3　多様体上の微分形式 (1)

13.　多様体 M の点 p に対し，p の開近傍 U と C^∞ 級関数 $f \in C^\infty(U)$ の組 (U, f) すべてからなる集合を S_p とする．S_p に次のような関係 $\sim$ を導入する：

$$(U, f) \sim (U', f') \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{点 } p \text{ のある開近傍 } V \subset U \cap U' \text{ が存在して } f|_V = f'|_V.$$

(1)　$\sim$ が同値関係であることを示せ.

(2)　商集合 $C_p^\infty = S_p/\sim$ を考える（C_p^∞ の元を C^∞ 級関数の点 p における**芽**という）．接ベクトル $v \in T_pM$ を自然に C_p^∞ を定義域とする写像 $C_p^\infty \to \mathbb{R}$ とみなすこともできるが，それはなぜか説明せよ．［ヒント：つまり，与えられた C_p^∞ の元 s について，s の代表元 (U, f) を任意に選び $\tilde{v}(s) = v(f)$ と定めることにすれば，well-defined な写像 $\tilde{v}\colon C_p^\infty \to \mathbb{R}$ がえられる．その理由を説明してほしい.］

14.　V を n 次元実ベクトル空間とし，V^* をその双対空間とする.

(1)　v_1，v_2，……，v_n を V の基底とし，α^1，α^2，……，α^n を双対基底とする．すなわち，各 α^i は $\alpha^i(v_j) = \delta^i_j$ により定義される V の双対空間 V^* の元である*．α^1，α^2，……，α^n が実際に V^* の基底となっていることを示せ.

(2)　v_1，v_2，……，v_n とは別の基底 $\tilde{v}_1$，$\tilde{v}_2$，……，$\tilde{v}_n$ が与えられたとして，基底の取りかえの行列を $P = (p_{ij})$ とする．すなわち

$$\tilde{v}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i.$$

そのとき，$\tilde{v}_1$，$\tilde{v}_2$，……，$\tilde{v}_n$ の双対基底 $\tilde{\alpha}^1$，$\tilde{\alpha}^2$，……，$\tilde{\alpha}^n$ は α^1，α^2，……，α^n を用いてどのようにあらわすことができるか説明せよ.

15.　多様体 M で定義された（C^∞ 級の）関数 f に対し

$$(df)_p(v) = v(f) \qquad (v \in T_pM)$$

と定め，$df = \{(df)_p\}_{p \in M}$ とおく．df が M で定義された（C^∞ 級の）微分 1 形式であることを示せ（問題 4 で定義した df の多様体への一般化．本問の df も f の**微分**ないし**全微分**という）.

---

*δ^i_j は Kronecker のデルタ．すなわち $i = j$ のとき $\delta^i_j = 1$，それ以外のとき $\delta^i_j = 0$.

16.　多様体 M 上の微分 1 形式 ω に対し，曲線 $\gamma\colon [a,b] \to M$ に沿った ω の線積分を

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) dt$$

で定義する（$\dfrac{d\gamma}{dt}$ は γ の時刻 t における速度ベクトルで，$T_{\gamma(t)}M$ に属する）．$\omega = df$ のときは

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

であることを示せ（問題 4 の一般化）．

17.　$\mathbb{R}^3$ の単位球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ を考える．$f(x,y,z) = z$ とおく（$\mathbb{R}^3$ 上の関数とも思えるが，ここでは S^2 上の関数とみなす）．$\omega = df$ によって S^2 上の微分 1 形式 ω を定義する．

ここで S^2 の次のチャート $(U;u,v)$ を考える：$U = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ で

$$u = \frac{x}{1-z}, \qquad v = \frac{y}{1-z}$$

とする（北極 $(0,0,1)$ に関する立体射影）．このチャートを用いて $\omega|_U$ すなわち $df|_U$ を局所座標表示せよ．

18.　前問に引き続き $\mathbb{R}^3$ の単位球面 S^2 を考える．前問のチャート $(U;u,v)$ において

$$\eta = \frac{-v\,du + u\,dv}{(1+u^2+v^2)^2}$$

で与えられる（U 上の）微分 1 形式 η を考える．S^2 で定義された微分 1 形式 ω であって $\omega|_U = \eta$ となるようなものが存在するかどうか判定せよ．