

期末試験

2026 年度春夏学期 大阪大学 全学共通教育科目 線形代数学・同演義 I (理 (数))

岩井雅崇 (いわいまさたか) 2026/07/30

- 下の問題を解け. 解答に関しては答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記すこと.
- 表面は基礎問題である. 単位が欲しい人は表面の問題に正答すること.
- 裏面は応用問題である. これは成績に差をつけるために出している. 良い成績が欲しい人は表面の問題に正答し, 裏面をできる限り解くこと. なお満点が 100 点とは限らず点数を含めて何も考えずに出しているのだから, できる問題から解いてよい.
- 問題を解答する順序は自由である. 例えば小問において, (2) が未回答であっても (3) を解答してよく, (2) を解答してから (1) を解答してもよい.
- 解答に際し授業・教科書で証明を与えた定理に関しては自由に用いてよい.

授業で扱っていない内容を用いて証明する場合は, 数学的用語 (線型空間など) の定義を与え, 用いる定理の内容についても説明を加えること. なお, そのような証明は基本的に厳しめに採点する予定である.

第 1 問.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

とする. AB, BA, BC, CB, CA, AC の 6 個のうち, 行列の積として定まるものすべてに対して積を計算せよ. (なお行列の積として定まらないものに関しては言及しなくてよい.)

第 2 問. 5 次置換 σ, τ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. $\sigma\tau$ を求めよ. またその符号 $\text{sgn}(\sigma\tau)$ も求めよ.

第 3 問. 実数係数の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

が $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ 以外の解を持つかどうか判定せよ.

第 4 問. 次の問いに答えよ.

- (1) A をすべての成分が実数である n 次正方行列とする. A の階数が n であることと, A^3 の階数が n であることは, 同値であることを示せ.
- (2) すべての成分が有理数である正則な n 次正方行列 A について, 逆行列 A^{-1} のすべての成分も有理数であることを示せ.

第 5 問に続く

第5問. n を1以上の整数とし, x を変数とする. $(n+1)$ 次正方行列 A_n を

$$A_n := \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x & x & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ x & x & x & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ x & x & x & x & \cdots & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & x & \cdots & x & n \\ x & x & x & x & \cdots & x & x \end{pmatrix}$$

とする. (厳密に言えば $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1}$ を $i \geq j$ ならば $a_{ij} := x$ とし, $i < j$ ならば $a_{ij} := i$ として定める.)

A_n の行列式 $\det A_n$ を x と n を用いて表せ. ただし, 一般の n の場合を解答できていなくても, $n = 3$ の場合 (つまり4次正方行列 A_3 の行列式 $\det A_3$) を正しく解答した答案には部分点を与える.

第6問. n を1以上の整数とし, $A = (a_{ij})$ をすべての成分が整数である n 次正方行列とする. さらに, すべての行の成分和が2026であるとする. すなわち, 任意の $1 \leq i \leq n$ について,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 2026$$

が成り立つとする. 次の問いに答えよ.

(1) $n \times 1$ 行列を $\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく. $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2026 \\ 2026 \\ \vdots \\ 2026 \end{pmatrix}$ (つまり $A\mathbf{1} = 2026 \cdot \mathbf{1}$) を示せ.

(2) A の余因子行列 $\tilde{A}$ の各行の成分和が $\frac{\det A}{2026}$ に等しいことを示せ.

(3) $\det A$ は2026で割り切れることを示せ.

第7問. n を1以上の整数とし, $A = (a_{ij})$ をすべての成分が実数である n 次正方行列とする. また A は零行列ではないとする. 次の条件 (a), (b) を考える.

(a) $\text{rank } A = 1$.

(b) 任意の $1 \leq i < k \leq n, 1 \leq j < \ell \leq n$ に対して $a_{ij}a_{k\ell} = a_{i\ell}a_{kj}$ が成り立つ.

次の問いに答えよ.

(1) (a) ならば (b) が成り立つことを示せ. ただし, 一般の n の場合を解答できていなくても, $n = 2$ の場合を正しく解答した答案には部分点を与える.

(2) (b) ならば (a) が成り立つことを示せ. ただし, 一般の n の場合を解答できていなくても, $n = 2$ の場合を正しく解答した答案には部分点を与える.

第8問. 任意の1以上の整数 n に対して, すべての成分が1または -1 である n 次正方行列 A で, $\det A = 2026$ を満たすものは存在しないことを証明せよ.

問題は以上である.