

7/23(木)休講

7/30(木)試験+レポート

前回 余因子展開

余因子行列 $\hat{A}$

$$A\hat{A} = \hat{A}A = (\det A)E_n$$

ヴァン
デル
モント
の行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

ヴァンデルモントの行列式

定理 3.5.2

(Vandermonde)

1735-1796

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

($a_1, \dots, a_n \in K$ 体)

$$\begin{array}{l}
 n=3 \\
 \left| \begin{array}{cc} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{array} \right| = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \times (a_3 - a_2) \\
 \text{証明 } K = \mathbb{R} (\mathbb{Q}, \mathbb{C} \text{ とか}) \\
 K[x] = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^k \mid a_k \in K \right\} \\
 \text{多項式環}
 \end{array}$$

$f(x)$
 定義

$$\begin{array}{l}
 a_1) (x^2 + 1, \pi x^3 + x \in \mathbb{R}[x]) \\
 f(x) \quad x \text{ に関する多項式} \\
 \text{定義} \quad \left| \begin{array}{cccc} x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$f(a_2) = 0$$

$$\therefore f(a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & a_3 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

よ、因数定理より (定理 3.2.2)

$f(x)$ は $(x - a_2)$ で割りきれ

$$f(x) = (x - a_2) g_2(x) \text{ と } n+2$$

同様にして $f(a_3) = \cdots = f(a_n) = 0$ より

$$f(x) = \prod_{i=2}^n (x - a_i) \cdot g(x) \text{ と } n+3$$

$\Downarrow$

$g(x)$ は定数

$\Downarrow$

$g(x)$ は定数

$g(x)$ は定数で x^{n-1} 次の
 係数は **余因子展開** から

$$\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$
 である
 または 帰納法に依る

(K) 体 $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_n, \dots)$
 $K[x] = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^k \mid a_k \in K \right\}$
 K 係数多項式環
 例 $\mathbb{Q}[x] \ni x^2 + 3$
 $\nexists \pi x^3 - 2$

定理 (因数定理)

$f(x) \in K[x]$, $a \in K$ について

$f(a) = 0$ ならば

$f(x)$ は $(x-a)$ で割り切れる

つまり $f(x) = (x-a)g(x)$

となる $g(x) \in K[x]$ が存在する

定義 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$
 $\in K[x]$

について $a_0 \neq 0$ とする

このとき $\deg(f) = n$ とする。(次数)

定理 A $\Rightarrow$ 因数定理 (a を代入して)

① $g(x) = x - a$ とおくと

$\deg g(x) = 1 > \deg r(x) = 0$ (つまり)

定理 A

$f(x), g(x) \in K[x], g(x) \neq 0$

なすある $q(x), r(x) \in K[x]$
が、
① $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$

② $\deg r(x) < \deg g(x)$

証明 $f(x) = a_0x^n + (a_1x^{n-1} + \dots + a_n)$

$g(x) = b_0x^m + (b_1x^{m-1} + \dots + b_m)$

$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ とする

$n < m$ なら $g(x) = 0, r(x) = f(x)$
とすればよい

~~定理 A~~ 定義 (ユークリッド環)
 環 A がユークリッド環とは
 $\deg: A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0$ があって
 $f, g \in A, g \neq 0$ ならば $\exists r \in A$
 ① $f = gq + r$
 ② $\deg g > \deg r$ となる q, r

定理 A から
 K が体ならば $K[x]$ はユークリッド
 環である
 (A 環 $\Rightarrow A[x]$ 環)
 (ネーター) (ヒルベルト
 基底定理) (ネーター)
 (5年前の前期にやるので是非(みに))

定理(例3.5.3)

$a_1, \dots, a_n \in K$ を相異なる
数とする

$b_1, \dots, b_n \in K$ とする

のとき $n-1$ 次多項式

$$f(x) = C_0 + C_1 x + \dots + C_{n-1} x^{n-1}$$

が $f(a_i) = b_i$ (なるものがたまたま) 存在する

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Q}$
 $\Rightarrow f(x) \in \mathbb{Q}[x], f(a_i) = b_i$

$\boxed{\text{証}} \quad f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C_0 + C_1 \underline{a_1} + C_2 \underline{a_1}^2 + \dots + C_{n-1} \underline{a_1}^{n-1} = b_1 \\ C_0 + C_1 \underline{a_2} + C_2 \underline{a_2}^2 + \dots + C_{n-1} \underline{a_2}^{n-1} = b_2 \\ \vdots \\ C_0 + C_1 \underline{a_n} + C_2 \underline{a_n}^2 + \dots + C_{n-1} \underline{a_n}^{n-1} = b_n \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{VH}} \quad \text{かえ}$
 $\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{A: n \times n \text{ 行列}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$
 $\Rightarrow A \text{ が正則} \Rightarrow A\vec{x} = \vec{b} \text{ の解がただ1つ}$
 (第8回ゼミ(1))

よって A が正則を示す。

$$\det A = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \neq 0$$

(定理 5.2)
 $a_i \neq a_j$
 相異なる
 10個

よって $\det A \neq 0$
 $\Rightarrow A$ が正則はいえた。

定理 3.54 $n \times n$ の公式

(Cramer)

A は n -次正則行列

$$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \text{ と } \vec{a}_i \in K^n$$

$A\vec{x} = \vec{b}$ の解は

$$x_i = \left(\frac{1}{\det A} \right) \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_{i-1} & \vec{b} & \vec{a}_{i+1} & \dots & \vec{a}_n \end{pmatrix}$$

例 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \text{ の解}$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}{\det A}$$

$\vec{b} = A\vec{x}$
 $= x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2$

$\underline{\text{証明}}$ かんたんのため $i=1$ とする

$$\left(\frac{1}{\det A} \right) \times \det \left(\vec{b} \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n \right) \quad (\text{定理 2.2.1})$$

$$\frac{1}{\det A} \left(\sum_{k=1}^n x_k \vec{a}_k, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \right)$$

$\vec{b} = A\vec{x}$
 $= x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n$

$$\frac{1}{\det A} x_1 \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = x_1 \det A = x_1$$

$$+ \frac{1}{\det A} \sum_{k=2}^n x_k \det(\vec{a}_k, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = 0 \quad (\text{定理 2.2.2})$$

$$= x_1$$