2026/05/21 第 5 回 線形代数の授業の補足

命題 2.5.3 の証明を再度紹介しておく. 使う事実は以下の通り.

- (教科書 2.3.9) n 次正方行列 A が行簡約で $\mathrm{rank}A = n$ ならば $A = E_n$
- (教科書 2.3.9) n 次正方行列 A が行簡約で $\mathrm{rank}A < n$ ならば

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

  としたに 0 が並ぶ.
- (教科書 2.2.8, 2.3.5)

$$A \overset{\text{行基本変形}}{\longrightarrow} B \text{ 行簡約行列} \Leftrightarrow \text{ある基本行列の積 } P \text{ があって } PA = B$$

- (教科書 2.2.7) 基本行列は正則で, その逆行列も基本行列

命題 174 (教科書 命題 2.5.3)**.** A, B を n 次正方行列とする. もし $BA = E_n$ ならば, A と B はともに正則行列であり, $B = A^{-1}$ である.

Proof. B が正則であることを示す.

$$B \overset{\text{行基本変形}}{\longrightarrow} C \text{ 行簡約行列}$$

と簡約化すると, ある基本行列の積でかける P があって

$$PB = C$$

である.

$\mathrm{rank}B = n$ を背理法で示す. $\mathrm{rank}B < n$ ならば, $\mathrm{rank}C < n$ より, 上の事実から

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

としたに 0 が並ぶ. すると

$$P = P \underbrace{(BA)}_{=E_n \text{仮定}} = (PB)A = CA$$

である．よって行列の積を考えれば

$$CA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n-1,1} & d_{n-1,2} & \cdots & d_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

としたに 0 が並ぶ．教科書問題 2.2.3 より P は逆行列を持たない．しかし P は基本行列の積より，正則行列である．よって矛盾．

よって $\mathrm{rank}B = n$ である．$\mathrm{rank}C = n$ より，上の事実から

$$C = E_n \Rightarrow B = P^{-1}C = P^{-1}$$

P は基本行列の積より，P^{-1} もそうなる．よって正則である．よって B 正則である．

また

$$BA = B^{-1}B = E_n \underset{\text{教科書 2.1.1}}{\Rightarrow} A = B^{-1} \Rightarrow A \text{ は正則で } B = A^{-1}$$

□

定理 175. n 次正方行列 A に対して，次の条件はすべて同値である．

(1) $\mathrm{rank}\, A = n$.

(2) A は正則行列である．

(3) A は基本行列の積で表される．

(4) 拡大行列 $[A \mid E_n]$ は，行基本変形によって $[E_n \mid B]$ の形に変形できる．

(5) A は行基本変形によって E_n に変形できる．

(6) 任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解をもつ．

(7) 同次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみである．

また，(4) において $[A \mid E_n] \longrightarrow [E_n \mid B]$ となったとき，$B = A^{-1}$ である．

Proof. [(1) ⇒ (3)]

$$A \overset{\text{行基本変形}}{\longrightarrow} C \text{ 行簡約行列}$$

と簡約化すると，ある基本行列の積でかける P があって

$$PA = C$$

である．$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}C = n$ より，上の事実から

$$C = E_n \Rightarrow A = P^{-1}C = P^{-1}$$

P は基本行列の積より, P^{-1} もそうなる.

[(3) $\Rightarrow$ (2)] 基本行列は正則で正則行列の積は正則なので.

[(2) $\Rightarrow$ (1)] 対偶を示す. つまり

$$\mathrm{rank}(A) < n \Rightarrow A \text{ は正則でない}$$

を示す.

$$A \xrightarrow{\text{行基本変形}} C \text{ 行簡約行列}$$

と簡約化すると, ある基本行列の積でかける P があって

$$PA = C$$

である. $\mathrm{rank}A < n$ ならば, $\mathrm{rank}C < n$ より, 上の事実から

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

としたに 0 が並ぶ. よって教科書問題 2.2.3 より C は逆行列を持たず, 正則でない. よって A は正則でない.[17]

[(3) $\Rightarrow$ (4)] $A = P$ を基本行列の積でかくと, P^{-1} も基本行列の積であり

$$P^{-1}[A : E_n] = [E_n : P^{-1}] \Leftrightarrow [A : E_n] \xrightarrow{\text{行基本変形}} [E_n : P^{-1}]$$

よって $B = P^{-1}$ とおけば良い

[(4) $\Rightarrow$ (2)]

$$[A : E_n] \xrightarrow{\text{行基本変形}} [E_n : B]$$

と簡約化すると, ある基本行列の積でかける P があって

$$P[A : E_n] = [E_n : B] \Leftrightarrow PA = E_n, P = B$$

となる. よって $BA = E_n$ なので, 命題 2.5.3 から A は正則で $B = A^{-1}$ である.

