# 中間試験

2026 年度春夏学期 大阪大学 全学共通教育科目 線形代数学・同演義 I (理（数）)

岩井雅崇 (いわいまさたか) 2026/06/04

- 下の問題を解け. 解答に関しては答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記すこと.
- 表面は基礎問題である. 単位が欲しい人は正答すること.
- 裏面は応用問題である. これは成績に差をつけるために出している. 良い成績が欲しい人は表面を正答し, 裏面をできる限り解くこと. なお満点が 100 点とは限らず点数を含めて何も考えずに出しているので, できる問題から解いて良い.
- 解答の順序が前後して良い. 例えば裏面の 6 番の問題において, (2) が未回答で (3) を解いても良いし, (2) を解いてから (1) を解いても良い.

授業でやってない内容を用いて証明をする際は, 数学的用語 (線型空間など) に定義を与え, 用いた定理にも説明を加えること. なおそのような証明は基本的には”厳し目に”採点する予定である. (そのためあまりしないでほしい).

**第 1 問.** 「$x$ 軸に関しての鏡映 (反転) を行い, $\frac{\pi}{4}$(=45 度) 反時計回りに回転し, $y$ 軸に関しての鏡映 (反転) を行う 1 次変換」$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を求めよ.

**第 2 問.**

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix}$$

とする. $AB, BA, BC, CB, CA, AC$ の 6 個のうち, 行列の積として定まるものすべてに対して積を計算せよ. (なお行列の積として定まらないものに関しては言及しなくて良い.)

**第 3 問.** 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5\\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 2\\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 11x_4 = a\end{cases}$ の解が存在するような $a$ の値を全て求めよ.

**第 4 問.** $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

**第 5 問.** 実数体 $\mathbb{R}$ 上の $n$ 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対して, 対角成分の和 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ を $A$ のトレースとよび, $\mathrm{tr}(A)$ で記す. 次の問いに答えよ.

(1) 任意の $n$ 次正方行列 $A, B$ に対して, $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ が成り立つことを示せ.

(2) 任意の 1 以上の整数 $n$ と実数体 $\mathbb{R}$ 上の任意の $n$ 次正方行列 $A, B, C$ に対して,

$$\mathrm{tr}(ABC)=\mathrm{tr}(BAC)$$

は成り立つか? 成り立つ場合は証明し, 成り立たない場合は $\mathrm{tr}(ABC)\neq\mathrm{tr}(BAC)$ となる”具体例”を一つ挙げよ. ただしその場合は $n$ の値は自由に設定して良い.

**第 6 問.** $m, n$ を 1 以上の整数とし, $A$ を実数体 $\mathbb{R}$ 上の $m \times n$ 行列, $B$ を実数体 $\mathbb{R}$ 上の $m$ 次正方行列とする. 次の問いに答えよ.

(1) $B$ が正則行列ならば, $\mathrm{rank}(BA) = \mathrm{rank}(A)$ を示せ.
(2) $B$ が正則行列ではない場合でも, $\mathrm{rank}(BA) \le \mathrm{rank}(A)$ が成り立つことを示せ.
(3) $B$ がゼロ行列でなく, $\mathrm{rank}(BA) < \mathrm{rank}(A)$ となる行列 $A, B$ の例を一つあげよ. ただしその場合は $m, n$ の値は自由に設定して良い.

**第 7 問.** $\mathbb{F}_7 = \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$ として, 加法 $+$ と乗法 $\bullet$ を次で定義する.

- $a, b \in \mathbb{F}_7$ について $a + b :=$ ($a$ たす $b$ を 7 で割ったあまり).
- $a, b \in \mathbb{F}_7$ について $a \bullet b :=$ ($a$ かける $b$ を 7 で割ったあまり).

これによって $\mathbb{F}_7$ は体となる. そこで $\mathbb{F}_7$ 上の 2 次正方行列の集合を

$$M_2(\mathbb{F}_7) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{F}_7 \right\}$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F}_7)$ とする. $A$ が正則であることは, $\mathbb{F}_7$ 上で $ad - bc \neq 0$ と同値であることを示せ. ただし「$A$ が正則である」の定義は「ある $B \in M_2(\mathbb{F}_7)$ があって, $M_2(\mathbb{F}_7)$ 上で

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つこと」とする. なおこの解答のみ, 行列式の一般論を用いた解答は不可とする.

(2)

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_7) := \{A \in M_2(\mathbb{F}_7) \mid A \text{ は正則 }\}$$

とする. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_7)$ の個数を求めよ. ただし (1) が未解答でも (1) を用いて (2) を正答していた場合は部分点を与える.

**第 8 問.** 次の問題に答えよ. ただし以下 $\ell, m, n, r$ は 1 以上の整数とする.

(1) $m$ 次正方行列 $A$ が正則であり, $A$ のすべての成分が有理数であるとする. この時 $A^{-1}$ の全ての成分も有理数であることを示せ.
(2) $A$ を実数体 $\mathbb{R}$ 上の $m \times n$ 行列とする. $\mathrm{rank}(A) = r$ ならば, ある実数体 $\mathbb{R}$ 上の $m \times r$ 行列 $B$ と $r \times n$ 行列 $C$ があって, $A = BC$ とできることを示せ.
(3) 実数体 $\mathbb{R}$ 上の $\ell \times m$ 行列 $A$ と $m \times n$ 行列 $B$ について, シルベスター不等式

$$\mathrm{rank}(AB) \ge \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - m$$

を示せ.

問題は以上である.