2.0 数について(追加資料)
N = {0, 1, 2, …} 自然数 (Natural number)
Z = {0, ±1, ±2, …} 整数
Q = { n/m m≠0 n,m∈Z } 有理数
R = {実数}
2〜3回
C = {複素数}

数 (教科書)
体 (field)
(3年でやる)
資料定義37
1〜7をみたす R 環 (ring)
1〜7 +
8 x・y = y・x をみたす R 可換環
かかんかん
1〜7+8+ 9. 任意の0でないa∈Kについて
あるb∈Kがあって a・b=1 (= b・a) をみたすbがある
b = a⁻¹とかく
をみたすとき 体(field)

例	環	可換環	体
$\mathbb{N}$	× (1〜7) 4がダメ (−1)	× (1〜8)	× (1〜9)
$\mathbb{Z}$	○	○ $2\times3=3\times2$	× 9がダメ $a=2,\ \frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q},\mathbb{C},\mathbb{R}$	○	○	○
n次正方行列 ($n\geq2$)	○	×	×
$\mathbb{R}[X]$ (多項式)	○	○	×

$\boxed{例}$ $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$ について

$a+b=$ ($a+b$ を2でわったあまり)

$a\cdot b=$ ($a\times b$ を2でわったあまり)

「体」 $(-1)=1$, $1^{-1}=1$ ($1+1=0$ in $\mathbb{F}_2$)

例 $\mathbb{F}_5=\{0,1,2,3,4\}$ について

$a+b=$ ($a+b$ を5でわったあまり)

$a\cdot b=$ ($a\times b$ を5でわったあまり)

体

$\mathbb{F}_5$ において

$\underbrace{2}_{a} \circ \underbrace{3}_{b} =$ (2×3を5でわったあまり)

$=$ (6を5でわったあまり)

$= \underline{1}$

$\therefore\ \underline{2^{-1} = 3}$, $3^{-1} = 2$ (in $\mathbb{F}_5$)

$(a^{-1} = b)$

$4 \circ 4 =$ (4×4を5でわったあまり)

$= 1$ $\quad (16 = 3\times 5 + \underline{1})$

$4^{-1} = 4$ in $\mathbb{F}_5$ $\quad (4^3 \times 4 = 4^4 = 1)$

$\equiv$ (mod 5で考えることに同じ)

例 p 素数について (4本)

$\mathbb{F}_p = \{0,1,2,\dots,p-1\}$ として…

$a+b=$ ($a+b$ を p でわったあまり)

$a\cdot b=$ ($a\times b$ を p でわったあまり)

定理 (フェルマーの小定理)

$1\le a\le p-1,\ a\in\mathbb{F}_p$ について

$a^{p-1}-1$ は p でわりきれる。とくに $a^{p-2}=a^{-1}$ in $\mathbb{F}_p$

$\mathbb{N}\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}\to\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

やらない (ムズい)

3年 局所化

2年 距離の完備化

3年 代数閉包

$\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7$

$\mathbb{Q}\xrightarrow{\text{代数閉包}}\overline{\mathbb{Q}}$ (代数的数

(p進距離の完備化) $\to\mathbb{Q}_p\to\overline{\mathbb{Q}_p}$ に

1.2.1

1.2.5, 6.2.6 (1.2) p.17

問1–5