[(4) $\Leftrightarrow$ (5)] 明らか. (もしわからない場合は示してみよう.)

[(1) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7)] 定理 2.4.6(2) および系 2.4.8 による. □

[17] もし A が正則なら $C = PA$ より C も正則になってしまう.

中間レポート1 解答例

2026 年度 線形代数

ほとんどの解答を chatGPT に書いてもらいました.

問題 1. (第 2 回演習追加問題 1) 「x 軸に関しての鏡映 (折り返し) を行い, $\frac{3}{4}\pi(=135$ 度) 反時計回りに回転する」1 次変換求めよ.

問題 2. (第 2 回演習追加問題 2) 「x 軸に関しての鏡映 (折り返し) を行い, $\frac{3}{4}\pi(=135$ 度) 反時計回りに回転し, さらに x 軸に関しての鏡映 (反転) を行う」1 次変換を求めよ . またその変換は θ 反時計回りの変換に等しいが, その θ を求めよ. ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ とする.

解答 1. x 軸に関する鏡映を

$$\sigma_x(x,y) = (x,-y)$$

とおく. また, 角度 α の反時計回りの回転を

$$\rho_\alpha(x,y) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$

とおく.

問題の変換は, まず x 軸に関する鏡映を行い, その後に $3\pi/4$ 反時計回りに回転する変換である. したがって, 求める変換は

$$T_1 = \rho_{3\pi/4} \circ \sigma_x$$

である.

実際に計算する. まず

$$\sigma_x(x,y) = (x,-y)$$

であるから,

$$T_1(x,y) = \rho_{3\pi/4}(x,-y).$$

ここで

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

である. よって

$$\begin{aligned}
T_1(x,y) &= \left(x\cos\frac{3\pi}{4} - (-y)\sin\frac{3\pi}{4}, x\sin\frac{3\pi}{4} + (-y)\cos\frac{3\pi}{4}\right)\\
&= \left(x\cos\frac{3\pi}{4} + y\sin\frac{3\pi}{4}, x\sin\frac{3\pi}{4} - y\cos\frac{3\pi}{4}\right)\\
&= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right).
\end{aligned}$$

[別解] x 軸に関する鏡映を

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおく. また, $3\pi/4$ 反時計回りの回転を

$$R_{3\pi/4} = \begin{pmatrix} \cos\frac{3\pi}{4} & -\sin\frac{3\pi}{4} \\ \sin\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

とおく. 先に x 軸に関する鏡映を行い, その後に回転するので, 求める行列は

$$R_{3\pi/4}S_x = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

したがって

$$T(x,y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

である.

解答 2.

問題の変換は, まず x 軸に関する鏡映を行い, 次に $3\pi/4$ 反時計回りに回転し, 最後にもう一度 x 軸に関する鏡映を行う変換である. したがって, 求める変換は

$$T_2 = \sigma_x \circ \rho_{3\pi/4} \circ \sigma_x$$

である.

問題 1 で

$$\rho_{3\pi/4} \circ \sigma_x$$

は

$$(x,y) \longmapsto \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)$$

であった. これに最後の σ_x を合成する. すなわち,

$$\sigma_x(X,Y) = (X,-Y)$$

であるから,

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= \sigma_x\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y\right). \end{aligned}$$

したがって, 行列表示は

$$T_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

一方, 角度 θ の反時計回りの回転行列は

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である. 今,

$$T_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

なので,

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

である. よって

$$\theta = \frac{5\pi}{4}$$

である.

したがって

$$\boxed{T_2 = R_{5\pi/4}}$$

であり,

$$\boxed{\theta = \frac{5\pi}{4}}$$

である.

[別解] x 軸に関する鏡映を

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおく. 変換は

$$x \text{ 軸鏡映} \longrightarrow 3\pi/4 \text{ 回転} \longrightarrow x \text{ 軸鏡映}$$

の順であるから, 求める行列は

$$S_x R_{3\pi/4} S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

これは

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

の形で, $\cos\theta = \sin\theta = -\sqrt{2}/2$ である．よって

$$\boxed{\theta = \frac{5\pi}{4}}$$

である.

