$\boxed{1-1}$

$-1 \ -1 \ 1 \ -3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$0 \ -1 \ -1 \ 1$
$0 \ -2 \ -2 \ 2$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$2 \ -4$
$-1 \ 2$

ランク3

$\boxed{1-2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$-3\ -3\ -15\ 0\ -9$

$-2\ -2\ -10\ 0\ -6$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$-1\ -3\ 1\ 1$

$-2\ -6\ 2\ 2$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ランク3

$\boxed{1\text{-}3}$

$$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5\\ 2&3&4&5&6\\ 3&4&5&6&7\\ 4&5&6&7&8\\ 5&6&7&8&9 \end{pmatrix} \xrightarrow{②} \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5\\ 2&3&4&5&6\\ 3&4&5&6&7\\ 4&5&6&7&8\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5\\ 1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 1&2&3&4&5\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&1&2&3&4\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&0&-1&-2&-3\\ 0&1&2&3&4\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

//

ランク 2

$\boxed{2-1}$ 手順通りやる

① 拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ である

② これを簡約化する

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$-2\ -4\ -2\ 0$
$-1\ -2\ -1\ 0$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) //$$

$C \qquad d$

③ $Cx = d$ をとく、つまり $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとく

これは $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ に同じ //.

2-2

① 拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ である

② これを簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{3-1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2

C　　d

③ $Cx = d$ をもとめる

つまり $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとく

つまり
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

よって解は
$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2t \\ x_2 = 2 - 3t \\ x_3 = t \\ x_4 = 3 \end{cases}$$
(t 実数)

(2-3)

① 拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{pmatrix}$ 2[illegible]1

② これを簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{pmatrix}$$

$-2 \ -2 \ 4 \ -2 \ -6 \ -2$

$-3 \ -3 \ 6 \ -3 \ -9 \ -3$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$C \quad d$

③ $Cx = d$ をとく

つまり $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとく

つまり $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$ をとく

$\boxed{解}$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2s \\ x_3 = s \\ x_4 = -3t \\ x_5 = t \end{cases}$ (s, t) 実数.

//

$\boxed{3}$

[・$\det A \neq 0 \iff A$ 正則

・$\det(AB) = (\det A)(\det B)$

を用いる]

① A と B が正則

$\Rightarrow \det A \neq 0$ かつ $\det B \neq 0$

$\Rightarrow (\det A)(\det B) \neq 0$

$\Rightarrow \det(AB) \neq 0 \Rightarrow AB$ 正則

② AB 正則

$\Rightarrow \det(AB) \neq 0$

$\Rightarrow (\det A)(\det B) \neq 0$

$\Rightarrow (\det A) \neq 0$ かつ $(\det B) \neq 0$

$\Rightarrow A$ も B も正則

[3] (別解)

(1) AとBが正則 ⟹ 逆行列 A^{-1}, B^{-1}がある。

ここで $C = B^{-1}A^{-1}$ とすると

$$AB \cdot C = (A \cdot B)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$
$$= AA^{-1} = E_2$$

よって 授業の定理32 (3) より

ABは正則でCはABの逆行列である

(2) ABが正則としてDをABの逆行列とすると

$$\begin{cases} DAB = E_2 \\ ABD = E_2 \end{cases}$$ となる。

よって $(DA)B = E_2$ より

授業の定理32 (3) から

Bは正則でDAはBの逆行列である

同様に $A(BD) = E_2$ より

授業の定理32 (3) から

Aは正則でBDはAの逆行列である

$\boxed{4}$ (1) $\vec{u}+\vec{v}=3(\vec{a}+\vec{b})$ より

$$\vec{a}+\vec{b}=\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})$$

(2) 1つ目の式より $|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$.

