$\boxed{1}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 11 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -21 \\ 14 & 3 \end{pmatrix}$$

② A 2×1 B 1×3 C 3×1 D 2×2

A 2×1 A 2×1 ⟹ AA ×

A 2×1 B 1×3 ⟹ AB 2×3

$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

A 2×1 C 3×1 ⟹ AC ×

A 2×1 D 2×2 ⟹ AD ×

B 1×3 A 2×1 ⟹ BA ×

B 1×3 B 1×3 ⟹ BB ×

B 1×3 C 3×1 ⟹ BC 1×1

$$(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = (1+2+12) = (15)$$

B 1×3 D 2×2 ⟹ BD ×

C 3×1 A 2×1 ⟹ CA ×

C 3×1 B 1×3 ⟹ CB 3×3

$$\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\\4 & 8 & 12\end{pmatrix}$$

$C\ 3\times1 \quad C\ 3\times1 \Rightarrow CC\ \times$

$C\ 3\times1 \quad D\ 2\times2 \Rightarrow CD\ \times$

$D\ 2\times2 \quad A\ 2\times1 \Rightarrow DA\ 2\times1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$D\ 2\times2 \quad B\ 1\times3 \Rightarrow DB\ \times$

$D\ 2\times2 \quad C\ 3\times1 \Rightarrow DC\ \times$

$D\ 2\times2 \quad D\ 2\times2 \Rightarrow DD\ 2\times2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad DA = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$BC = (15)$$

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \qquad DD = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ 手順1

$\det(A - tE_2)$

$= \det\begin{pmatrix} 7-t & -6 \\ 3 & -2-t \end{pmatrix}$

$= (7-t)(-2-t) + 18$

$= (t-7)(t+2) + 18$

$= t^2 - 5t - 14 + 18$

$= t^2 - 5t + 4$

$= (t-4)(t-1)$

固有値 $t = 1, 4$

手順2 $t = 1$のとき $A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ をもとめる

つまり $\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をもとめる

たとえば $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとる

$t=4$ のとき $A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を求める

つまり $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を求める

つまり $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとる

<u>よって</u> $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる。

また $P^{-1} = \dfrac{1}{1-2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ より

$$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 4^n \\ 1 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 4^n - 1 & -2\cdot 4^n + 2 \\ 4^n - 1 & -4^n + 2 \end{pmatrix}$$ ☒

$\boxed{4}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccccc} -1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & 6 & -3 & -6 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} -1 \; -3 \; 1 \; 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 2 \; -1 \\ 2 \end{matrix}} \end{array}$$

5 手順でおける

<u>手順1</u>

$$[A \vdots \vec{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

手順2 上を簡約化する

これはすでにかかれていて

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\hspace{6em} C \hspace{8em} \vec{b}$$

<u>手順3</u> $C\vec{x} = \vec{b}$ をとく。

つまり

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

よって

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+t \\ 1-t \\ t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t\ 任意) \text{ となる}$$

//

[6]

A：90度反回転

$$\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B　x軸反転

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

C　135°反回転

$$\begin{pmatrix} \cos 135^\circ & -\sin 135^\circ \\ \sin 135^\circ & \cos 135^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

