

2026 年度春夏学期 線形代数学・同演義 I 期末試験 講評

全体の講評

レポート問題からの問題は第 1~4 問です. 各問題の正答率は以下の通りです.

問	1	2	3	4	5	6	7	8	表面	裏面
正答率	91.7%	81.3%	85.4%	92.7%	77.8%	51.6%	30.7%	5.2%	89.3%	51.9%

裏面に部分点を設けた結果, 中間試験よりもできていました.

また試験を受けた人全員に単位を認定しております. 最終的な成績の平均点は 79.3 点です. また半分以上になるように設定しております.

表面 (第 1~4 問) の出来に関して

- 中間レポート 2 でやった内容だったのでほぼみんなできていました.
- ただ 1 問目で計算ミスと思えないミスをしている人がまだいました. 間違えた人は要復習です.
- 表面は減点法で採点しています.

裏面 (第 5~8 問) の出来に関して

- 大問 6~8 は chatGPT が作った問題です. 難しい問題を 60 問作成してもらいその中から選びました. また簡単になるように小問を入れました.
- 大問 5 は”部分点を与える”の部分が大きなヒントになっております. おそらくこの文がなければもっと正答率は低かったと思います. 因数定理を使っても証明できます.
- 大問 6 は (1) がヒントになります. chatGPT が作問した際にはなかったです. ただ (1) がないと難易度が大きく上がると思います. (2) は (1) に $\tilde{A}$ をかけるだけです. (3) は中間レポート 2 を知っていればすぐです.
- 大問 7 を n が一般の場合に解答するのはかなり難しいです. どの行もある行の定数倍でかけることに気づけるかどうかです.
- 大問 8 は完全正解が 1 人いました. (部分点は 3 人程度いました.) しかも想定していない解答でお見事だと思います. 存在すれば 2026 が 2^{n-1} で割り切れないといけないことに気づけるかどうかです.
- 裏面は加点法で採点しています. ある程度ラフに採点していて, アイデアがあっていれば加点してます.

2026 年度春夏学期 線形代数学・同演義 I 期末試験 問題・解答例

表面の基礎問題と裏面の応用問題の詳細解答

方針

各問について、先に問題文を掲げ、その直後に解答例を書く。計算問題では途中の行列計算を示し、証明問題では用いた事実と結論の関係が分かるように記す。第 2 問では、置換の積は右側から作用させるものとする。

ほとんどの解答を chatGPT に書いてもらいました。

第 1 問

問題

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

とする。 AB, BA, BC, CB, CA, AC の 6 個のうち、行列の積として定まるものすべてに対して積を計算せよ。なお、行列の積として定まらないものに関しては言及しなくてよい。

解答例

各行列の型は

$$A : 2 \times 3, \quad B : 1 \times 2, \quad C : 3 \times 1$$

である。行列の積は、左の行列の列数と右の行列の行数が一致するときに定まる。したがって、6 個の積のうち定まるものは

$$BA, \quad CB, \quad AC$$

である。

まず、

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

次に,

$$\begin{aligned} CB &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって

$$CB = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}.$$

最後に,

$$\begin{aligned} AC &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3(-1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 7 \\ 0(-1) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって

$$AC = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

第 2 問

問題

5 次置換 σ, τ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. $\sigma\tau$ を求めよ. また, その符号 $\text{sgn}(\sigma\tau)$ も求めよ.

解答例

置換の積は右側から作用させるものとする. すなわち,

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$$

である. 各元の像を順に計算すると,

i	1	2	3	4	5
$\tau(i)$	5	4	3	2	1
$\sigma(\tau(i))$	1	5	4	2	3

となる. よって

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

これを巡回置換で書くと

$$\sigma\tau = (2\ 5\ 3\ 4)$$

である. 4 個の元からなる巡回置換は 3 個の互換の積に書けるので,

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (-1)^3 = -1.$$

したがって

$$\boxed{\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = -1.}$$

なお,

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = -1, \quad \operatorname{sgn}(\tau) = 1$$

より

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau) = -1$$

としてもよい.

