

前回 足し算と掛算が計算

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$$

計算 = 24 数のかけ算 (正則)

定

A

例

A^2

A^3

定義 24 A 2×2 行列, m 自然数

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_m$$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$$

例

A^2

A^3

定

数

例) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

定理 - $A^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 3^m \end{pmatrix}$

証明

① $m=1$ のとき. ok

② $m=k$ のとき成立 $\Rightarrow m=k+1$ のとき

$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix}$

一般に $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{pmatrix}$

証明) m による帰納法

① $m=1$ のとき. ok

② $m=k$ のとき成立 $\Rightarrow m=k+1$ のとき

$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix}$

一般に $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{pmatrix}$

2.4 正則行列・逆行列

定義 A を 2×2 行列

ある 2×2 行列 B があって

$$AB = BA = E_2 (= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

となるとき B を A の逆行列 $B = A^{-1}$ とし、
 A は正則という。

(例)

(証)

A

BA

定義

(例) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 正則。

(証) $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定義から A は正則。 $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(例) 2

(証)

B

$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

よ

例12 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則ではない

証明 正則であると仮定する

$$B \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる B があ

$$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \text{ とすると } \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となり矛盾

定理30 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする

$ad - bc \neq 0$ ならば

A は正則で $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

逆に A が正則なら $ad - bc \neq 0$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - 5 \cdot 0} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$ad - bc = 1 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = 1$

(定義3) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

$\det A = ad - bc$ を A の行列式 (determinant) とする

(行列 = matrix) (determinant)

行列 $AB \neq BA$ (一般)

これは $n \times n$ でも成立する
($\det$ をいざした)

(定理32)

行列式 $\det(AB) = (\det A) \times (\det B)$

行列のかけ算 = $\det(BA)$

② $\det A \neq 0 \iff A$ が正則

③ $AB = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A$ 正則 $B = A^{-1}$

定理 30 & 32 の証明

① brute force calculation

② $\det A = (ad-bc) \neq 0$ なら
 $B = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とおくと $AB = BA = E_2$ となる。
 (正則)

③ さらに A 正則 なら $AB = BA = E_2$ より
 $(\det A) \times (\det B) = \det(AB) = \det E_2 = 1$
 $\Rightarrow \det A \neq 0$

④ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (E2) は正則

③ $AB = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする
 A が正則を示す。

$BA = E_2 \Rightarrow \det(A) \times \det(B) = \det(AB) = 1$
 $\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A$ は正則

④ A は逆行列 A^{-1} をも $(AA^{-1} = A^{-1}A = E_2)$
 $\Rightarrow B = E_2 \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}(AB)$
 $(E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ (右) $= A^{-1}E_2 = A^{-1}$

2.5 2変数一次方程式
 定理 $\star \begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=r \end{cases}$ について

$ad-bc \neq 0$ ならば、解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d-b \\ -c-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$$

($A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする) とする

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x} = (A^{-1} \vec{b})$

2.6 $\vec{b} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく。

$\star \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$

(同値)

