

中間レポート2 解答例

2026 年度 線形代数

ほとんどの解答を chatGPT に書いてもらいました.

問題 1. (第 6 回演習追加問題 13) 5 次置換 σ, τ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $\sigma\tau, \tau\sigma, \sigma^{-1}$ を求めよ.
- (2) σ と τ の転倒数と符号を求めよ.
- (3) $\sigma\tau$ の転倒数と符号を求め, $\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau)$ を確認せよ.

解答 (1). まず、各 $i = 1, \dots, 5$ に対して $\sigma(\tau(i))$ を計算すると、

i	1	2	3	4	5
$\tau(i)$	2	1	4	5	3
$\sigma(\tau(i))$	1	4	3	2	5

となる. したがって

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

同様に、

i	1	2	3	4	5
$\sigma(i)$	4	1	5	3	2
$\tau(\sigma(i))$	5	2	3	4	1

より

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

また、

$$\sigma(2) = 1, \quad \sigma(5) = 2, \quad \sigma(4) = 3, \quad \sigma(1) = 4, \quad \sigma(3) = 5$$

であるから、

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

解答 (2). σ の下段は $(4, 1, 5, 3, 2)$ である. その転倒は

$$(1, 2), (1, 4), (1, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)$$

の 6 個である。したがって、 σ の転倒数は 6 であり、 $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^6 = 1$ である。
一方、 τ の下段は $(2, 1, 4, 5, 3)$ である。その転倒は

$$(1, 2), (3, 5), (4, 5)$$

の 3 個である。したがって、 τ の転倒数は 3 であり、 $\text{sgn}(\tau) = (-1)^3 = -1$ である。
 $\sigma\tau$ の下段は $(1, 4, 3, 2, 5)$ である。その転倒は

$$(2, 3), (2, 4), (3, 4)$$

の 3 個である。したがって、 $\sigma\tau$ の転倒数は 3 であり、 $\text{sgn}(\sigma\tau) = (-1)^3 = -1$ 。

解答 (3). また、前問より

$$\text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau) = 1 \cdot (-1) = -1$$

であるから、 $\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau)$ が確認できる。

問題 2. (第 7 回演習 教科書 3.2.1 (8), 教科書 3.3.1) 次の行列式を求めよ.

$$(1). \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 5 & -4 \\ 8 & 6 & 2 & -7 & 0 \end{vmatrix} \quad (2). \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 5 & 5 \\ 8 & 6 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad (3). \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 7 \\ -6 & 7 & 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

解答.

解答 (1). 第 1 行について余因子展開し、さらに行基本変形を行うと、

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 5 & -4 \\ 8 & 6 & 2 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & -4 \\ 6 & 2 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & -4 \\ 2 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & -9 & -2 \end{vmatrix} \\ = 7 \cdot 9 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 9 \cdot (-2) = -126.$$

(1) の別解. 教科書定理 3.3.1 を使って

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 5 & -4 \\ 8 & 6 & 2 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & -4 \\ 2 & -7 & 0 \end{vmatrix}.$$

ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & -4 \\ 2 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -28 - 8 + 18 = -18.$$

したがって -126 である。

解答 (2). 行列式の値を変えない行基本変形を行うと,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 5 & 5 \\ 8 & 6 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 5 & 5 \\ 0 & -10 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -16 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-16) = -16$$

他にも余因子展開を用いたり教科書定理 3.3.1 を用いても良い。

解答 (3). 第 1 列と第 2 列を第 5 列の後ろに移す. この操作は合計 6 回の列の入れ替えに当たるので, 行列式の符号は変わらない. したがって, 教科書定理 3.3.1 を用いて

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 7 \\ -6 & 7 & 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 3 & -1 \\ 8 & 2 & 5 & -6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \left(3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) (3 \cdot 7 - (-1)(-6))$$

$$= (3(1+2) - 1)(21-6) = 8 \cdot 15 = 120.$$

問題 3. (第 8 回演習追加問題 21) 以下の問題は他学科の期末試験で出した証明問題である. 次の問題に答えよ.

- (1) $n \times n$ 行列 A, B, C について, $\det(ABC) = \det(BAC)$ であることを示せ.
- (2) $n \times n$ 行列 A, B について, A と B が正則ならば, AB もまた正則行列であることを示せ.
- (3) $n \times n$ 行列 A, B について, AB が正則行列であるならば, A も B も正則であることを示せ.
- (4) 実数係数の $n \times n$ 行列 A について, ${}^tAA = E_n$ ならば, $\det(A) = \pm 1$ であることを示せ. ここで tAA は tA と A の積のことである.
- (5) 実数係数の $n \times n$ 行列 A について, $A^7 = E_n$ ならば, $\det(A) = 1$ であることを示せ.
- (6) 実数係数の 2×2 行列 A について, $A^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ かつ $A \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるものの例を

一つあげよ.

