

11/6 演習 (1回目)

例 $A: m \times n$ 行列
 $B: n \times l$ 行列

$\rightarrow AB$ $m \times l$ 行列

AB の (i, k) 成分

$$a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$$

例 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 5 + 2 \times 1 \\ 4 \times 5 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} a_{21} & a_{22} & b_{21} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 1×3 行列
 $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ 3×1 行列

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow AB \quad \begin{matrix} 1 \times 1 \\ \text{行列} \end{matrix}$

$(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 \times 5 + 2 \times 7 + 3 \times 2) = (25)$

$B \ 3 \times \boxed{1} \text{ 行列} \rightarrow BA \ 3 \times 3$
 $A \ \boxed{1} \times 3 \text{ 行列}$

$AB \neq BA$

$BA = \begin{pmatrix} \boxed{5} \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} (\boxed{1} \ 2 \ 3)$

$= \begin{pmatrix} \boxed{5 \times 1} & 5 \times 2 & 5 \times 3 \\ 7 \times 1 & 7 \times 2 & 7 \times 3 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 & 2 \times 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 7 & 14 & 21 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

A hand-drawn diagram on a chalkboard. It shows a large square with a smaller square inside it. The larger square is divided into four quadrants by a vertical and a horizontal line. The top-left quadrant contains the letter 'A', the top-right contains 'T', the bottom-left contains 'B', and the bottom-right contains 'D'. The inner square is also divided by a vertical and a horizontal line, with the letter 'C' in the top-left quadrant and 'E' in the bottom-right quadrant. The letters are written in white chalk.

A 3
A 3

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A
B

$$\begin{array}{c|ccc} & B & B & B \\ \hline B & 1 & 0 & 0 \\ B & 0 & 1 & 0 \\ B & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

主成分
 3. $B_{3 \times 2} B_{3 \times 2} \Rightarrow X$
 $B_{3 \times 2} C_{1 \times 3} \Rightarrow X$
 $B_{3 \times 2} D_{2 \times 2} \Rightarrow B D_{3 \times 2}$
 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 17 \\ 7 & 16 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
 $C_{1 \times 3} A_{3 \times 1} \Rightarrow C A_{1 \times 1}$
 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (3)$

$C_{1 \times 3} B_{3 \times 2} \Rightarrow C B_{1 \times 2}$
 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix}$
 $C_{1 \times 3} C_{1 \times 3} \Rightarrow X$
 $C_{1 \times 3} D_{2 \times 2} \Rightarrow X$
 $D_{2 \times 2} A_{3 \times 1} \Rightarrow X$
 $D_{2 \times 2} B_{3 \times 2} \Rightarrow X$
 $D_{2 \times 2} C_{1 \times 3} \Rightarrow X$

$D = 2 \times 2 \quad D = 2 \times 2 \Rightarrow D = 2 \times 2$
 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$
 $\boxed{\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}} \cdot AC = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
 $\cdot BD = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
 $\cdot CA = (3)$
 $\cdot CB = (6 \ 5) \cdot DD = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$

2×2 成立, 21 成立 $\Rightarrow$ 成立
 命題 84, 85 参照 $A(B+C) = AB+AC$
 問題 86
 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & 8 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 13 & 18 \\ -6 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+2 & 5+0 & 9-2 \\ 3-6 & -2-4 & 8-6 \\ -1+8 & 8-4 & 1+2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -3 & -6 & 2 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 & -9 & -7 & 10 & -18 & -4 & 14 & +6 & -3 \\ 0 & -15 & +28 & 0 & -30 & +16 & 0 & +10 & +12 \\ -2 & +0 & -4 & -5 & +0 & -8 & -7 & +0 & -6 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -12 & -12 & 17 \\ 13 & -14 & 22 \\ -10 & -13 & -13 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

補足
 ・ こういう計算はプログラミング
 ができている
 ・ かけ算ができないことは
人ではあるが、コンピュータでは
できない (I)

二 までは演習1のはい

二 これからやること

3 連立方程式をとく

$$\begin{cases} x_1 + 2y + 3z + 4w = 5 \\ 2x + 2y + 2z + 2w = 3 \\ x + 2y + 4z + 6w = 7 \\ x - 4y - 2z + 8w = 1 \end{cases}$$

を解く(ように)なる

二 リカク

○ ほとんどの問題は連立1次
方程式の問題になるから

(コストと利益など)
機械学習, AI

二 どうやってとく

○ ガウス・ジョルダンの掃き出し法
(アルゴリズム的) 目的は

6 連立一次方程式のとき方

定義91 (1行) 基本変形

次の3つの操作を 11-11

(1行) 基本変形という

- ① ある行を何倍か(ただし0倍は×)
- ② 2つの行をいれかえる
- ③ 1つの行に他の行の何倍かを加える

例11

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{①}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$\times 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{③}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

(1 2 -3) に $4 \times (1, 1, 1)$ をたす

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

基本変形でない
(ルール①に反する)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

列の入れ替えはダメ
(基本変形でない)

やること

行列

簡約

定義8

行列

行

0) やること(簡約化)ゴール

1) 行列に基本変形をくわえて

簡約行列をめざす

ゴール

3) 定義8(主成分)

1) 行列において、それぞれの

行の最初に見られる成分

主成分という (0が主成分) (3)

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (4)

定義 89 行列が次のとき 簡約行列 である

① 主成分は 1

② 主成分を持つ列は他の主成分以外 0

③ 右側の列の 0 にはくほと

主成分は下側にある

④ 全ての成分が 0 である行は 0 以外の値を含む行の下側にある

例 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ はんたふ

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ① 主成分1 ok
- ② ok (1以外の値は0)
- ③ ok (主成分の階段)
- ④ ok (0...0は下にずらす)

例2

簡約
行列

でないもの

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

①に反する

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

②に反する

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

③に反する

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

④に反する

3 定理93 (簡約化) $\Gamma-4$
 3 ① どんな行列 A も
 基本変形をくり返して
 簡約行列 B にできる
 ② しかも B はただ1つに定まる

4 この操作を A を簡約化すると
 ③ B を A の簡約化という
 定義95 A のランク (階数)
 $B(A \text{ の簡約化})$ の主成分の
 ④ $\text{rank}(A) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rank}(A)$
 ⑤