

次は12/11(木)

前回 基本変形 (11-11)

- ① ある行を何倍かする
($\neq 0$ 倍)
- ② 2つの行を入れかえる
- ③ ある行の何倍かを
別の行に加える

簡約
主成分
階数
簡約行列

簡約行列 (3-11)

11) 主成分

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank 3

みたなかつ

簡約化

$$A \xrightarrow{\text{①~③}} B$$

簡約行列

rank A = (主成分の数)
($\rightarrow$ 階数)

簡約
主成分
階数
簡約行列
0か?

例 199

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

②

1行目と3行目を入れかえ

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

①

1行目 $\times \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

③

2行目 $\times (-1)$ と 3行目 $\times (-1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

②

2行目と3行目を入れかえ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

①

2行目 $\times \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

③

2行目 $\times (-1)$ と 3行目 $\times (-1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

②

2行目と3行目を入れかえ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

①

2行目 $\times \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

③

1行目 $\rightarrow$ 2行目 $\times 3$ 対す

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

①

3行目 $\times \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

③

1行目 $\rightarrow$ 3行目 $\times (-\frac{5}{2})$ 対す

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

③

2行目 $\rightarrow$ 3行目 $\times (-\frac{3}{2})$ 対す

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

簡約行列

$5 - 7 = 3$

(1) の $\rightarrow$ 対す

6.2 連立1次方程式

定義 連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(m の式, n の変数)

$$[A: \vec{b}]$$

(m の式, n の変数)

係数行列

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

拡大係数行列

$$[A: \vec{b}]$$

係数行列

係数行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$$

拡大係数行列

$$[A: \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{in} \\
 \text{mn}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \boxed{A^T} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 2x_1 + 3x_2 = 7 \\
 x_1 - 4x_2 = 9
 \end{array} \right.
 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \vec{b} \\
 \text{3}
 \end{array} \right\} [A : \vec{b}] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{3} \\
 \text{1}
 \end{array} \right\} (\text{式} \Rightarrow \text{行列の } T-A)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \boxed{A^T} \\
 \text{02}
 \end{array} \right\} \begin{cases}
 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \\
 x_1 \quad 0 \quad -3x_3 + x_4 = 5 \\
 2x_1 - x_2 + 9x_3 \quad 0 = 0
 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[A : \vec{b}] = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.3 連立方程式の仕方

$A\vec{x} = \vec{b}$ の仕方

① $A\vec{x} = \vec{b}$ から拡大係数行列
行列 $[A : \vec{b}]$ を作る

② $[A : \vec{b}]$ を簡約化して
 $[C : \vec{d}]$ を得る

③ $C\vec{x} = \vec{d}$

例

$$\begin{cases} 0x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 9x_4 - 4x_5 = 7 \\ 0x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 - 4x_5 = 2 \end{cases}$$

と

簡約化

拡大係数行列

③ $C\vec{x} = \vec{d}$ をとく

例

$$\begin{cases} 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 0x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 9x_4 - 4x_5 = 7 \\ 0x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 - 4x_5 = 2 \end{cases}$$

と

簡約化

拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{array} \right)$$

手順2 簡約化して

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

手順3 $(x = \vec{v})$ とおく
(数値データも式にもどす)

$$\begin{cases} 0x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_4 = -2 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -1-2t \\ t \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$(s, t \text{ 任意})$

例105

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$$

↑

手順1

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

手順2 簡約化する

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{2行} - \text{1行} \\ \text{3行} - 2 \times \text{1行}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

③

$$\xrightarrow{\text{3行} - \text{2行}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{③}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{array}{l} 2\text{行} \times A \\ -3\text{行} \times A \end{array}
 \end{array}$$

$\neq \text{恒等}$ $(x = \vec{v} \text{ と } c)$
 $2\text{式} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$
 $x_5 = 1$

$$\begin{array}{l}
 x_4 = t, x_2 = s \quad (s, t \text{ 任意}) \\
 \begin{cases} x_1 = 2 + 2s - 3t \\ x_3 = -1 + t \\ x_5 = 1 \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2s - 3t \\ s \\ -1 + t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} s & t \\ \text{任意} & \text{任意} \end{pmatrix}$

なぜこれであまくいく?

式 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases}$

2行目を1行目に1行目を加える

③ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -x_2 = 7 \end{cases}$

2行目を1行目に1行目を加える

③ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

式 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_2 = -7 \end{cases}$

2行目を1行目に1行目を加える

③ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_2 = -7 \end{cases}$

1行目を1行目に2行目を2倍を加える

③ $\begin{cases} x_1 = 17 \\ x_2 = -7 \end{cases}$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