解答 (1). 行列式の積に関する公式より、

$$\begin{aligned}\det(ABC) &= \det(A) \det(B) \det(C) \\ &= \det(B) \det(A) \det(C) \\ &= \det(BAC).\end{aligned}$$

ここで、 $\det(A), \det(B), \det(C)$ は数であるため積の順序を入れ替えられることを用いた。

解答 (2). A, B は正則であるから、逆行列 A^{-1}, B^{-1} が存在する。このとき

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AE_nA^{-1} = E_n$$

かつ

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}E_nB = E_n.$$

したがって、 AB は正則であり、

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

である。

解答 (2) の別解. A, B は正則であるから、

$$\det(A) \neq 0, \quad \det(B) \neq 0.$$

一方、

$$\det(A) \det(B) = \det(AB)$$

である。よって

$$\det(AB) \neq 0.$$

したがって、 AB も正則である。

解答 (3). AB が正則であるから

$$\det(AB) \neq 0.$$

一方、

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

である。積が 0 でないので

$$\det(A) \neq 0, \quad \det(B) \neq 0.$$

したがって、 A も B も正則である。

解答 (4). 両辺の行列式を取ると、

$$1 = \det(E_n)$$

$$\begin{aligned}
&= \det({}^tAA) \\
&= \det({}^tA) \det(A) \\
&= \det(A) \det(A) \\
&= (\det A)^2.
\end{aligned}$$

ここで $\det({}^tA) = \det(A)$ を用いた。 $\det(A)$ は実数であるから、

$$\det(A) = \pm 1$$

である。

解答 (5). 両辺の行列式を取ると、

$$(\det A)^7 = \det(A^7) = \det(E_n) = 1.$$

$\det(A)$ は実数であり、実数 t に対して $t^7 = 1$ ならば $t = 1$ である。したがって

$$\det(A) = 1$$

である。

解答 (6). $\theta = \frac{2\pi}{7}$ とし、

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

とおく。これは角度 θ の回転を表す行列であるから、 A^7 は角度 $7\theta = 2\pi$ の回転を表す。したがって

$$A^7 = E_2.$$

一方、 $0 < \theta < 2\pi$ であるから $A \neq E_2$ である。よって一例は

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{7} & -\sin \frac{2\pi}{7} \\ \sin \frac{2\pi}{7} & \cos \frac{2\pi}{7} \end{pmatrix}$$

である。

問題 4. (第 8 回演習 教科書 3.3.3 (2)) A を n 次正方行列, k を正の整数とする。 A の階数が n であることと A^k の階数が n であることは、同値であることを示せ。

解答. n 次正方行列について、階数が n であることと行列式が 0 でないことは同値である。

$\det(A^k) = (\det A)^k$ であるので、

$$\begin{aligned}
\text{rank}(A) = n &\iff \det(A) \neq 0 \\
&\iff (\det A)^k \neq 0 \\
&\iff \det(A^k) \neq 0
\end{aligned}$$

$$\iff \text{rank}(A^k) = n.$$

したがって、 A の階数が n であることと A^k の階数が n であることは同値である。

問題 5. (第 9 回演習追加問題 22) 実数係数の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 & & - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & \lambda x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ (\lambda + 1)x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 0 \end{cases}$$

が $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 以外の解を持つような λ の値を全て求めよ. (ヒント: 前回の演習追加プリントにある行列の正則性の特徴づけを用いる.)

解答. 係数行列を

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \\ \lambda + 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

とおく. 斉次連立一次方程式が自明でない解を持つことと、係数行列が正則でないことは同値である. したがって、求める条件は

$$\det M(\lambda) = 0$$

である。

第 1 行で展開すると、

$$\begin{aligned} \det M(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda + 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda^2 + 1) - \{2 - \lambda(\lambda + 1)\} \\ &= 2\lambda^2 + \lambda - 1 \\ &= (\lambda + 1)(2\lambda - 1). \end{aligned}$$

よって

$$(\lambda + 1)(2\lambda - 1) = 0$$

であり、

$$\boxed{\lambda = -1, \frac{1}{2}}$$

である。

問題 6. (第 9 回演習追加問題 24) $a_0, \dots, a_n \in K$ かつ x を変数とする. 以下の等式を示せ.

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

(ヒント: 余因子展開と帰納法を用いる.)