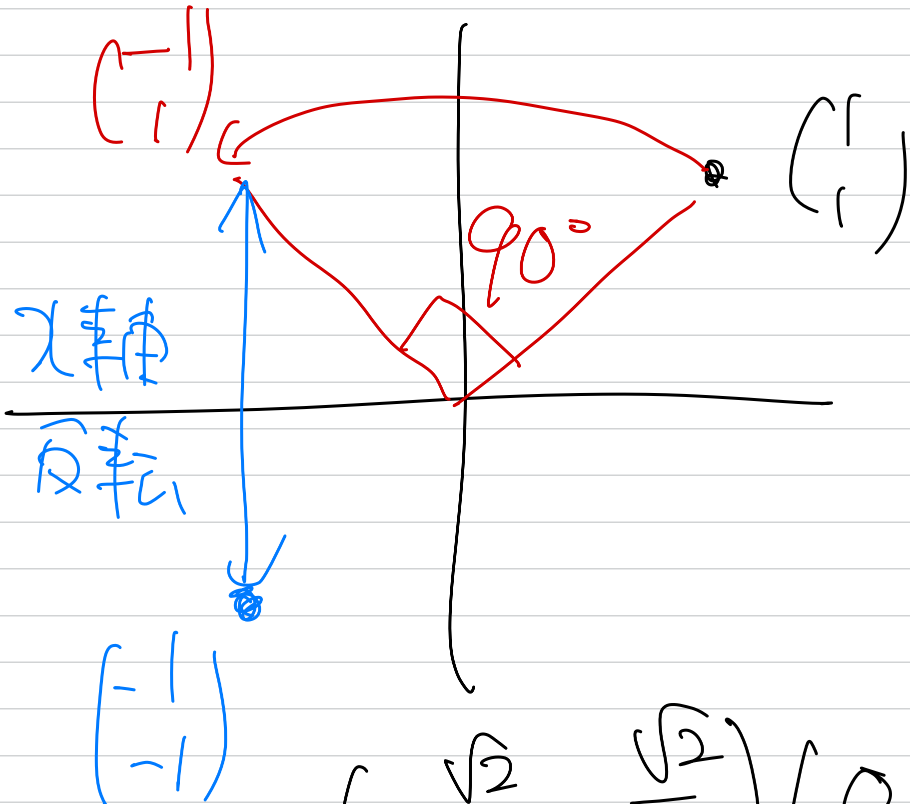
(1)　$BA =$

$\underbrace{\text{90度反回転}}_{A}$し$\underbrace{\text{x軸反転}}_{B}$より

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

よって $BAp = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ //

$\boxed{\text{図}}$



(2) $CBA = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ /

[1]

(1) $a_2 = a_1 - 2b_1 = 2 - 2 \cdot 1 = 0$

$b_2 = a_1 + 4b_1 = 2 + 4 \cdot 1 = 6$

$a_3 = a_2 - 2b_2 = 0 - 2 \cdot 6 = -12$

$b_3 = a_2 + 4b_2 = 0 + 4 \cdot 6 = 24$ //

(2)

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

1回ずらす $= A^2 \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$

同様にずらす $= \cdots$

$$= A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) $P^{-1} = \dfrac{1}{-2+1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ //

$$A^n = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2^n & 3^n \\ -2^n & -3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2^n - 3^n & 2\cdot 2^n - 2\cdot 3^n \\ -2^n + 3^n & -2^n + 2\cdot 3^n \end{pmatrix}$$

よって $n \geqq 1$ で

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2^n - 3^n & 2\cdot 2^n - 2\cdot 3^n \\ -2^n + 3^n & -2^n + 2\cdot 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4\cdot 2^n - 2\cdot 3^n + 2\cdot 2^n - 2\cdot 3^n \\ -2\cdot 2^n + 2\cdot 3^n - 2^n + 2\cdot 3^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6\cdot 2^n - 4\cdot 3^n \\ -3\cdot 2^n + 4\cdot 3^n \end{pmatrix}$$

よって

$n \geqq 2$ について

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot 2^{n-1} - 4\cdot 3^{n-1} \\ -3\cdot 2^{n-1} + 4\cdot 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

$n=1$ でも $\begin{pmatrix} 6 - 4 \\ -3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である

答 $\begin{cases} a_n = 6\cdot 2^{n-1} - 4\cdot 3^{n-1} \\ b_n = -3\cdot 2^{n-1} + 4\cdot 3^{n-1} \end{cases}$

実際、

$a_2 = 6\cdot 2^1 - 4\cdot 3^1 = 0$

$b_2 = -3\cdot 2^1 + 4\cdot 3^1 = -6+12 = 6$

$a_3 = 6\cdot 2^2 - 4\cdot 3^2 = 24-36 = -12$

$b_3 = -3\cdot 2^2 + 4\cdot 3^2 = -12+36 = 24$ //

$\boxed{8}$ (1) たとえば

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{として}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{〃}$$

(2) ・ Aが正則 $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$

・ $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

・ $(\det A)^{-1} = \det(A^{-1})$

A, B 正則 $\Longrightarrow \det A \neq 0 \quad \det B \neq 0$

よって

$\det(B^{-1}A^2B^3A^{-1})$

$= (\det B^{-1})(\det A^2)(\det B^3)(\det A^{-1})$

$= (\det B)^{-1} \cdot (\det A)^2 \cdot (\det B)^3 (\det A)^{-1}$

$= (\det A) \cdot (\det B)^2 \neq 0$

より正則。

(3) $\det A^7 = (\det A)^7$

$\det A^7 = \det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 1$ より

$(\det A) = 1$

($\boxed{\text{実数}}$ λ について $\lambda^7 = 1$ ならば $\lambda = 1$)

(4) たとえば $\frac{360°}{7}$ 反回転

$$R = \begin{pmatrix}\cos\frac{360°}{7} & -\sin\frac{360°}{7}\\ \sin\frac{360°}{7} & \cos\frac{360°}{7}\end{pmatrix}$$

について

$$R^7 = \begin{pmatrix}\cos 360° & -\sin 360°\\ \sin 360° & \cos 360°\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

だが $R \neq \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ である