

期末試験の情報

2026 年度春夏学期 大阪大学 全学共通教育科目 線形代数学・同演義Ⅰ（理（数））

期末試験の情報は次のとおりです。

- 日時: 2026 年 7 月 30 日 木曜 2 限 (10:30-12:00) 10:25 までには着席してください。
- 場所: 共 C206 (授業の部屋)
- 持ち込みに関して: 筆記用具以外の持ち込みは不可。ただし暑いので飲み物の持ち込みは認める。
- 試験内容: 授業全体の内容

以下は注意事項です。

- 解答に関して、答えのみならず、答えを導出する過程をきちんと記してください。 きちんと記していない場合は大幅に減点する場合があります。
- 期末試験に
 - － 中間レポート 2 (7/30 締切)
 - － 中間試験の大問 1 から大問 8(1) まで (大問 8(2), 大問 8(3) は除く)の何問かを数値や表現など少し変えて出す予定です。なので優先的にこの 2 つを先に勉強すると思います。
中間レポート 1(6/4 締切) の内容を出す可能性もあります。ただし現時点で問題を作っていないので、どうなるか分かりません。
- 途中退出は 11:00-11:45 までとします。試験が早く解けたものや諦めたものはこの時間に試験を提出し、その後退出してください。

演習問題及び授業の資料・板書内容は CLE や授業ページ (https://masataka123.github.io/2026_summer_linear_algebra/) にもあります。中間レポート 2・中間試験・中間レポート 1 に関しても CLE や授業ページに問題と解答があります。

試験の欠席対応について

正当な理由での欠席と認められれば別途対応をいたします。ここで正当な理由とはインフルエンザなどの病気または忌引き等です。その場合は岩井に連絡し、教務課に授業・試験欠席届 (下記 URL 参照) を提出してください。

<https://www.celas.osaka-u.ac.jp/education/absence/>

追試験に関して

中間試験・期末試験でよくない成績を取った人が受けることになります。7/30 の試験が終了した後に、岩井からのメールを受け取った人のみがこの試験を受けることになります。そのため CLE やメールを確認できる状態にしておいてください。

中間レポート2 問題

提出締め切り 2026 年 7 月 30 日 (木) 23 時 59 分 59 秒 (日本標準時刻)

- 2026 年 7 月 30 日 (木) 23 時 59 分 59 秒までに CLE にて提出してください。
- レポート問題に関しては提出すれば点数を与えるつもりなので、必ず提出してください。なおレポートは期末試験の練習も兼ねています。
- レポート問題は全て演習で取り扱ったため、演習での解答を再利用して良い。例えば、演習で問題を解いたノートを撮影し、それを組み合わせて pdf ファイルを作って提出しても良い。その場合多少字が汚くても良い。
- 解答に関しては答えのみならず、答えを導出する過程をきちんと記すこと。
- レポート問題に関しては、演習で取り扱ったため、CLE や教科書に解答が全てあります。

問題 1. (第 6 回演習追加問題 13) 5 次置換 σ, τ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\sigma\tau, \tau\sigma, \sigma^{-1}$ を求めよ。
- (2) σ と τ の転倒数と符号を求めよ。
- (3) $\sigma\tau$ の転倒数と符号を求め、 $\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau)$ を確認せよ。

問題 2. (第 7 回演習 教科書 3.2.1 (8), 教科書 3.3.1) 次の行列式を求めよ。

$$(1). \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 5 & -4 \\ 8 & 6 & 2 & -7 & 0 \end{vmatrix} \quad (2). \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 5 & 5 \\ 8 & 6 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad (3). \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 7 \\ -6 & 7 & 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

問題 3. (第 8 回演習追加問題 21) 以下の問題は他学科の期末試験で出した証明問題である。次の問題に答えよ。

- (1) $n \times n$ 行列 A, B, C について、 $\det(ABC) = \det(BAC)$ であることを示せ。
- (2) $n \times n$ 行列 A, B について、 A と B が正則ならば、 AB もまた正則行列であることを示せ。
- (3) $n \times n$ 行列 A, B について、 AB が正則行列であるならば、 A も B も正則であることを示せ。
- (4) 実数係数の $n \times n$ 行列 A について、 ${}^tAA = E_n$ ならば、 $\det(A) = \pm 1$ であることを示せ。ここで tAA は tA と A の積のことである。
- (5) 実数係数の $n \times n$ 行列 A について、 $A^7 = E_n$ ならば、 $\det(A) = 1$ であることを示せ。
- (6) 実数係数の 2×2 行列 A について、 $A^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ かつ $A \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるものの例を一つあげよ。

問題 4. (第 8 回演習 教科書 3.3.3 (2)) A を n 次正方行列, k を正の整数とする. A の階数が n であることと A^k の階数が n であることは, 同値であることを示せ.

問題 5. (第 9 回演習追加問題 22) 実数係数の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 & & - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & \lambda x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ (\lambda + 1)x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 0 \end{cases}$$

が $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 以外の解を持つような λ の値を全て求めよ. (ヒント: 前回の演習追加プリントにある行列の正則性の特徴づけを用いる.)

問題 6. (第 9 回演習追加問題 24) $a_0, \dots, a_n \in K$ かつ x を変数とする. 以下の等式を示せ.

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

(ヒント: 余因子展開と帰納法を用いる.)

問題 7. (第 9 回演習追加問題 25) 整数からなる n 次正方行列 A について, $\det A = 1$ ならば, 逆行列 A^{-1} のどの成分も整数であることを示せ. (ヒント: 余因子行列を用いる.)

問題 8. (第 9 回演習 教科書 3.4.4) $n \geq 2$ とする. n 次正方行列 A の余因子行列を $\tilde{A}$ とする. また A は正則であると仮定する.

(1) $A\tilde{A} = (\det A)E$ であることを利用して, $\det(\tilde{A})$ を求めよ.

(2) $\tilde{A}$ の余因子行列は, $(\det A)^{n-2}A$ であることを示せ.

問題 9. (第 10 回授業 教科書 例題 3.5.3) $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ を相異なる数, $b_1, b_2, \dots, b_n \in K$ を任意の数 (同じものがあってもよい) とする. このとき, K 係数の $n-1$ 次以下の多項式 $f(x)$ であって

$$f(a_i) = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

を満たすものがただ 1 つ存在することを, ヴァンデルモンドの行列式を用いて示せ.