8　Mayer–Vietoris 完全列 (1)

44.　ベクトル空間の完全列 $\cdots \to V^{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} V^k \xrightarrow{f_k} V^{k+1} \to \cdots$ に対し

$$\cdots \to V^{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} V^k \xrightarrow{f_k} \operatorname{Im} f_k \to 0, \qquad 0 \to \operatorname{Ker} f_k \hookrightarrow V^k \xrightarrow{f_k} V^{k+1} \to \cdots$$

も完全列であることを確かめよ．ただし，f_k の終域 V^{k+1} を $\operatorname{Im} f_k$ に置きかえた写像を同じ記号 f_k であらわしている．また $\hookrightarrow$ は包含写像である．

上記の一つめの完全列は，f_k の終域を置きかえるという操作を避けたければ，$\cdots \to V^{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} V^k \xrightarrow{f_k} V^{k+1} \to \operatorname{Coker} f_k \to 0$ としてもよい．ただし $\operatorname{Coker} f_k = V^{k+1}/\operatorname{Im} f_k$.

次の問題の (2) は，ベクトル空間の完全列にあらわれる未知の項の次元を求める際に便利である（だが必須の知識というほどではない．そのつど考察するのでも十分）.

45.　(1)　ベクトル空間の完全列 $\cdots \to V^{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} V^k \xrightarrow{f_k} V^{k+1} \to \cdots$ について，V^{k-1}，V^{k+1} が有限次元ならば V^k も有限次元で，さらに

$$\dim V^k = \dim \operatorname{Im} f_{k-1} + \dim \operatorname{Im} f_k$$

であることを示せ.

(2)　有限次元ベクトル空間の完全列 $0 \to V^0 \to V^1 \to \cdots \to V^n \to 0$ について，次元の交代和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dim V^k$ は 0 に等しいことを示せ.