4　多様体上の微分形式 (2)

19.　n 次元実ベクトル空間 V 上の双線形形式 $\mu \in \bigotimes^2 V^*$ を考える．V の基底を任意に選んで v_1，v_2，……，v_n とし，$\mu(v_i, v_j)$ を第 (i, j) 成分とする $n \times n$ 行列を A とする．

(1)　「μ が交代形式 $\Longleftrightarrow$ A が交代行列」を示せ．

(2)　μ が**非退化**（nondegenerate）であるとは，任意の $v \in V \setminus \{0\}$ に対し，$\mu(v, \cdot)$ が V 上の線形形式として 0 でないことをいう．「μ が非退化 $\Longleftrightarrow$ A が正則行列」を示せ．また，n が奇数のとき V 上に非退化な交代双線形形式は存在しないことを示せ．

20.　V を 4 次元の実ベクトル空間とする．V の基底 v_1，v_2，v_3，v_4 をとり，それに対応する V^* の双対基底を α^1，α^2，α^3，α^4 とする．V 上の交代双線形形式

$$\mu = \alpha^1 \wedge \alpha^2 + \alpha^3 \wedge \alpha^4$$

に対し，$\mu = \beta \wedge \beta'$ となるような β，$\beta' \in V^*$ が存在するかどうか判定せよ．

21.　多様体 M のチャート $(U; x^1, \dots, x^n)$ で関数 f^1，……，f^k が与えられているとする．各 f^j の全微分を df^j とすると（問題 15），$df^1 \wedge \cdots \wedge df^k$ の局所座標表示は

$$df^1 \wedge \cdots \wedge df^k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \frac{\partial(f^1, \dots, f^k)}{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_k})} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

で与えられることを示せ．ただし右辺は $i_1 < \cdots < i_k$ をみたすすべての $(i_1, \dots, i_k)$ にわたる和で，$\partial(f^1, \dots, f^k)/\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_k})$ は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^{i_1}} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^{i_2}} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^{i_k}} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^{i_1}} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^{i_2}} & \cdots & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^{i_k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^k}{\partial x^{i_1}} & \dfrac{\partial f^k}{\partial x^{i_2}} & \cdots & \dfrac{\partial f^k}{\partial x^{i_k}} \end{vmatrix}$$

という行列式のことである．

［ヒント：各 df^j の局所座標表示を左辺に代入して整理する．もしくは，$df^1 \wedge \cdots \wedge df^k$ が局所座標表示をもつこと自体は初めからわかっているので，その係数関数を適切な接ベクトルを代入することによって決定する．］

ここから次のことがわかる．多様体 M の 2 つのチャート $(U; x^1, \dots, x^n)$，$(\tilde{U}; \tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ を考える．前問の結論によると，$U \cap \tilde{U}$ 上で $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ たちと $d\tilde{x}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^{i_k}$ たちのあいだには

$$dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \frac{\partial(x^{j_1}, \dots, x^{j_k})}{\partial(\tilde{x}^{i_1}, \dots, \tilde{x}^{i_k})} \, d\tilde{x}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^{i_k} \tag{$\star$}$$

という関係がある．したがって，微分 k 形式 ω が各々のチャートで

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1 \cdots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \qquad \omega|_{\tilde{U}} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \tilde{f}_{i_1 \cdots i_k} \, d\tilde{x}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^{i_k}$$

と局所座標表示されるとき，$U \cap \tilde{U}$ において係数関数同士は

$$\tilde{f}_{i_1 \cdots i_k} = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \frac{\partial(x^{j_1}, \dots, x^{j_k})}{\partial(\tilde{x}^{i_1}, \dots, \tilde{x}^{i_k})} \, f_{j_1 \cdots j_k} \tag{$\star\star$}$$

という関係によって結ばれている．

ただし，変換則 $(\star)$ や $(\star\star)$ は主として理論的なものというべきであろう．実際の計算では，あるチャートについて局所座標表示された微分形式を別のチャートについて局所座標表示しなおしたければ，

$$dx^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \, d\tilde{x}^i$$

を代入して整理するほうがふつうは早い（微分 n 形式についてだけは例外かもしれない）．

22. $\mathbb{R}^3$ において微分 2 形式 $\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$ を考える．半空間 $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}$ に

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}, \qquad \varphi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

によって局所座標系 (r, θ, φ) を導入する（θ，φ の値はそれぞれ $(-\pi/2, \pi/2)$，$(0, \pi)$ の範囲にとるものと約束しておく）．ω を U において (r, θ, φ) を用いて局所座標表示せよ．

23. $\mathbb{R}^3$ の単位球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を考える．$U = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$，$\tilde{U} = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$ とおいて，U 上の局所座標系 (u, v)，$\tilde{U}$ 上の局所座標系 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ を

$$u = \frac{x}{1 - z}, \qquad v = \frac{y}{1 - z}; \qquad \tilde{u} = \frac{x}{1 + z}, \qquad \tilde{v} = \frac{y}{1 + z}$$

により定義する（北極 $(0, 0, 1)$，南極 $(0, 0, -1)$ に関する立体射影）．チャート $(U; u, v)$ 上で定義された微分 2 形式

$$\omega = \frac{du \wedge dv}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

を，$U \cap \tilde{U}$ において $(\tilde{u}, \tilde{v})$ を用いて局所座標表示せよ．