$\Leftrightarrow A \vec{x} = \vec{b}$

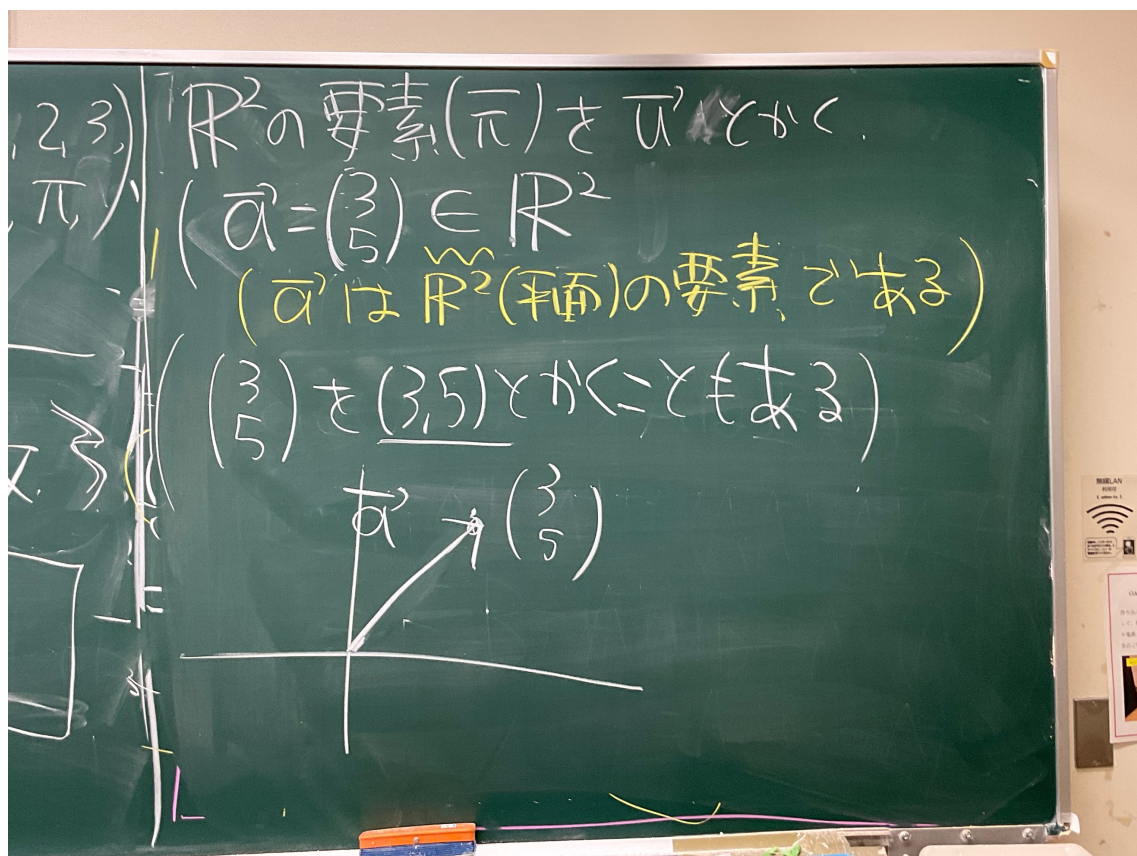
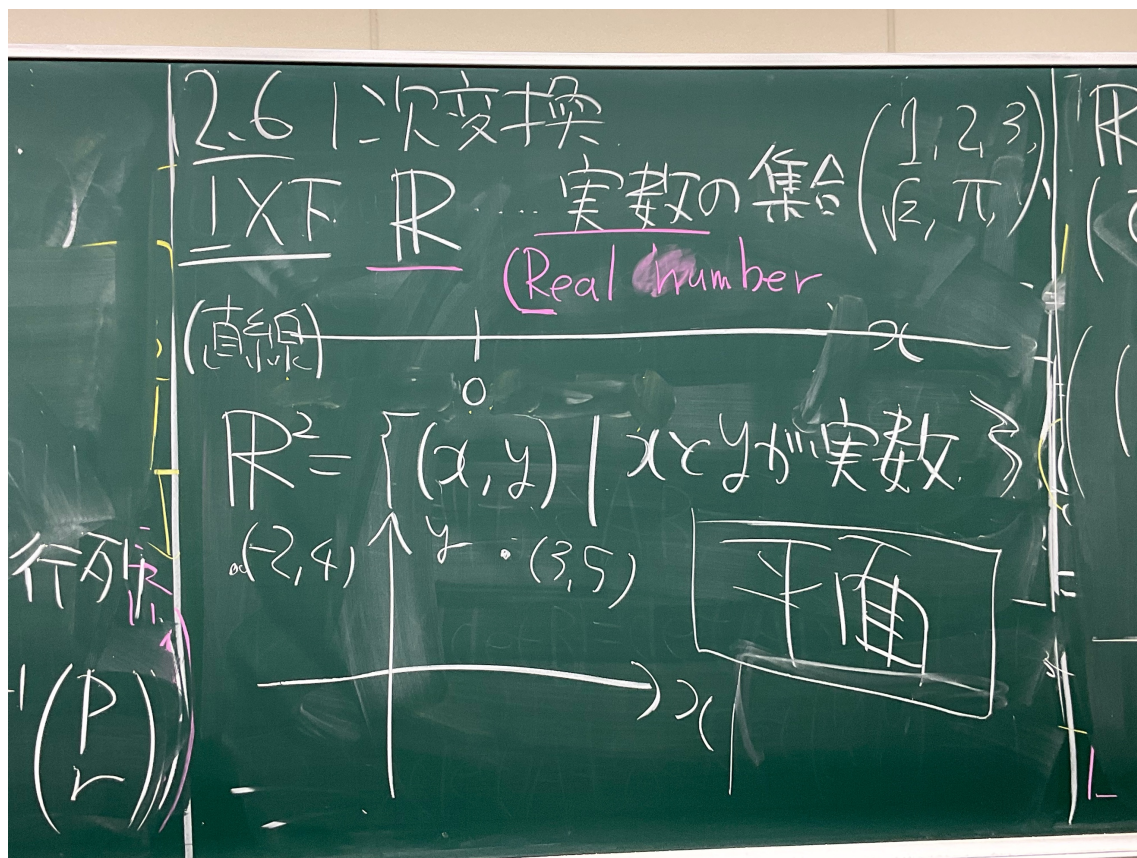
ここで A は正則 (定理30) の逆行列

を左からかけると

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x} = (A^{-1}A) \vec{x} = A^{-1}(A \vec{x}) = A^{-1} \vec{b} = A^{-1} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$

2.6
 1x下
 (直線)

$\mathbb{R}^2 =$
 $(2,4)$



定義 $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$
 ① $\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$
 ② $\alpha \vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$
 ③ 内積 $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 y_2 + x_2 y_1$
 ④ 長さ(ノルム) $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

1x-
 高校
 教科書

① $\vec{u} + \vec{v}$
 ② $2\vec{u}$
 ③ $\vec{u} - \vec{v}$
 ④ $-\vec{u}$
 ⑤ (x_2, y_2)
 ⑥ $(-x_2, -y_2)$
 ⑦ (x_1, y_1)
 ⑧ $(-x_1, -y_1)$

① $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$
 ② θ

定義
 $A =$
 f_A
 3.5

高校の
 教科書参照

定義 3.1 1 次変換 (input をいれろと output がでろ そうし)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする

$f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

(平面) (平面)

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$

を 1 次変換という

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