問題 3. (第 2 回演習追加問題 5) $\mathbb{F}_7 = \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$ として, 加法 $+$ と乗法 $\bullet$ を次で定義する.

- $a, b \in \mathbb{F}_7$ について $a + b :=$ (a たす b を 7 で割ったあまり).
- $a, b \in \mathbb{F}_7$ について $a \bullet b :=$ (a かける b を 7 で割ったあまり).

(これによって $\mathbb{F}_7$ は体となる) $a = 1, 2, \ldots, 6$ について $\mathbb{F}_7$ での $-a, a^{-1}$ をそれぞれ求めよ.

解答. $\mathbb{F}_7$ ではすべての計算を 7 で割った余りで行う.

まず $-a$ は

$$a + (-a) \equiv 0 \pmod 7$$

を満たす元である．よって

a	1	2	3	4	5	6
$-a$	6	5	4	3	2	1

である.

次に a^{-1} は

$$a \cdot a^{-1} \equiv 1 \pmod 7$$

を満たす元である．直接計算すると

$$1 \cdot 1 \equiv 1, \quad 2 \cdot 4 \equiv 1, \quad 3 \cdot 5 \equiv 1, \quad 4 \cdot 2 \equiv 1, \quad 5 \cdot 3 \equiv 1, \quad 6 \cdot 6 \equiv 1 \pmod 7.$$

したがって

a	1	2	3	4	5	6
a^{-1}	1	4	5	2	3	6

である.

問題 4.(第 3 回演習 教科書 2.1.2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

とする.

(1) AB, BA, BC, CB, CA, AC の 6 個のうち, 行列の積として定まらないものをすべてあげよ.

(2) AB, BA, BC, CB, CA, AC の 6 個のうち, 行列の積として定まるものすべてに対して積を計算せよ.

解答.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

である. サイズは

$$A : 2 \times 3, \quad B : 3 \times 2, \quad C : 2 \times 2$$

である.

(1) 積が定まるかどうかは, 左の行列の列数と右の行列の行数が一致するかで決まる.

$$AB,\ BA,\ BC,\ CA$$

は定まるが,

$$\boxed{CB,\ AC}$$

は定まらない.

(2) 定まる積を計算する.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 9 \\ 2 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BC = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 7 & 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

問題 5. (第 3 回演習 教科書 2.1.11) n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して, 対角成分の和 $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ を A のトレースとよび, $\mathrm{tr}(A)$ で記す. 任意の n 次正方行列 A, B に対して, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ が成り立つことを示せ.

解答. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とする. このとき

$$(AB)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$$

であるから,

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}.$$

一方,

$$(BA)_{jj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}$$

であるから,

$$\mathrm{tr}(BA) = \sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}.$$

成分は数であるから $a_{ij}b_{ji} = b_{ji}a_{ij}$ であり, 和をとる順序も入れ替えられる. したがって

$$\boxed{\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)}$$

である.

問題 6. (第 3 回演習追加問題 8) n 次正方行列 A が正則行列であるとする. この時 n 次正方行列 B について, $AB = O_n$ ならば $B = O_n$ であることを示せ. (ヒント: 教科書 p.23 の (3) と p.22 の $AE_n = E_nA = A$ を使う.)

解答. A は正則行列なので逆行列 A^{-1} が存在する. $AB = O_n$ とする. 左から A^{-1} をかけると

$$A^{-1}AB = A^{-1}O_n.$$

左辺は

$$A^{-1}AB = (A^{-1}A)B = E_nB = B$$

であり, 右辺は O_n である. よって

$$\boxed{B = O_n}$$

である.

問題 7.(第 4 回演習 教科書 2.2.3) 正方行列 A に何回かの行基本変形を施して

$$\begin{bmatrix} & A' & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

という最後の行がすべて 0 であるような行列に変換できるとする. このとき, A は逆行列をもたないことを証明せよ.

解答. 背理法. A が正則とする. 仮定より

$$A \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} & A' & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

であるので, ある基本行列の積でかける P があって

$$PA = \begin{bmatrix} & A' & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

となる. 今

$$A^{-1}P^{-1} := \begin{bmatrix} B & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

とブロック分解する. B は $n \times (n-1)$ 行列で, $\mathbf{b}$ は $n \times 1$ 行列である. すると

$$E_n = PA(A^{-1}P^{-1}) = \begin{bmatrix} & A' & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'B & A'\mathbf{b} \\ 0 \ \cdots \ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

としたに 0 が続く. これは nn 成分が $1 = 0$ となり矛盾. よって A は正則でなく逆行列をもたない.

