期末試験

2025 年度秋冬学期 大阪大学 全学共通教育科目 線形代数学入門 (経（81〜160）)

岩井雅崇 (いわいまさたか) 2026/01/22

下の問題を解け. ただし解答に関しては答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記すこと.

第 1 問. 次の計算をせよ.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

第 2 問. 行列 A, B, C, D を次で定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \ D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$AA, AB, AC, AD, BA, BB, BC, BD, CA, CB, CC, CD, DA, DB, DC, DD$ の 16 個の組み合わせのうち, 積が定義されるものを全て求め, その積を計算せよ.

第 3 問. $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ とする. A を対角化せよ. また A^n を n を用いて表せ.

第 4 問. 4×5 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ を簡約化し, その階数を求めよ.

第 5 問. 4×6 行列 A, B を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>ここで B は A の簡約化 (行基本変形) によって得られる簡約行列である.</u> これを用いて, 次の連立 1 次方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} - x_3 \phantom{{}+x_4} + x_5 = -2 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} - 2x_5 = 1 \\ -x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} + x_5 = -3 \end{cases}$$

第 6 問に続く

第 6 問. 2×2 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする.

$$\begin{array}{cccc} f_A: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \end{array}$$

とおき, A を f_A に対応する行列という. 次の問いに答えよ.

(1) 「90 度反時計回りに回転し, x 軸に関しての鏡映 (反転) を行う変換」を $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ とする. 点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ は変換 g によって, $\mathbb{R}^2$ のどの点に移るか求めよ.

(2) 「90 度反時計回りに回転し, x 軸に関しての鏡映 (反転) を行い, 135 度反時計回りに回転する変換」を $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ とする. h に対応する 2×2 行列を求めよ.

第 7 問. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ を次のように定める.

$$a_1=2, b_1=1, \text{ かつ 1 以上の整数 } n \text{ について } \begin{cases} a_{n+1} &= a_n - 2b_n \\ b_{n+1} &= a_n + 4b_n \end{cases} \text{ を満たす.}$$

また行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とする. 次の問題に答えよ. ただし解答に際し次を用いて良い.

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) a_2,b_2,a_3,b_3 を求めよ.

(2) 1 以上の整数 n について $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であることを示せ.

(3) 1 以上の整数 n について, a_n,b_n を n を用いて表せ. なお (2) が分からない場合でも, (2) を認めた上で (3) を解いた解答については, (3) に関して部分点を与える.

第 8 問. 次の問題に答えよ. ただし解答に際し授業・教科書で証明を与えた定理に関しては自由に用いて良い. <u>また以下の問題において, 行列の成分は全て"実数"であると仮定する.</u>

(1) 2×2 行列 A,B について, AB は零行列であるが, A も B も零行列でない行列 A,B の例を一つあげよ.

(2) 2×2 行列 A,B について, A と B が正則ならば, $B^{-1}A^2B^3A^{-1}$ もまた正則行列であることを示せ.

(3) 2×2 行列 A について, $A^7=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ならば, $\det(A)=1$ であることを示せ.

(4) 2×2 行列 A について, $A^7=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ かつ $A\neq\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるものの例を一つあげよ.

問題は以上である.