第 3 問

問題

実数係数の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & + & 10x_4 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{cases}$$

が $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ 以外の解を持つかどうか判定せよ.

解答例

行列式を用いる方法と掃き出し法を用いる解答がある.

掃き出し法を用いる解答

拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 7 & 10 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

である. これを行基本変形する.

まず第 1 列を消去する.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 7 & 10 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 + R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_1 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

次に第 2 列を消去する.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 + 2R_2 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

さらに第 3 列を消去する.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

最後の行から $-2x_4 = 0$ なので $x_4 = 0$ である. 第 3 行から

$$3x_3 + 5x_4 = 0$$

なので $x_3 = 0$ である. 第 2 行から

$$2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$$

なので $x_2 = 0$ である. 最後に第 1 行から $x_1 = 0$ である.

したがって解は

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

のみである. よって

与えられた連立 1 次方程式は非自明解を持たない.

行列式を用いる解答

この連立 1 次方程式の係数行列を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 7 & 10 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

とおく. 同次連立 1 次方程式が非自明解を持つことと, 係数行列 A が正則でないことは同値である. したがって, $\det A$ が 0 であるかどうかを調べればよい.

行列式に対して

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, \quad R_3 \leftarrow R_3 + R_1, \quad R_4 \leftarrow R_4 - R_1$$

と変形する．一つの行に他の行の定数倍を加えても行列式の値は変わらないので，

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 7 & 10 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & -4 & -3 & -1 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

さらに，

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2, \quad R_4 \leftarrow R_4 + 2R_2$$

と変形し，続いて

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_3$$

と変形すると，

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-2) = -12.\end{aligned}$$

したがって

$$\det A = -12 \neq 0$$

であり， A は正則である．よって，この同次連立 1 次方程式の解は自明解のみである．したがって

与えられた連立 1 次方程式は非自明解を持たない．

第 4 問

問題

次の問いに答えよ．

- (1) A をすべての成分が実数である n 次正方行列とする． A の階数が n であることと A^3 の階数が n であることは，同値であることを示せ．
- (2) すべての成分が有理数である正則な n 次正方行列 A について，逆行列 A^{-1} のすべての成分も有理数であることを示せ．

解答例

(1)

n 次正方行列について、階数が n であることと行列式が 0 でないことは同値である。 $\det(A^3) = (\det A)^3$ であるので、

$$\text{rank}(A) = n \iff \det(A) \neq 0 \iff (\det A)^3 \neq 0 \iff \det(A^3) \neq 0 \iff \text{rank}(A^3) = n.$$

したがって、 A の階数が n であることと A^3 の階数が n であることは同値である。

(2)

余因子行列を用いる解答と掃き出し法を用いる解答がある。

余因子行列を用いる解答

$A = (a_{ij})$ の余因子行列を $\tilde{A}$ とする。逆行列の公式より、

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$$

である。

A の成分はすべて有理数なので、 $\det A$ は有理数である。また、 A は正則であるから

$$\det A \neq 0$$

である。さらに、 $\tilde{A}$ の各成分は A の成分から作られる $(n-1)$ 次の行列式に符号を付けたものであるから、すべて有理数である。

したがって、 A^{-1} の各成分は

$$\frac{\text{有理数}}{\det A}$$

という形であり、 $\det A$ は 0 でない有理数なので、すべて有理数である。よって

A^{-1} のすべての成分は有理数である。

掃き出し法を用いる解答

A は正則な n 次正方行列で、すべての成分が有理数であるとする。掃き出し法で逆行列を求めるには

$$[A : E_n]$$

を行基本変形して

$$[E_n : A^{-1}]$$

にする。

ここで最初の行列 $[A : E_n]$ の成分はすべて有理数である。また、行基本変形は次の 3 種類である。

1. ある行を 0 でない数倍する.
2. 2 つの行を入れ替える.
3. ある行の定数倍を別の行に加える.

A の成分が有理数なので, 掃き出し法で使うピボットも有理数である. 有理数でない数を使う必要はない. 実際, 有理数を足す, 引く, 掛ける, 0 でない有理数で割る, という操作を繰り返しても, 得られる数はすべて有理数である.

したがって, 掃き出し法の途中に現れる行列の成分はすべて有理数である. 最後に得られる右側の行列 A^{-1} の成分もすべて有理数である.

よって

A^{-1} のすべての成分は有理数である.

第 5 問

問題

n を 1 以上の整数とし, x を変数とする. $(n+1)$ 次正方行列 A_n を

$$A_n := \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x & x & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ x & x & x & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ x & x & x & x & \cdots & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & x & \cdots & x & n \\ x & x & x & x & \cdots & x & x \end{pmatrix}$$

とする. 厳密には, $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1}$ を, $i \geq j$ ならば $a_{ij} := x$ とし, $i < j$ ならば $a_{ij} := i$ として定める.

A_n の行列式 $\det A_n$ を x と n を用いて表せ. ただし, 一般の n の場合を解答できていなくても, $n = 3$ の場合, すなわち 4 次正方行列 A_3 の行列式 $\det A_3$ を正しく解答した答案には部分点を与える.

解答例

$$A_n = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x & x & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ x & x & x & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ x & x & x & x & \cdots & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & x & \cdots & x & n \\ x & x & x & x & \cdots & x & x \end{pmatrix}$$

に対して, 下の行から順に

$$R_{i+1} \leftarrow R_{i+1} - R_i \quad (i = n, n-1, \dots, 1)$$

という行基本変形を行う. 一つの行に他の行の定数倍を加えても行列式は変わらない. また, 下から順に行うので, 各段階で引く行 R_i はまだ変形されていない.

この変形後の第 $i+1$ 行を考える. 第 i 列までは $x - x = 0$ となり, 第 $i+1$ 列は $x - i$ となる. それより右の成分は $(i+1) - i = 1$ となる. したがって,

$$\det A_n = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-(n-1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-n \end{vmatrix}.$$

右辺は上三角行列の行列式であるから, 対角成分の積に等しい. よって

$$\det A_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n).$$

したがって

$$\det A_n = \prod_{k=0}^n (x-k).$$

特に $n=3$ の場合は

$$A_3 = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 2 & 2 \\ x & x & x & 3 \\ x & x & x & x \end{pmatrix}$$

なので,

$$\det A_3 = x(x-1)(x-2)(x-3).$$

帰納法を用いて解答してもよい. 求める式を $\det A_n = f(n, x)$ とすると

$$\begin{aligned} f(n, x) &= \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x & x & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ x & x & x & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ x & x & x & x & \cdots & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & x & \cdots & x & n \\ x & x & x & x & \cdots & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & x-1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & x-1 & x-1 & x-1 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x-1 & x-1 & x-1 & \cdots & x-1 & n-1 \\ 0 & x-1 & x-1 & x-1 & \cdots & x-1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x-1 & x-1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ x-1 & x-1 & x-1 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x-1 & x-1 & x-1 & \cdots & x-1 & n-1 \\ x-1 & x-1 & x-1 & \cdots & x-1 & x-1 \end{vmatrix} = x f(n-1, x-1) \end{aligned}$$

であるので

$$f(n, x) = xf(n-1, x-1) = x(x-1)f(n-2, x-2) = \cdots = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

がいえる.

第 6 問

問題

n を 1 以上の整数とし, $A = (a_{ij})$ をすべての成分が整数である n 次正方行列とする. さらに, すべての行の成分和が 2026 であるとする. すなわち, 任意の $1 \leq i \leq n$ について,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 2026$$

が成り立つとする. 次の問いに答えよ.

(1) $n \times 1$ 行列を

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2026 \\ 2026 \\ \vdots \\ 2026 \end{pmatrix}$$

すなわち $A\mathbf{1} = 2026\mathbf{1}$ を示せ.

(2) A の余因子行列 $\tilde{A}$ の各行の成分和が $\frac{\det A}{2026}$ に等しいことを示せ.

(3) $\det A$ が 2026 で割り切れることを示せ.

解答例

(1)

行列の積の定義より, $A\mathbf{1}$ の第 i 成分は

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot 1 = \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

である. 仮定より, この値は任意の i について 2026 である. したがって

$$A\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 2026 \\ 2026 \\ \vdots \\ 2026 \end{pmatrix} = 2026\mathbf{1}.$$

よって

$$A\mathbf{1} = 2026\mathbf{1}.$$

(2)

余因子行列の基本公式より

$$\tilde{A}A = (\det A)E_n$$

である. (1) の等式 $A\mathbf{1} = 2026\mathbf{1}$ の両辺に左から $\tilde{A}$ を掛けると,

$$\tilde{A}A\mathbf{1} = 2026\tilde{A}\mathbf{1}$$

を得る. 左辺に余因子行列の基本公式を用いると,

$$(\det A)E_n\mathbf{1} = 2026\tilde{A}\mathbf{1}.$$

したがって

$$\tilde{A}\mathbf{1} = \frac{\det A}{2026}\mathbf{1}.$$

ここで, $\tilde{A}\mathbf{1}$ の第 i 成分は $\tilde{A}$ の第 i 行の成分和である. 右辺のすべての成分は $\frac{\det A}{2026}$ であるから, $\tilde{A}$ の各行の成分和はすべて $\frac{\det A}{2026}$ に等しい. よって

$$\tilde{A} \text{ の各行の成分和は } \frac{\det A}{2026} \text{ である.}$$

(3)

A の成分はすべて整数である. したがって, A の余因子は整数であり, 余因子行列 $\tilde{A}$ のすべての成分も整数である. よって, $\tilde{A}$ の各行の成分和も整数である.

(2) より, その行和は $\frac{\det A}{2026}$ に等しいので,

$$\frac{\det A}{2026} \in \mathbb{Z}$$

である. したがって

$$2026 \mid \det A.$$

第 7 問

問題

n を 1 以上の整数とし, $A = (a_{ij})$ を実数体 $\mathbb{R}$ 上の n 次正方行列とする. A は零行列ではないとする. 次の条件 (a), (b) を考える.

(a) $\text{rank } A = 1$.

(b) 任意の $1 \leq i < k \leq n, 1 \leq j < \ell \leq n$ に対して $a_{ij}a_{k\ell} = a_{i\ell}a_{kj}$ が成り立つ.

次の問いに答えよ.

- (1) (a) ならば (b) が成り立つことを示せ. ただし, 一般の n の場合を解答できていなくても, $n = 2$ の場合を正しく解答した答案には部分点を与える.
- (2) (b) ならば (a) が成り立つことを示せ. ただし, 一般の n の場合を解答できていなくても, $n = 2$ の場合を正しく解答した答案には部分点を与える.

解答例

(1)

$\text{rank } A = 1$ とする. A は零行列ではないので, 少なくとも 1 本の行は零行ではない. そのような行を第 p 行とする.

行列の階数が 1 であることから, A のすべての行は第 p 行の定数倍である. したがって, 各 i に対してある実数 λ_i が存在して,

$$a_{ij} = \lambda_i a_{pj} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

と書ける.

任意の i, j, k, ℓ に対して,

$$\begin{aligned} a_{ij}a_{k\ell} &= (\lambda_i a_{pj})(\lambda_k a_{p\ell}) \\ &= \lambda_i \lambda_k a_{pj} a_{p\ell} \\ &= (\lambda_i a_{p\ell})(\lambda_k a_{pj}) \\ &= a_{i\ell}a_{kj}. \end{aligned}$$

よって条件 (b) が成り立つ. したがって

$$(a) \implies (b).$$

別の言い方をすれば,

$$a_{ij}a_{k\ell} - a_{i\ell}a_{kj}$$

は第 i, k 行と第 j, ℓ 列から作られる 2 次小行列式であり, 階数 1 の行列ではすべての 2 次小行列式が 0 になる.

(2)

条件 (b) を仮定する. A は零行列ではないので, ある p, q が存在して

$$a_{pq} \neq 0$$

である.

任意の i, j をとる. $i = p$ または $j = q$ の場合は

$$a_{ij}a_{pq} = a_{iq}a_{pj}$$

は自明に成り立つ. $i \neq p$ かつ $j \neq q$ の場合は, 行番号 i, p と列番号 j, q をそれぞれ小さい順に並べて条件 (b) を適用することにより,

$$a_{ij}a_{pq} = a_{iq}a_{pj}$$

を得る. したがって, 任意の i, j に対して

$$a_{ij}a_{pq} = a_{iq}a_{pj}$$

が成り立つ. $a_{pq} \neq 0$ なので両辺を a_{pq} で割ることができ,

$$a_{ij} = \frac{a_{iq}}{a_{pq}}a_{pj}$$

を得る.

したがって第 i 行は

$$\frac{a_{iq}}{a_{pq}}$$

倍の第 p 行である. つまり, すべての行が零でない第 p 行の定数倍である. よって A の階数は高々 1 である. 一方, A は零行列ではないから階数は 0 ではない. したがって

$$\text{rank } A = 1.$$

よって

$$(b) \implies (a).$$

以上より, 条件 (a) と条件 (b) は同値である.

$n = 2$ の場合の解答

この場合はもっと簡単に示せる. $n = 2$ であることから,

$$\text{rank } A < 2 \iff \det A = 0 \underset{(n=2 \text{ の仮定})}{\iff} a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$$

である. よって条件 (a) ならば条件 (b) が成り立つ.

また条件 (b) が成り立つとき, 上から $\text{rank } A \in \{0, 1\}$ である. $\text{rank } A = 0$ ならば, A が零行列となり問題文の仮定に矛盾する. よって $\text{rank } A = 1$ である.

第 8 問

問題

任意の 1 以上の整数 n に対して, すべての成分が 1 または -1 である n 次正方行列 A で,

$$\det A = 2026$$

を満たすものは存在しないことを証明せよ.

解答例

n の値によって場合分けする.

まず $n = 1$ の場合, A の唯一の成分は 1 または -1 なので,

$$\det A = 1 \quad \text{または} \quad \det A = -1$$

である。したがって $\det A = 2026$ とはならない。

次に $n = 2$ の場合,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \{1, -1\})$$

と書ける。このとき

$$\det A = ad - bc$$

である。 ad と bc はそれぞれ 1 または -1 なので,

$$\det A \in \{-2, 0, 2\}.$$

したがって $\det A = 2026$ とはならない。

最後に $n \geq 3$ とする。第 2 行から第 n 行までの各行から第 1 行を引く。すなわち,

$$R_i \leftarrow R_i - R_1 \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

と変形する。この行基本変形によって行列式の値は変わらない。変形後の第 2 行から第 n 行までの各成分は,

$$1 - 1 = 0, \quad 1 - (-1) = 2, \quad -1 - 1 = -2, \quad -1 - (-1) = 0$$

のいずれかである。したがって、第 2 行から第 n 行までの各行のすべての成分は 2 で割り切れる。

それぞれの行から 2 をくくり出すと,

$$2^{n-1} \mid \det A$$

が分かる。 $n \geq 3$ なので $n - 1 \geq 2$ であり,

$$4 \mid \det A$$

である。

しかし

$$2026 = 4 \cdot 506 + 2$$

なので、2026 は 4 で割り切れない。したがって $\det A = 2026$ は不可能である。

以上より、すべての $n \geq 1$ に対して、条件を満たす行列は存在しない。よって

$\det A = 2026$ を満たす $\{1, -1\}$ 成分の正方行列は存在しない。