よって $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ を示せばよい

2つ目の式と(1)より

$$\vec{u}\cdot\left(\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})\right)=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

//

(3) $\vec{p} = c\vec{u} + d\vec{v}$ とすると

$\vec{p} - (\vec{a} + \vec{b})$

$= \vec{p} - \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})$

$= \left(c - \frac{1}{3}\right)\vec{u} + \left(d - \frac{1}{3}\right)\vec{v}$

よって $\|\vec{p} - (\vec{a} + \vec{b})\| \leqq 1/3$

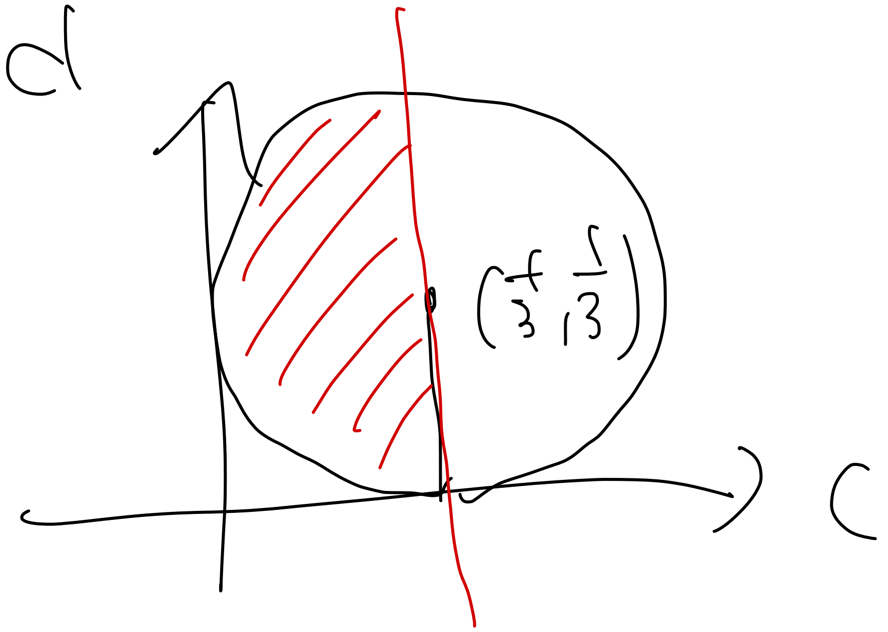
$\iff \left(c - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{3}\right)^2 \leqq 1/3$ … ①

$\vec{p} \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = \vec{p} \cdot \vec{u} = c$ より

$\vec{p} \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) \leqq \frac{1}{3}$

$\iff c \leqq \frac{1}{3}$ … ②

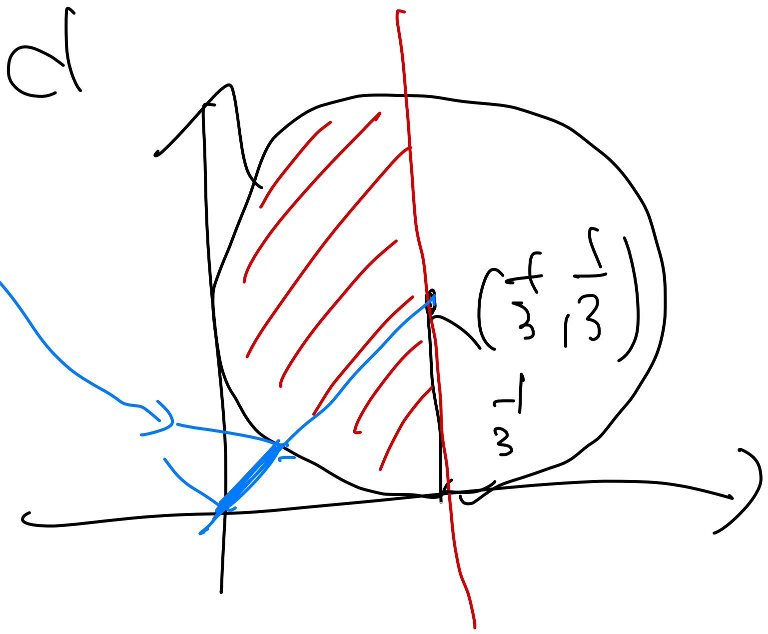
よって ① と ② の条件を図示する。



これをみたす $\|p'\| = \sqrt{c^2+d^2}$ の最大最小は

最小

$$\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}$$



最大

$$\frac{\sqrt{5}}{3}$$