問題 8 (第 4 回演習 教科書 2.3.2) $C = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の行簡約化, 階数, 標準化を求めよ.

解答.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

である. 行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & -7 & 6 & 1 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\to \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

となる. よって階数は

$$\boxed{\operatorname{rank} C = 2}$$

である.

標準化は

$$\boxed{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}}$$

となる.

問題 9.(第 5 回演習 教科書 2.4.1(3)) 連立方程式を解け.

$$\begin{cases} & & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \end{cases}$$

解答. 拡大係数行列を行簡約化する.

$$[A:\mathbf{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = [A':\mathbf{b}']$$

したがって $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ をとくと

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = -1, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$x_3 = s$, $x_4 = t$ とおくと,

$$x_1 = s + t - 1, \quad x_2 = -2s - t + 1.$$

よって解は

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (s + t - 1, -2s - t + 1, s, t) \quad (s, t \text{ は任意})}$$

である.

答えの書き方として $\begin{cases} x_1 & = & -1 + c_1 + c_2 \\ x_2 & = & 1 - 2c_1 - c_2 \\ x_3 & = & c_1 \\ x_4 & = & c_2 \end{cases}$ $(c_2, c_4$ は任意$)$ でも良い

問題 10. (第 5 回演習 教科書 2.5.2(2)) 次で与えられた n 次正方行列 A に対して, $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A & E_n \end{bmatrix}$ の行簡約化を計算することによって, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

解答.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

である. 拡大行列 $[A\ E_3]$ を行簡約化する.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -1 \end{array}\right).$$

したがって

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix}}$$

である.

問題 11. (第 5 回演習 教科書 2.5.3) A を n 次正方行列とするとき, A が正則であるための必要十分条件は A が零因子でないことである. このことを証明せよ. ここで A が零因子であるとは, あるゼロ行列でない n 次正方行列 B があって AB または BA がゼロ行列となることとする.

解答. まず A が正則であるとする. $AB = O_n$ なら, 左から A^{-1} をかけて

$$B = A^{-1}AB = O_n$$

となる. また $BA = O_n$ なら, 右から A^{-1} をかけて

$$B = BAA^{-1} = O_n$$

となる. よって, A は零因子ではない.

A が正則でなければ A が零因子を示す. A を

$$A \overset{\text{行基本変形}}{\longrightarrow} C \text{ 行簡約行列}$$

と簡約化すると, ある基本行列の積でかける P があって

$$PA = C$$

である.

A が正則でないので, 定理から $\mathrm{rank}A < n$ である. よって $\mathrm{rank}C < n$ となり,

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

としたに 0 が並ぶ. そこで

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする. (成分表示すれば $(1, n)$ 成分が 1 で他が 0 の行列) B は零行列ではない. また

$$CB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = O$$

となる. よって P は正則なので,

$$AB = P^{-1}PAB = P^{-1}CB = P^{-1}O = O$$

であるので, A は定義から零因子である.

以上より, A が正則であることと, A が零因子でないことは同値である.

[別解 chatGPT による賢い方法] 「A が正則でない $\Rightarrow$ 零因子である.」の証明

逆に A が正則でないとする. このとき同次連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

は零ベクトルでない解 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ をもつ. そこで, $\boldsymbol{x}$ を第 1 列とし, それ以外の列をすべて $\mathbf{0}$ とする行列

$$B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

を考える. $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ なので $B \neq O_n$ である. しかし

$$AB = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x} & A\mathbf{0} & \cdots & A\mathbf{0} \end{pmatrix} = O_n.$$

したがって A は零因子である.

問題 12. (第 5 回演習 追加問題 12) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 - 5x_4 = a \end{cases}$ の解が存在するような a の値を全て求めよ.

解答. 拡大係数行列を考え簡約化すると

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & a \end{array}\right). \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+3 \end{array}\right)$$

となる. これを拡大係数行列になるような連立一次方程式は

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 + 7x_4 = 5 \\ x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -3 \\ 0 = a+3 \end{cases}$$

となる. 解が存在するためには, 最後の行に関して

$$a + 3 = 0$$

である必要がある. 実際 $a = -3$ の場合

$$\begin{cases} x_1 = 5 + c_1 - 7c_2 \\ x_2 = -3 + 2c_1 + 5c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意})$$

と解が存在し. 十分性も示された. したがって

$$\boxed{a = -3}$$

である.