2　$\mathbb{R}^n$ 上の微分形式 (2)

7.　$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で定義された微分 1 形式

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

を考える（問題 5）．$d\omega$ を求めよ．

8.　$\mathbb{R}^3$ における関数（微分 0 形式）f，微分 1 形式 $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$，微分 2 形式 $\eta = f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy$ の外微分 df，$d\omega$，$d\eta$ を求めよ．また，その計算結果と $\mathbb{R}^3$ におけるベクトル解析で用いられる作用素 grad，rot（curl），div との関係について整理し，説明せよ．

9.　(1)　$\mathbb{R}^3$ において $\omega = (2 + yz^2)\,dx + xz^2\,dy + 2xyz\,dz$ とおく．$d\omega = 0$ を確かめよ．

(2)　(1) の ω に対し，関数 f を次のように定める：

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_\gamma \omega, \qquad \text{ただし } \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = t\boldsymbol{x}.$$

$f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ を用いて具体的にあらわし，$df = \omega$ となることを確かめよ．

10.　微分 1 形式について Poincaré の補題を証明しよう．

$\omega = \sum_{i=1}^{n} g_i\,dx_i$ を $\mathbb{R}^n$ の閉微分 1 形式とする．前問の (2) と同じ式（ただし $\mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^n$ でおきかえる）によって f を定義する．線積分の定義を用いて計算すると

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i g_i(tx_1, \dots, tx_n) \right) dt$$

であるが，この両辺を x_j で偏微分することにより $df = \omega$ を示せ．（右辺については積分記号下の微分を行うことになる．その際，何を確かめればいいか明確に述べること．）

11. $\mathbb{R}^n$ の開集合 U で定義された微分 1 形式 ω の線積分について考える．ω が完全形式ならば，曲線 γ に沿った ω の線積分の値は γ の始点と終点のみによって定まり，途中の経路にはよらなかった（問題 4）．

本問では ω は必ずしも完全形式でなくてよいとし，閉形式であることのみを仮定する．二つの曲線 $\gamma_0\colon [a,b]\to U$，$\gamma_1\colon [a,b]\to U$ があり，どちらも始点が $p\in U$，終点が $q\in U$ であって，これらは互いに C^∞ ホモトピックであるとする*．すなわち C^∞ 級写像 $F\colon [a,b]\times[0,1]\to U$ であって

$$F(a,s)=p,\quad F(b,s)=q\quad (0\leqq s\leqq 1),$$
$$F(\cdot,0)=\gamma_0,\quad F(\cdot,1)=\gamma_1$$

をみたすようなものが存在するとする．そのとき $\displaystyle\int_{\gamma_0}\omega=\int_{\gamma_1}\omega$ であることを示せ．

［ヒント：$\gamma_s=F(\cdot,s)$ とおき，$I(s)=\displaystyle\int_{\gamma_s}\omega$ と定める．これが $I'(s)=0$ をみたすことを前問と同様に積分記号下の微分を実行して確かめよ．後に別の理解の仕方も示す．］

ベクトル場 X，$Y\in\mathfrak{X}(U)$ に対し $[X,Y]$ は X，Y の**括弧積**とか **Lie 括弧積**などとよばれるベクトル場である．以下に定義を述べておく．まずベクトル場 $X=\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\in\mathfrak{X}(U)$ は，次のような写像 $C^\infty(U)\to C^\infty(U)$ とみなすことができた：

$$f\longmapsto Xf=\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

すると，任意のベクトル場 X，Y に対し，$f\longmapsto X(Yf)-Y(Xf)$ で定義される写像 $C^\infty(U)\to C^\infty(U)$ は，再びあるベクトル場に対応するものになる．その「あるベクトル場」が $[X,Y]$ である．具体的には

$$X=\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x_i},\quad Y=\sum_{i=1}^n b_i\frac{\partial}{\partial x_i}\quad \text{のとき}\quad [X,Y]=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\left(a_i\frac{\partial b_j}{\partial x_i}-b_i\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

で与えられる．

12. $\mathbb{R}^n$ の開集合 U で定義された微分 1 形式 ω とベクトル場 X，Y に対し

$$d\omega(X,Y)=X(\omega(Y))-Y(\omega(X))-\omega([X,Y])$$

であることを示せ．

*ホモトープともいう．homotopic（英），homotop（独）．なお「ホモトピー同値」は誤った言葉遣い（というより別の概念を指す言葉）なので注意．