解答. 左辺の行列式を $D_n(a_0, \dots, a_n)$ と書く. すなわち

$$D_n(a_0, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

第 1 行に沿って余因子展開すると、第 $(1, 1)$ 成分に対応する小行列は対角成分がすべて x の上三角行列であり、その行列式は x^n である。また、第 $(1, 2)$ 成分から生じる小行列は $D_{n-1}(a_1, \dots, a_n)$ である。したがって

$$D_n(a_0, \dots, a_n) = a_0 x^n + D_{n-1}(a_1, \dots, a_n).$$

$n = 1$ のとき、

$$D_1(a_0, a_1) = \begin{vmatrix} a_0 & -1 \\ a_1 & x \end{vmatrix} = a_0 x + a_1$$

であり、主張は成り立つ。

帰納法の仮定として

$$D_{n-1}(a_1, \dots, a_n) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

とする。このとき

$$\begin{aligned} D_n(a_0, \dots, a_n) &= a_0 x^n + D_{n-1}(a_1, \dots, a_n) \\ &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n. \end{aligned}$$

よって数学的帰納法により

$$D_n(a_0, \dots, a_n) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

が成り立つ。

問題 7. (第 9 回演習追加問題 25) 整数からなる n 次正方行列 A について, $\det A = 1$ ならば, 逆行列 A^{-1} のどの成分も整数であることを示せ. (ヒント: 余因子行列を用いる.)

解答. $A = (a_{ij})$ とし, A の余因子行列を $\tilde{A}$ とする. 逆行列の公式より

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}.$$

仮定 $\det A = 1$ より

$$A^{-1} = \tilde{A}.$$

A の各成分は整数であるため, 各余因子は整数からなる行列の行列式であり, 整数である. したがって, $\tilde{A}$ のすべての成分は整数である. ゆえに A^{-1} のすべての成分も整数である.

問題 8. (第 9 回演習 教科書 3.4.4) $n \geq 2$ とする. n 次正方行列 A の余因子行列を $\tilde{A}$ とする. また A は正則であると仮定する.

(1) $A\tilde{A} = (\det A)E$ であることを利用して, $\det(\tilde{A})$ を求めよ.

(2) $\tilde{A}$ の余因子行列は, $(\det A)^{n-2}A$ であることを示せ.

解答 (1). 等式

$$A\tilde{A} = (\det A)E_n$$

の両辺の行列式を取ると,

$$\begin{aligned} \det(A) \det(\tilde{A}) &= \det((\det A)E_n) \\ &= (\det A)^n. \end{aligned}$$

A は正則であるから $\det A \neq 0$ である. したがって両辺を $\det A$ で割ることができ,

$$\det(\tilde{A}) = (\det A)^{n-1}$$

を得る.

解答 (2). A は正則であるから,

$$\tilde{A} = (\det A)A^{-1}$$

も正則である. $\tilde{A}$ の余因子行列を $\tilde{\tilde{A}}$ と書く. 正則行列に対する逆行列の公式より

$$\tilde{\tilde{A}} = \det(\tilde{A})(\tilde{A})^{-1}.$$

前問の結果と

$$(\tilde{A})^{-1} = ((\det A)A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\det A} A$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{A}} &= (\det A)^{n-1} \cdot \frac{1}{\det A} A \\ &= (\det A)^{n-2} A. \end{aligned}$$

したがって、 $\tilde{A}$ の余因子行列は

$$(\det A)^{n-2} A$$

である。

問題 9. (第 10 回授業 教科書 例題 3.5.3) $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ を相異なる数, $b_1, b_2, \dots, b_n \in K$ を任意の数 (同じものがあったてもよい) とする. このとき, K 係数の $n-1$ 次以下の多項式 $f(x)$ であって

$$f(a_i) = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

を満たすものがただ 1 つ存在することを, ヴァンデルモンドの行列式を用いて示せ.

解答. 求める多項式を

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$$

とおく. 条件 $f(a_i) = b_i$ ($i = 1, \dots, n$) は、係数 $c_0, \dots, c_{n-1}$ に関する連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

と同値である。

左辺の係数行列を V とすると、 V はヴァンデルモンド行列であり、

$$\det V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

である。 $a_1, \dots, a_n$ は互いに異なるので、すべての $i < j$ に対して $a_j - a_i \neq 0$ である。 K は体であるから

$$\det V \neq 0.$$

したがって V は正則であり、任意の $b_1, \dots, b_n$ に対して係数ベクトル

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \end{pmatrix}^t$$

はただ一つに定まる。よって、条件

$$f(a_i) = b_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

を満たす K 係数の $n-1$ 次以下の多項式 $f(x)$ はただ一つ存在する。